Repaso de Clase 4

- Flujos planos ($u_{x,y}(x, y) = 0$) , incompresibles ($\frac{d\rho}{dt} = 0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$) e irrotacionales ($\underline{\nabla} \times \underline{u} = 0$).

- <u>Función potencial</u>: singularidades de $\underline{\nabla} \times \underline{u}$ (vórtices) >>> $\phi(x, y)$ multivaluada

- <u>Función corriente</u>: singularidades de $\underline{\nabla} \cdot \underline{u}$ (fuentes) >>> $\psi(x, y)$ multivaluada

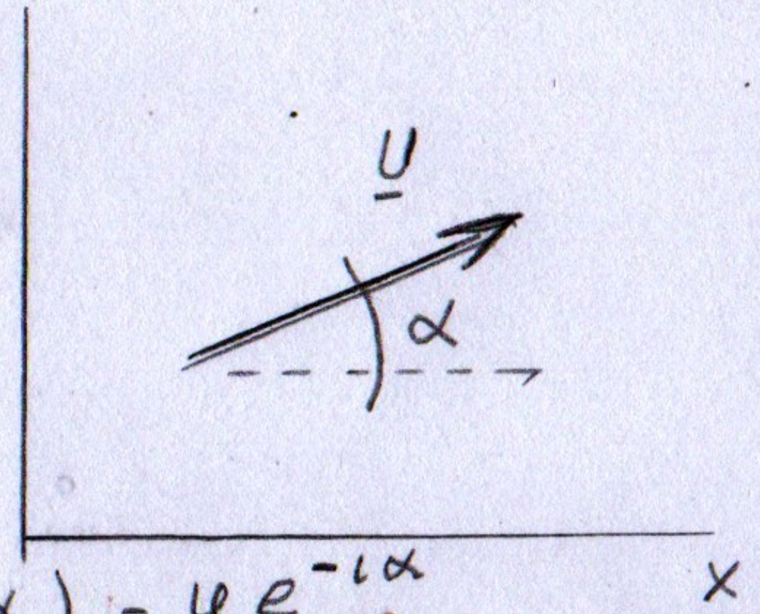
- <u>Potencial complejo</u>: $W(z) = \phi(x, y) + i\, \psi(x, y)$ $\qquad z = x + iy$

- Flujos simples: uniforme, fuente (sumidero), vórtice, punto de estancamiento.

Algunos flujos elementales

Flujo uniforme

Queremos obtener $W(z)$ para varios flujos simples. Para un flujo uniforme:



$$\left.\begin{array}{l} u_x = U\cos\alpha \\ u_y = U\sin\alpha \end{array}\right\} \rightarrow \frac{dW}{dz} = U^* = U(\cos\alpha - i\sin\alpha) = U e^{-i\alpha}$$

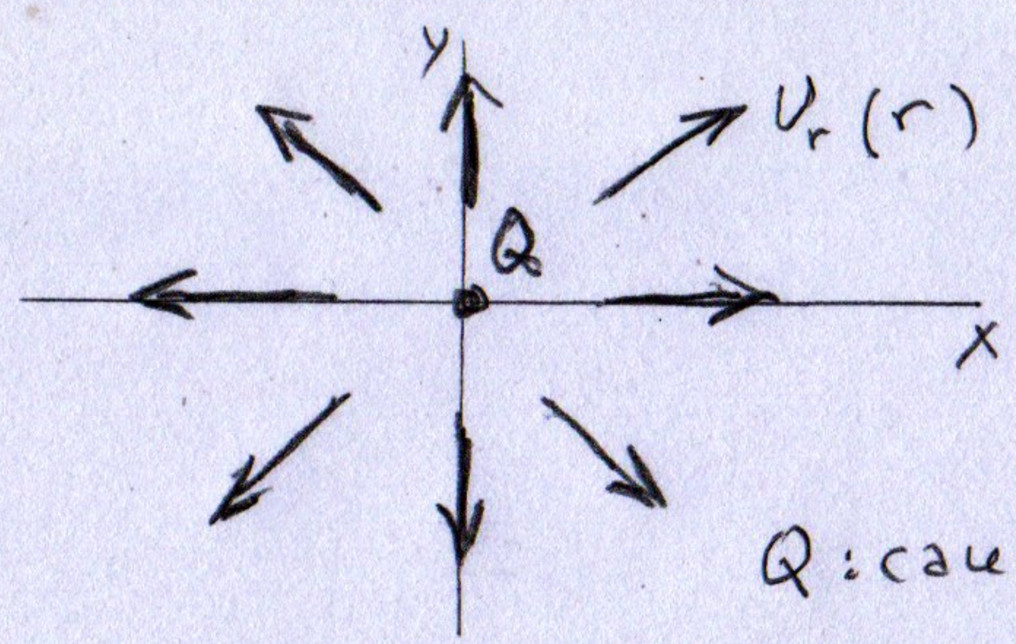
$$\therefore \boxed{W(z) = U e^{-i\alpha} z}$$

flujo uniforme

→ líneas de corriente $\psi = Im(W) = cte$

→ líneas de potencial $\phi = Re(W) = cte$

Fuente o sumidero



Q: caudal

$$\underline{u} = u_r(r)\,\hat{r}$$

$$Q = u_r\, 2\pi r \longrightarrow u_r(r) = \frac{Q}{2\pi r}$$

Para obtener $W(z)$:

$$\left\{\begin{array}{l} u_x = \dfrac{Q}{2\pi r}\cos\theta \\ u_y = \dfrac{Q}{2\pi r}\sin\theta \end{array}\right.$$

