

# Repaso de Clase 5

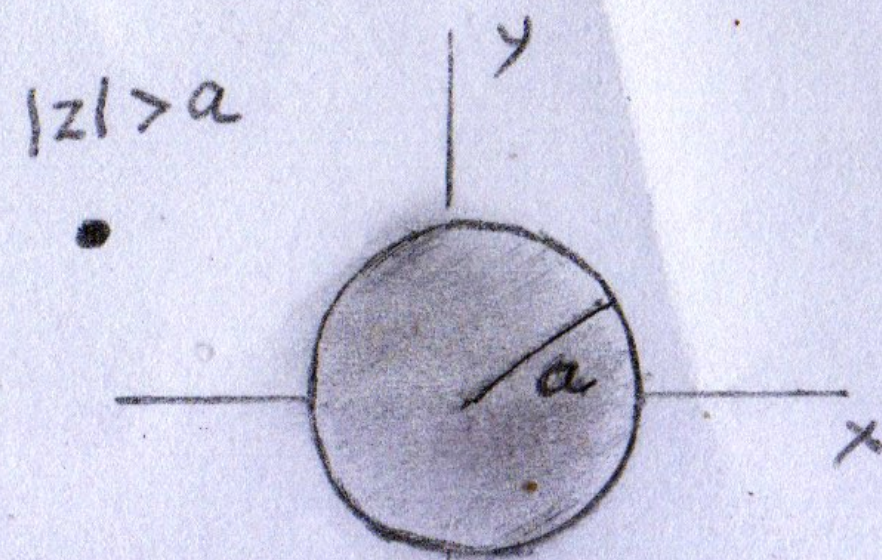
- Flujos planos ( $u_{x,y}(x, y) = 0$ ), incompresibles ( $\frac{d\rho}{dt} = 0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$ ) e irrotacionales ( $\underline{\nabla} \times \underline{u} = 0$ ).
- Función potencial: singularidades de  $\underline{\nabla} \times \underline{u}$  (**vórtices**)  $\gg \gg \phi(x, y)$  multivaluada
- Función corriente: singularidades de  $\underline{\nabla} \cdot \underline{u}$  (**fuentes**)  $\gg \gg \psi(x, y)$  multivaluada
- Potencial complejo:  $W(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y) \quad z = x + iy$
- Flujos simples: uniforme, fuente (sumidero), vórtice, punto de estancamiento.
- Método de imágenes.

# Teorema del círculo (Milne-Thomson, 1940)

Sea un flujo con potencial complejo  $W = W_0(z)$  con singularidades en  $|z| > a$ . Entonces,  $W = W_0(z) + W_0^*\left(\frac{a^2}{z^*}\right)$  es el potencial complejo con las mismas singularidades que  $W_0$  en  $|z| > a$  y con  $|z| = a$  como línea de corriente.

## Demostración

(i) Sing. de  $W_0(z)$  en  $|z| > a$  (fuera del círculo)



↓  
Sing. de  $W_0\left(\frac{a^2}{z^*}\right)$  en  $\left|\frac{a^2}{z^*}\right| > a \Rightarrow |z| < a$  (dentro del círculo).

Es decir que  $W_0^*\left(\frac{a^2}{z^*}\right)$  agrega singularidades (virtuales) dentro del círculo.