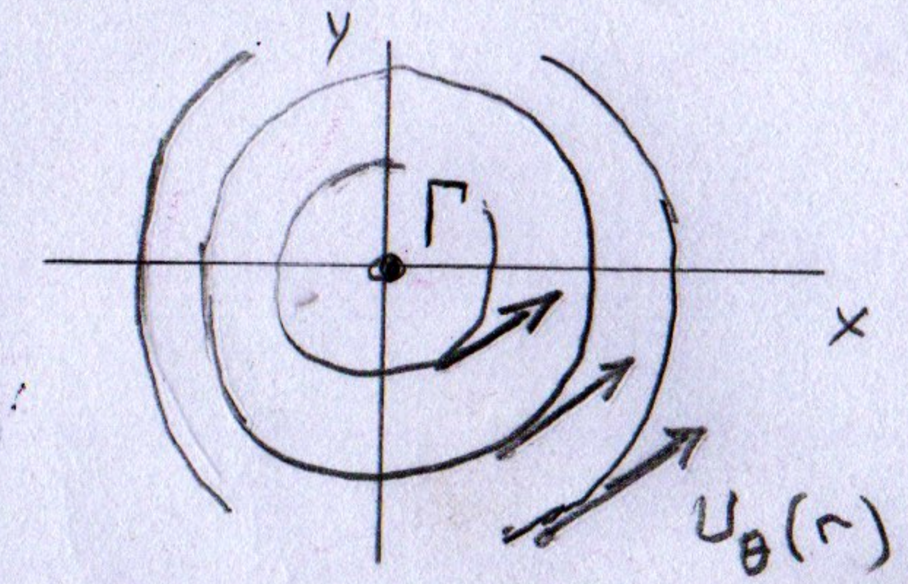
Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} u_x = \dfrac{Q}{2\pi}\dfrac{x}{x^2+y^2} = \partial_x\phi = \partial_y\psi \\ u_y = \dfrac{Q}{2\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2} = \partial_y\phi = -\partial_x\psi \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \phi = \dfrac{Q}{2\pi}\ln r \\ \psi = \dfrac{Q}{2\pi}\theta \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como } z = re^{i\theta} \\ W = \phi + i\psi \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{W(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln(z - z_0)}$$

fuente o sumidero en z_0
$(Q>0)$ $(Q<0)$

Vórtice



Un vórtice puntual en el origen

$$\underline{\omega} = \hat{z}\,\Gamma\,\delta(\underline{r})$$

corresponde a un campo $u_\theta(r)$ tal que $\Gamma = u_\theta(r)\,2\pi r$

Entonces, con cálculos similares, obtenemos

$$\boxed{W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z - z_0)}$$ vórtice en z_0

Punto de estancamiento $(z = z_0)$

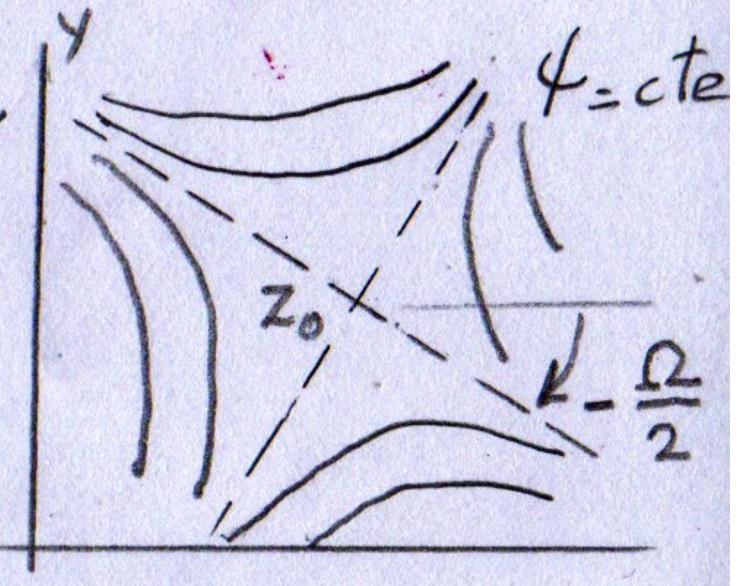
$$W(z) = \underbrace{\cancel{W(z_0)}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\left.\frac{dW}{dz}\right|_{z_0}}}_{U^*(z_0)=0}(z - z_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\left.\frac{d^2W}{dz^2}\right|_{z_0}}_{W_0''}(z - z_0)^2 + \ldots$$

(cero de potencial)

$$W_0'' = |W_0''|e^{i\Omega} \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{W(z) = \frac{W_0''}{2}(z - z_0)^2}$$

pto. estancamiento



Método de imágenes

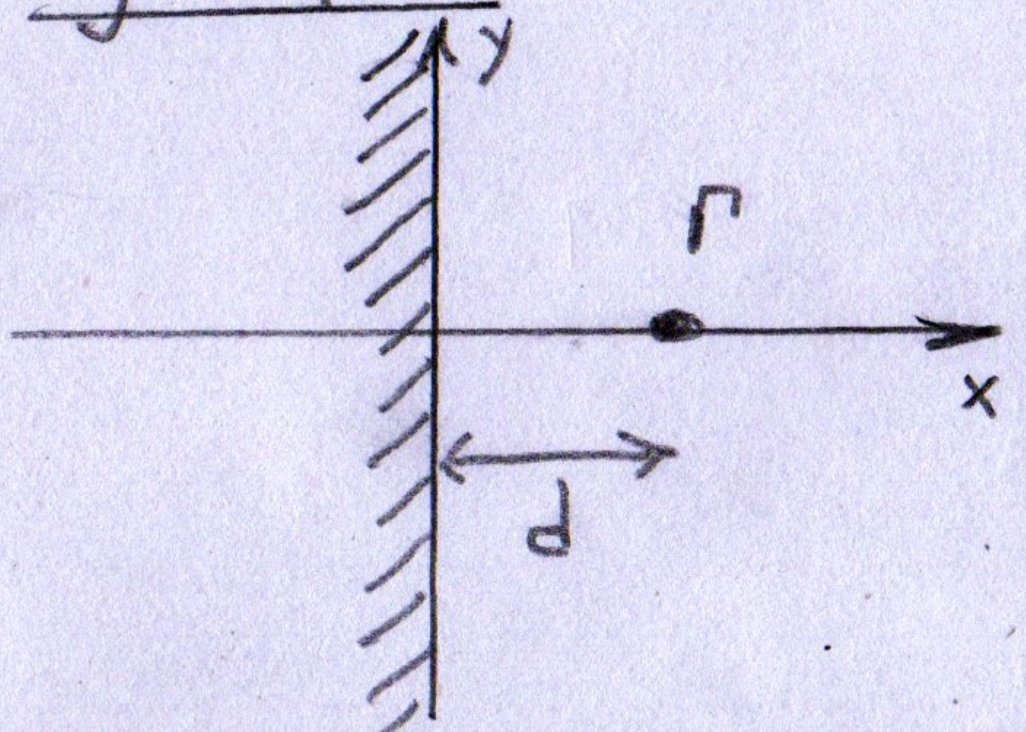
Al igual que en electrostática, el método de imágenes ayuda a satisfacer <u>condiciones de contorno</u> en problemas con suficiente simetría.

La cond. contorno de un fluído ideal en contacto con paredes rígidas es $\hat{n}\cdot\underline{u}\big|_{pared} = 0$

Expresa la condición de rigidez de la pared.

NOTA: En flujos planos, la velocidad será tangente a la pared y por lo tanto coincidirá con una línea de corriente.

Ejemplo:



Sea un vórtice Γ a una distancia d de una pared. Para satisfacer la cond. contorno, agregamos un vórtice imagen $-\Gamma$ en $x = -d$.

$$\therefore\ W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z-d) + \underbrace{\frac{-\Gamma}{2\pi i}\ln(z+d)}_{\text{vórtice imágen}}$$

Calculamos líneas de corriente:

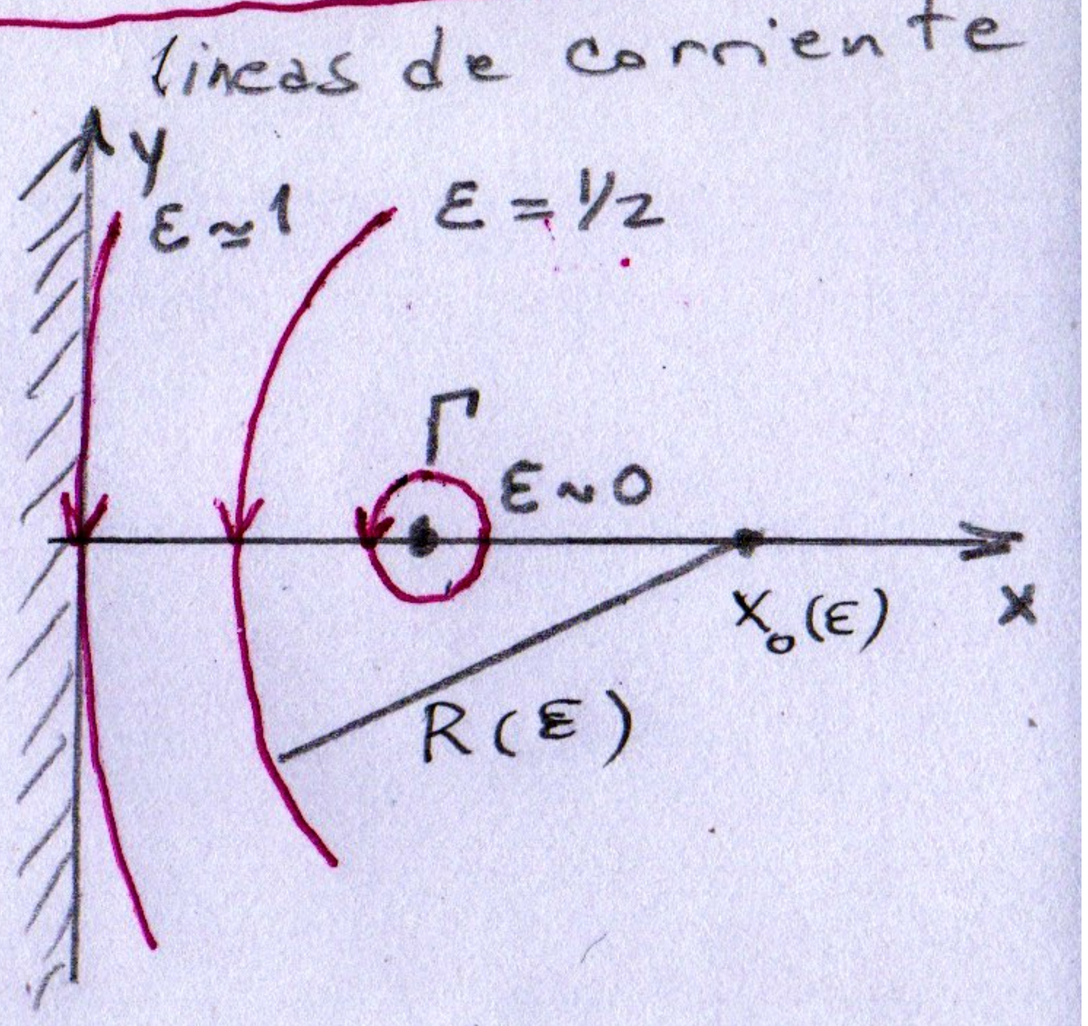
$$\psi = \operatorname{Im} W = \operatorname{Im}\left[\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(\frac{z-d}{z+d}\right)\right] = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left|\frac{z-d}{z+d}\right| = cte$$