(ii) En  $|z| = a \Rightarrow z z^* = a^2 \Rightarrow \frac{a^2}{z^*} = z$

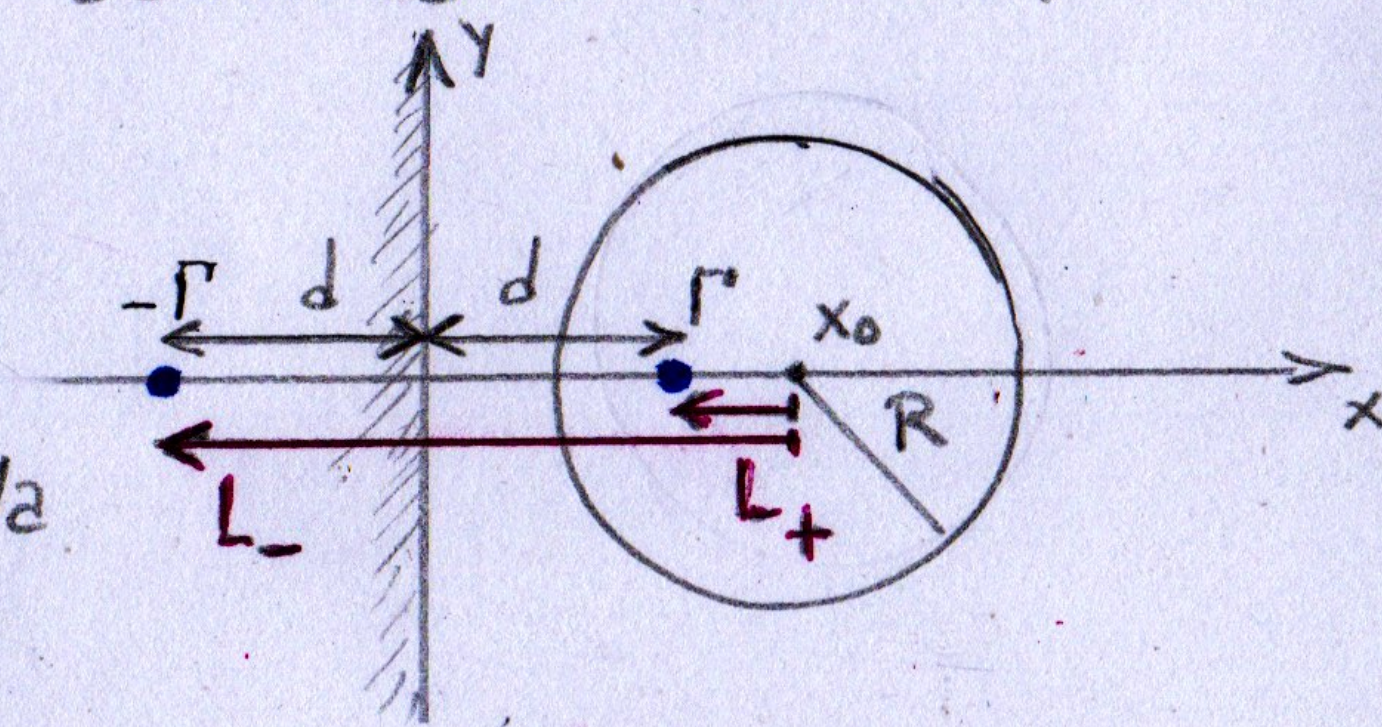
Entonces  $W(|z|=a) = W_0(z) + W_0^*(z) \in \mathbb{R}$

$\therefore \text{Im}[W(|z|=a)] = 0 = \text{cte} \Rightarrow |z|=a$  es una línea de corriente

NOTA: El teorema es compatible con el agregado de un vórtice  $\Gamma$  en el origen;  $W(z) = W_0(z) + W_0^*\left(\frac{a^2}{z^*}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$

Veamos que con el ejemplo anterior y un poco de ingenio, pudimos haber deducido el teorema.

• El problema original es un vórtice  $\Gamma$  a distancia  $d$  de la pared.



• La circunferencia centrada en  $x_0$  de radio  $R$  es una línea de corriente.

• Y si colocamos un círculo de radio  $R$  y centro  $x_0$  frente a un vórtice  $-\Gamma$  a distancia  $L_-$ ?