$$\therefore\ \left|\frac{z-d}{z+d}\right| = \varepsilon = cte \longrightarrow \frac{(x-d)^2+y^2}{(x+d)^2+y^2} = \varepsilon^2$$

Entonces: $$\Big(x - \underbrace{d\cdot\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}_{x_0(\varepsilon)}\Big)^2 + y^2 = \Big(\underbrace{\frac{2d\,\varepsilon}{1-\varepsilon^2}}_{R(\varepsilon)}\Big)^2$$

Las líneas de corriente son circunferencias no concéntricas, centradas en $x_0(\varepsilon)$ y con radio $R(\varepsilon)$ para $0<\varepsilon<1$.

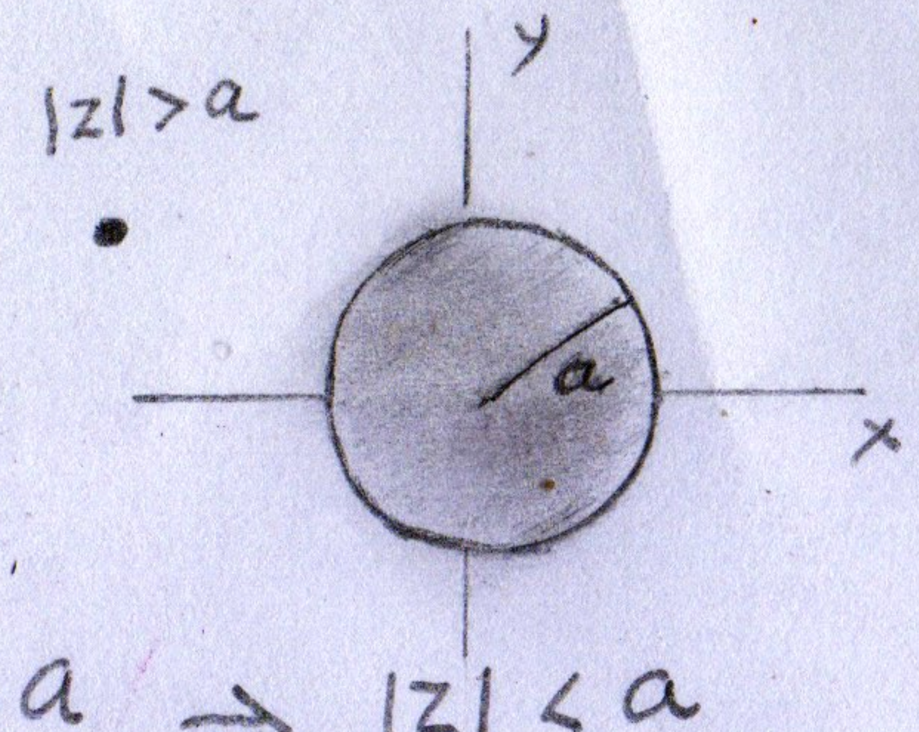
- Para $\varepsilon\sim 0 \Longrightarrow x_0\sim d\ ,\ R\sim 0$
- $\varepsilon = 1/2 \Longrightarrow x_0 = \frac{5d}{3}\ ,\ R\sim\frac{4d}{3}$
- $\varepsilon\sim 1 \Longrightarrow x_0\simeq\infty\ ,\ R\sim\infty$



Teorema del círculo (Milne-Thomson, 1940)

Sea un flujo con potencial complejo $W = W_0(z)$ con singularidades en $|z| > a$. Entonces, $W = W_0(z) + W_0^*(\frac{a^2}{z^*})$ es el potencial complejo con las mismas singularidades que W_0 en $|z| > a$ y con $|z| = a$ como linea de corriente.

Demostración



(i) Sing. de $W_0(z)$ en $|z|>a$ (fuera del círculo)

$\Downarrow$

Sing. de $W_0(\frac{a^2}{z^*})$ en $\left|\frac{a^2}{z^*}\right|>a \Rightarrow |z|<a$ (dentro del círculo).

Es decir que $W_0^*(\frac{a^2}{z^*})$ agrega singularidades (virtuales) dentro del círculo.

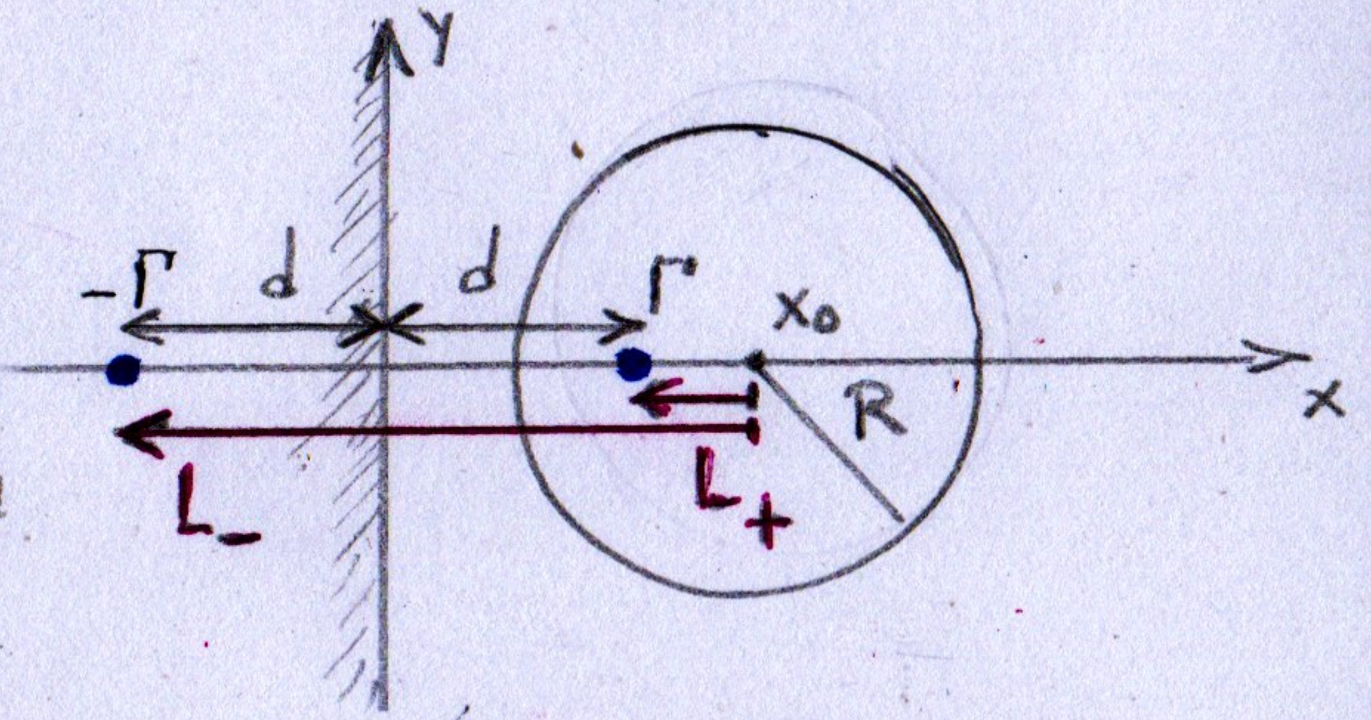
(ii) En $|z|=a \Rightarrow zz^*=a^2 \Rightarrow \frac{a^2}{z^*}=z$

Entonces $W(|z|=a) = W_0(z)+W_0^*(z) \in \mathbb{R}$

$\therefore \mathrm{Im}[W(|z|=a)] = 0 = cte \Rightarrow$ $|z|=a$ es una línea de corriente

NOTA: El teorema es compatible con el agregado de un vórtice Γ en el origen: $W(z) = W_0(z) + W_0^*(\frac{a^2}{z^*}) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$

Veamos que con el ejemplo anterior y un poco de ingenio, pudimos haber deducido el teorema.



- El problema original es un vórtice Γ a distancia d de la pared.
- La circunferencia centrada en x_0 de radio R es una línea de corriente.
- Y si colocamos un círculo de radio R y centro x_0 frente a un vórtice $-\Gamma$ a distancia L_-?
- Se requiere un vórtice virtual $+\Gamma$ a distancia L_+

$L_\pm = x_0 \mp d \xrightarrow[\text{ejercicio}]{} L_+ \cdot L_- = R^2 \longrightarrow L_+ = \frac{R^2}{L_-}$