• Se requiere un vórtice virtual  $+\Gamma$  a distancia  $L_+$

$$L_{\pm} = x_0 \mp d \xrightarrow{\text{ejercicio}} L_+ \cdot L_- = R^2 \rightarrow L_+ = \frac{R^2}{L_-}$$

# Flujo alrededor de un cilindro

Sea un flujo horizontal y uniforme  $u_0$  sobre un círculo de radio  $a$

$$W_0(z) = u_0 z \Rightarrow W = u_0 \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$$

Verifiquen que

$$\psi = 0 \text{ en } |z| = a$$

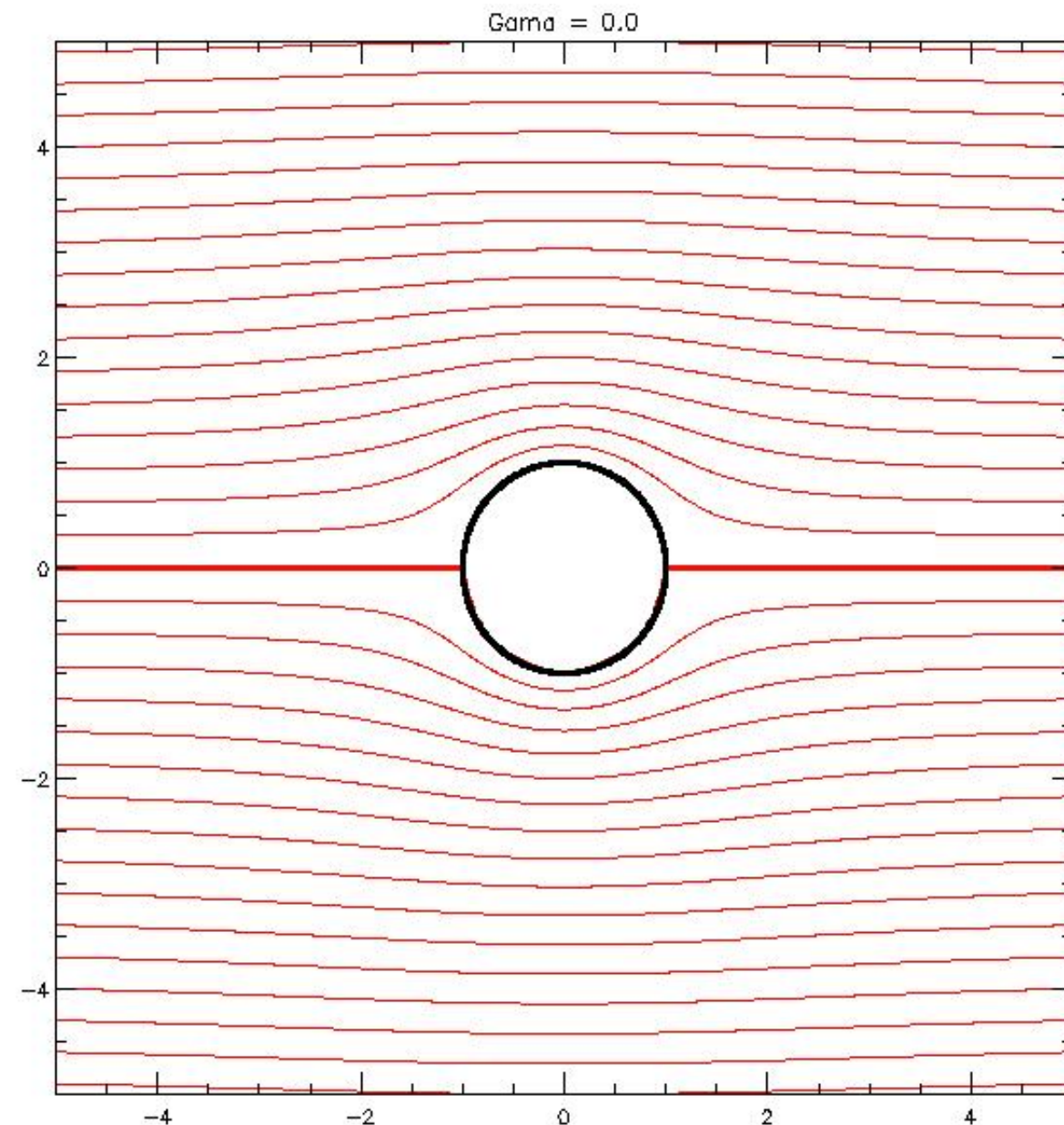
Noten que las líneas de corriente son simétricas respecto de  $x \leftrightarrow -x$  y también  $y \leftrightarrow -y$ .

Agregamos ahora un vórtice  $-\Gamma$  en el origen:

$$W(z) = u_0 z + u_0 \frac{a^2}{z} + \frac{-\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

$$\psi = \text{Im}(W) = u_0 y - \frac{u_0 a^2 y}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

Utilizamos las constantes  $u_0$  y  $a$  para adimensionalizar el problema.



$$\left. \begin{array}{l} \psi \rightarrow u_0 a \psi \\ (x, y) \rightarrow a(x, y) \end{array} \right\} \Rightarrow \psi(x, y) = y \left( 1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) + \gamma \ln(x^2 + y^2)$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{4\pi u_0 a}$$

Noten que la versión adimensional ya no depende de  $u_0, \Gamma, a$  sino solamente de  $\gamma$ .

El vórtice rompe la simetría  $y \leftrightarrow -y$ . Busquemos puntos de estancamiento sobre  $|z| = a$ , donde se insertan líneas de corriente que

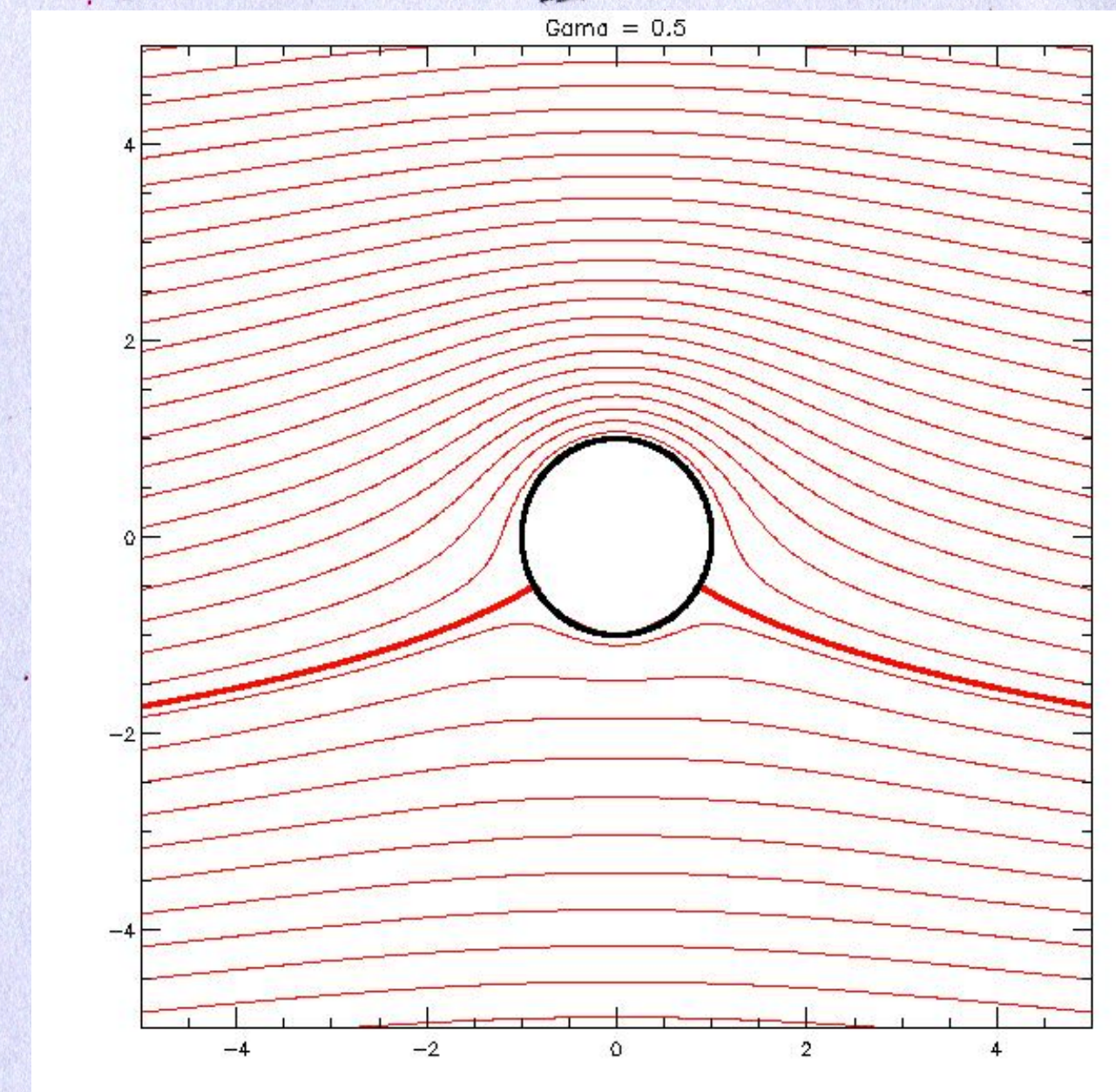
llamamos separatrices.