Flujo alrededor de un cilindro

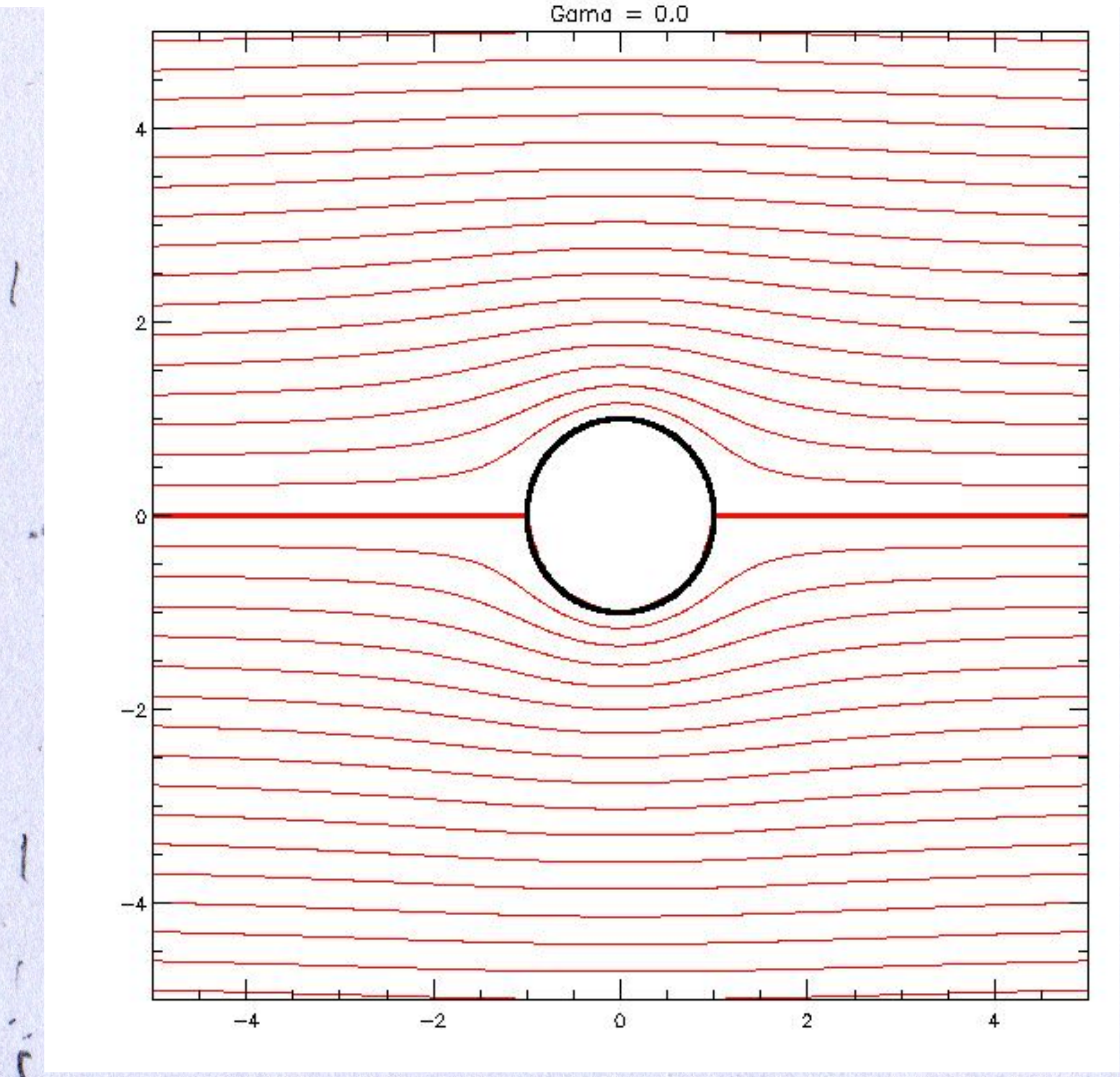
Sea un flujo horizontal y uniforme U_0 sobre un círculo de radio a

$$W_0(z) = U_0 z \Rightarrow W = U_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

Verifiquen que

$\psi = 0$ en $|z| = a$

Noten que las líneas de corriente son simétricas respecto de $x \leftrightarrow -x$ y también $y \leftrightarrow -y$.



Agregamos ahora un vórtice $-\Gamma$ en el origen:

$$W(z) = U_0 z + U_0 \frac{a^2}{z} + \frac{-\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

$$\psi = Im(W) = U_0 y - \frac{U_0 a^2 y}{x^2+y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

Utilizamos las constantes U_0 y a para adimensionar el problema:

$$\left.\begin{array}{l} \psi \to U_0 a \psi \\ (x,y) \to a(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow \psi(x,y) = y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) + \gamma \ln(x^2+y^2)$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{4\pi U_0 a}$$

Noten que la versión adimensional ya no depende de U_0, Γ, a sino solamente de γ.

El vórtice rompe la simetría $y \leftrightarrow -y$.