$$\text{En polares: } \begin{cases} u_\theta = \partial_r \psi \\ u_r = \frac{1}{r} \partial_\theta \psi \end{cases}$$

$$\psi(r, \theta) = r \sin \theta \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) + 2\gamma \ln r$$

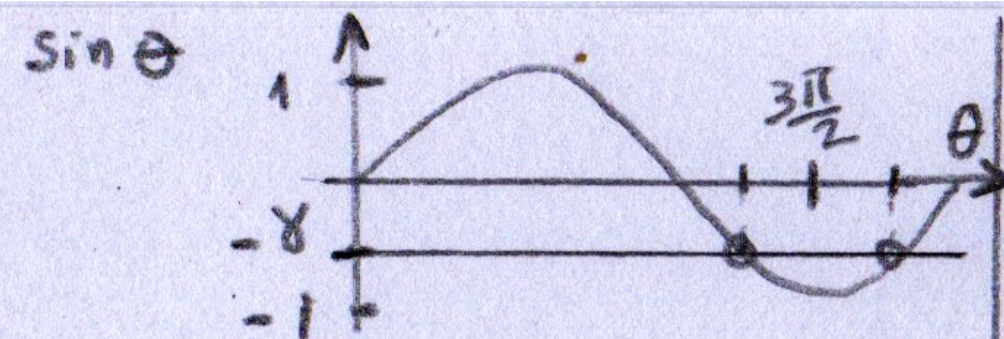
$$u_\theta(r=1) = 2 \sin \theta + 2\gamma = 0$$

$$\sin \theta = -\gamma \quad \text{Ptos. estanc. si } -1 < \gamma < 1$$



# Flujo alrededor de un cilindro

Noten que las soluciones de  $\sin \theta = -\gamma$  equidistan de  $\theta = \frac{3\pi}{2}$



Para  $\gamma \rightarrow 1$ , los dos puntos coinciden en  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ .

Para  $\gamma > 1$  ya no hay puntos de estancamiento sobre el perímetro. Busquemos pto. estancamiento fuera del círculo:

$$u_\theta = \partial_r \psi = \sin \theta \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2\gamma}{r} = 0$$

$$u_r = \frac{1}{r} \partial_\theta \psi = \cos \theta \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = 0 \rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

Para satisfacer  $u_\theta = 0$  debe ser  $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$  y

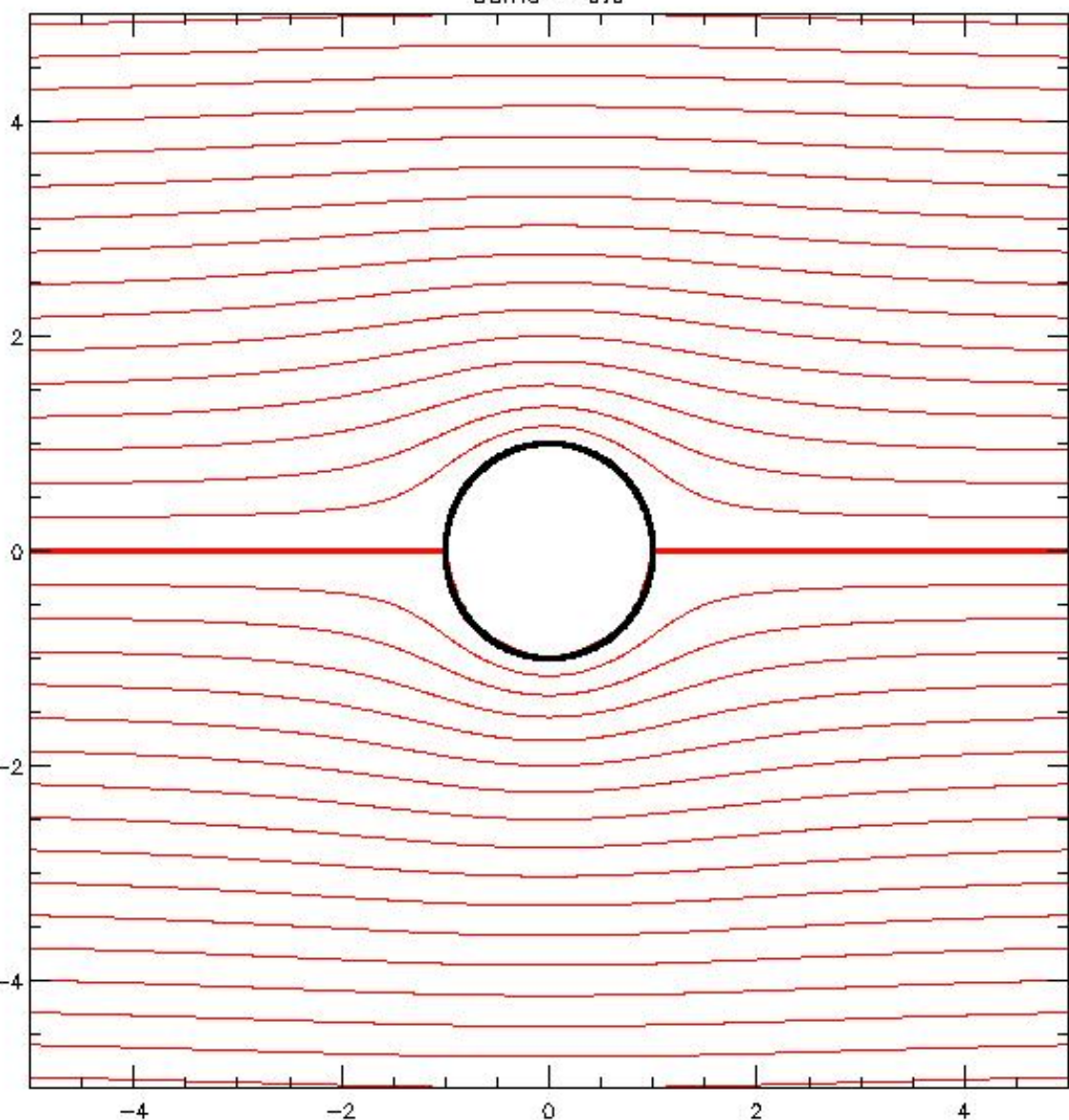
$$r^2 - 2\gamma r + 1 = 0 \rightarrow r_0 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

La solución  $r_-$  resulta  $r_- < 1$  si  $\gamma > 1$ .