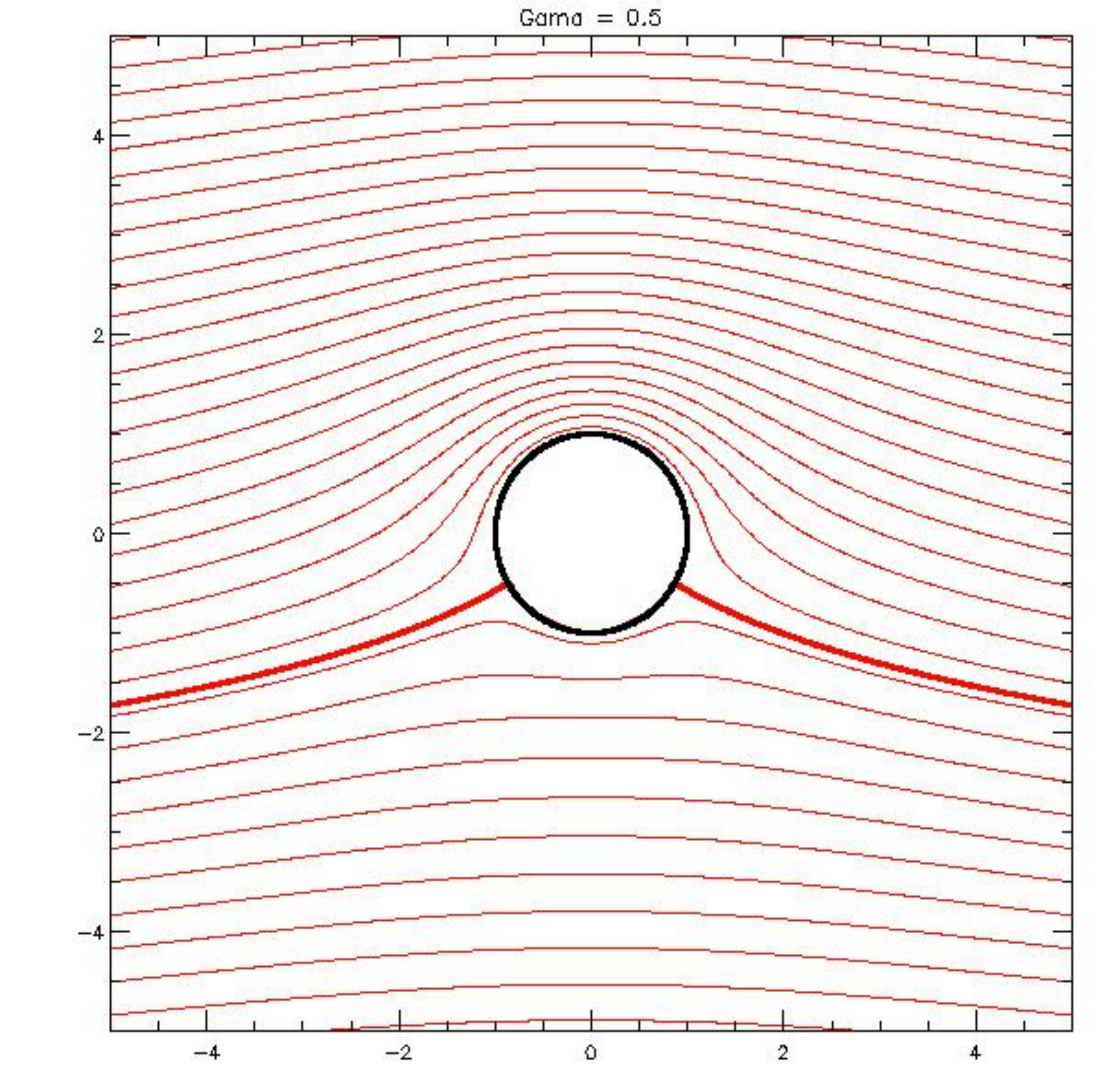
Busquemos puntos de estancamiento sobre $|z| = a$, donde se insertan líneas de corriente que llamamos separatrices.

En polares: $\left\{\begin{array}{l} u_\theta = \partial_r \psi \\ u_r = \frac{1}{r}\partial_\theta \psi \end{array}\right.$

$$\psi(r,\theta) = r\sin\theta\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) + 2\gamma \ln r$$

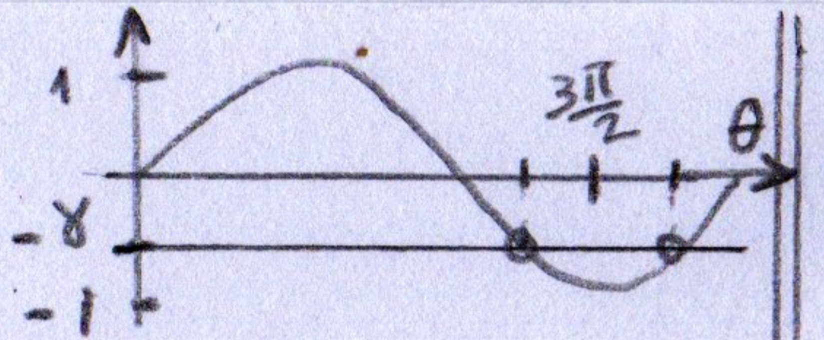
$$u_\theta(r=1) = 2\sin\theta + 2\gamma = 0$$

$\sin\theta = -\gamma$ Ptos. estanc. si $-1 < \gamma < 1$



Flujo alrededor de un cilindro

Noten que las soluciones de $\sin\theta = -\gamma$ equidistan de $\theta = \frac{3\pi}{2}$



Para $\gamma \to 1$, los dos puntos coinciden en $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Para $\gamma > 1$ ya no hay puntos de estancamiento sobre el perímetro. Busquemos ptos. estancamiento fuera del círculo:

$$u_\theta = \partial_r \psi = \sin\theta\left(1+\frac{1}{r^2}\right) + \frac{2\gamma}{r} = 0$$

$$u_r = \frac{1}{r}\partial_\theta \psi = \cos\theta\left(1-\frac{1}{r^2}\right) = 0 \longrightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

Para satisfacer $u_\theta = 0$ debe ser $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$ y

$$r^2 - 2\gamma r + 1 = 0 \longrightarrow r_0 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

La solución r_- resulta $r_- < 1$ si $\gamma > 1$.