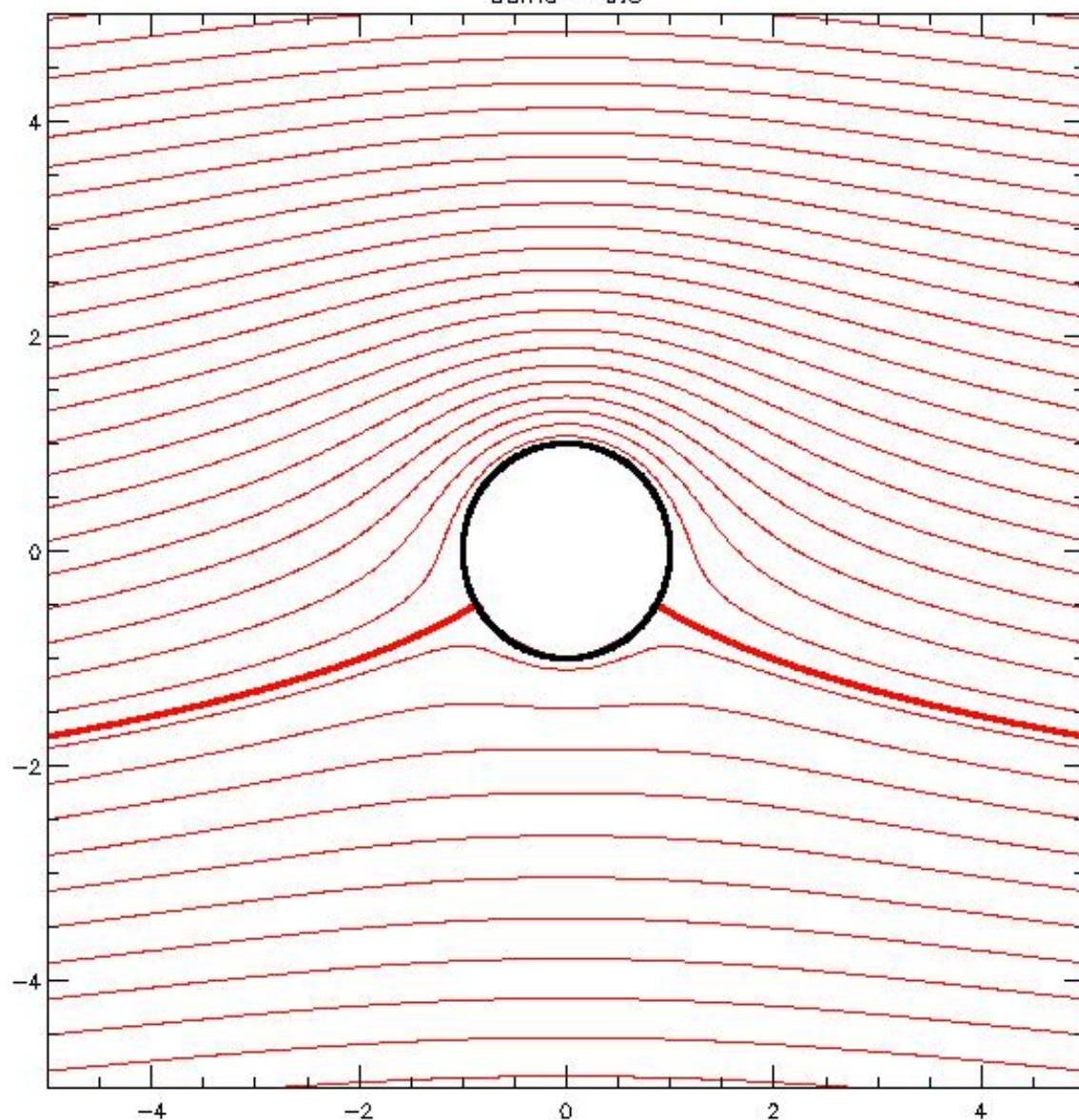
Entonces si  $\gamma > 1$  hay un único punto de estancamiento en  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  y  $r_0 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} > 1$ .