Entonces si $\gamma > 1$ hay un único punto de estancamiento en $\theta = \frac{3\pi}{2}$ y $r_0 = \gamma + \sqrt{\gamma^2-1} > 1$.

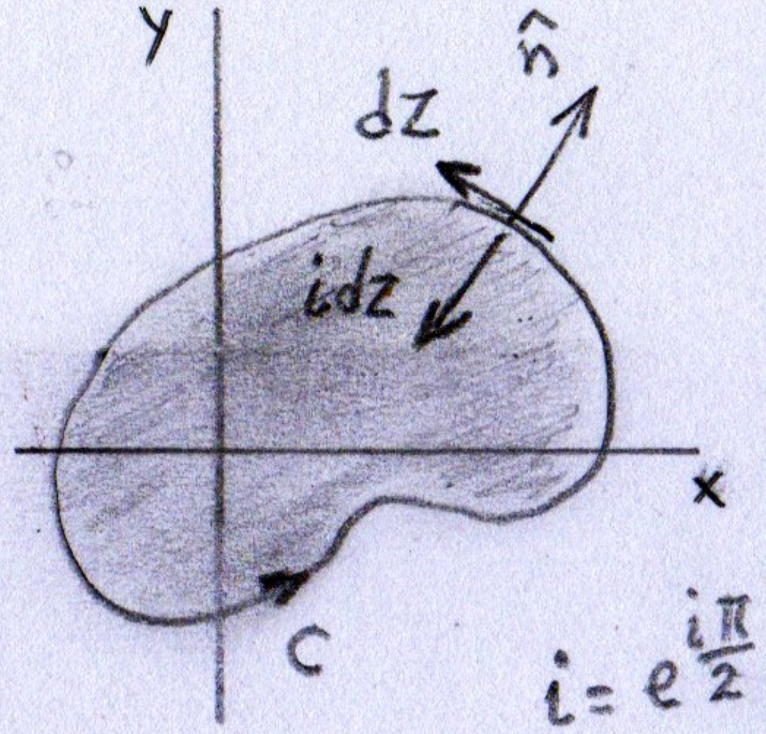
La separatriz tiene la forma de la figura, separando el flujo que evade al círculo por arriba y por abajo, pero también aislando un flujo estanco alrededor del círculo. Ejemplo: $\gamma = 1.5 \longrightarrow r_0 = 2.62$

Teorema de Blasius (1911)

Sea un flujo estacionario con potencial complejo W(z) alrededor de un sólido delimitado por la curva cerrada C. La fuerza del fluído sobre el sólido resulta: $F^* = F_x - iF_y = \dfrac{i\rho}{2}\oint_C dz\,\left(\dfrac{dW}{dz}\right)^2$

<u>Demostración</u>

La fuerza del fluído al sólido se ejerce a través de la pared y vale $\underline{F} = -\oint_C p\,\hat{n}\,ds$



$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

En notación compleja: $\begin{cases} \hat{n}\,ds \longrightarrow -i\,dz \\ \underset{\sim}{F} \longrightarrow \mathbb{F} = F_x + iF_y \end{cases}$

Es decir que:

$$\mathbb{F} = F_x + iF_y = i\oint_C p\,dz \;\longrightarrow\; \mathbb{F}^* = F_x - iF_y = -i\oint_C p\,dz^*$$

Por Bernoulli 2: $p = p_0 - \rho\dfrac{u^2}{2} = p_0 - \dfrac{\rho}{2}\left|\dfrac{dW}{dz}\right|^2$

$$\therefore\; F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint_C \left|\frac{dW}{dz}\right|^2 dz^* \quad \left(\text{porque } \oint_C p_0\,dz = 0\right)$$

Se parece al resultado, pero no es.

Como sobre C es $\mathrm{Im}(W) = \text{cte} \longrightarrow \mathrm{Im}(dW) = 0$

Sobre C es $dW = dW^* \longrightarrow \dfrac{dW}{dz}dz = \left(\dfrac{dW}{dz}dz\right)^* = \left(\dfrac{dW}{dz}\right)^* dz^*$

Entonces $\left|\dfrac{dW}{dz}\right|^2 dz^* = \dfrac{dW}{dz}\left(\dfrac{dW}{dz}\right)^* dz^* = \left(\dfrac{dW}{dz}\right)^2 dz$ sobre C

$$\therefore\; F^* = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\oint_C dz\left(\frac{dW}{dz}\right)^2$$

<u>Ejercicio</u>: Muestren que la fuerza de un flujo $u_0\hat{x}$ sobre un círculo de radio a con vórtice $-\Gamma$ en el origen es

$$\underline{F} = \hat{y}\,\rho\,u_0\Gamma$$