La separatriz tiene la forma de la figura, separando el flujo que evade al círculo por arriba y por abajo, pero también aislando un flujo estanco alrededor del círculo. Ejemplo:  $\gamma = 1.5 \rightarrow r_0 = 2.62$

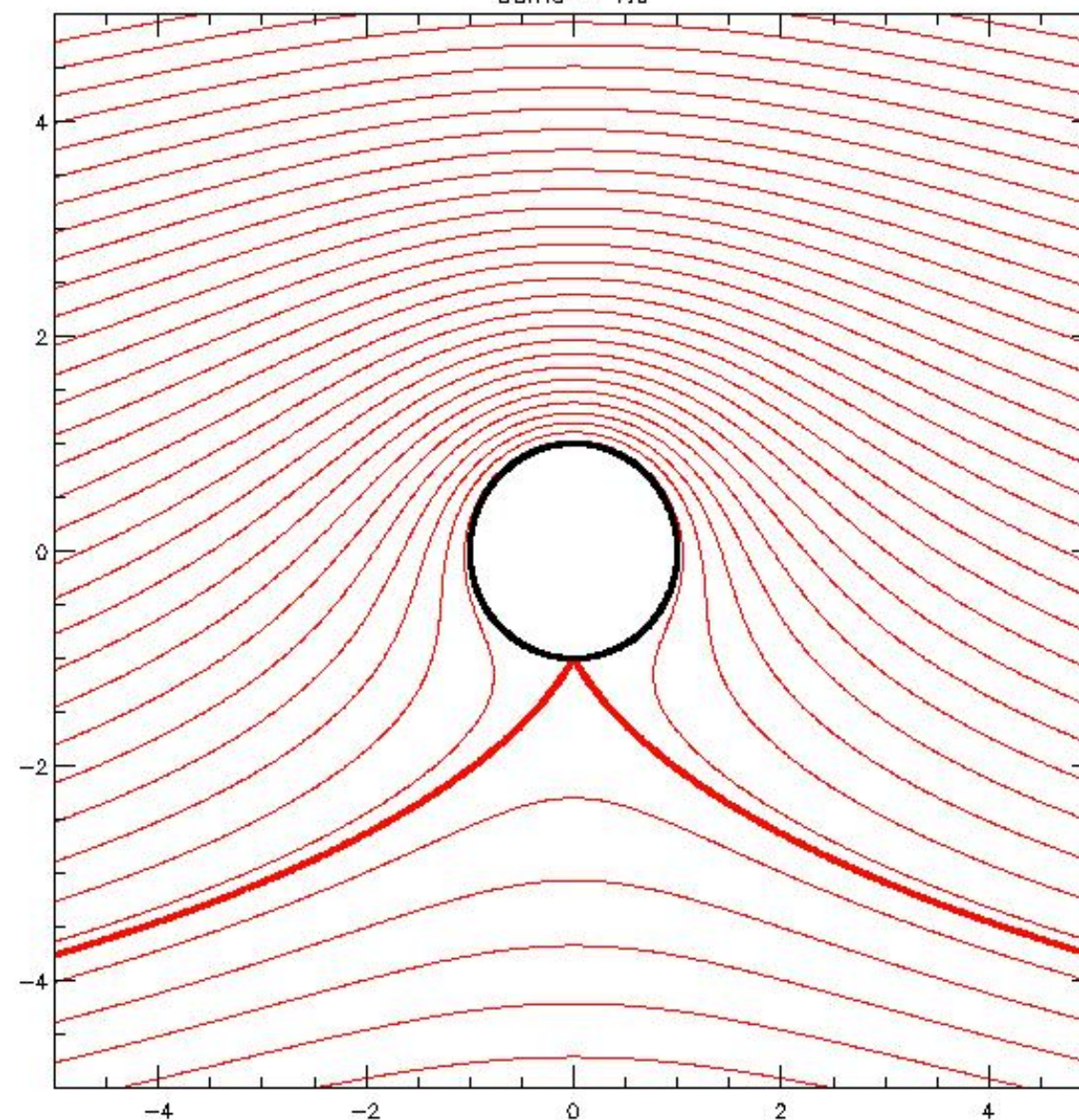
Gamma = 0.0



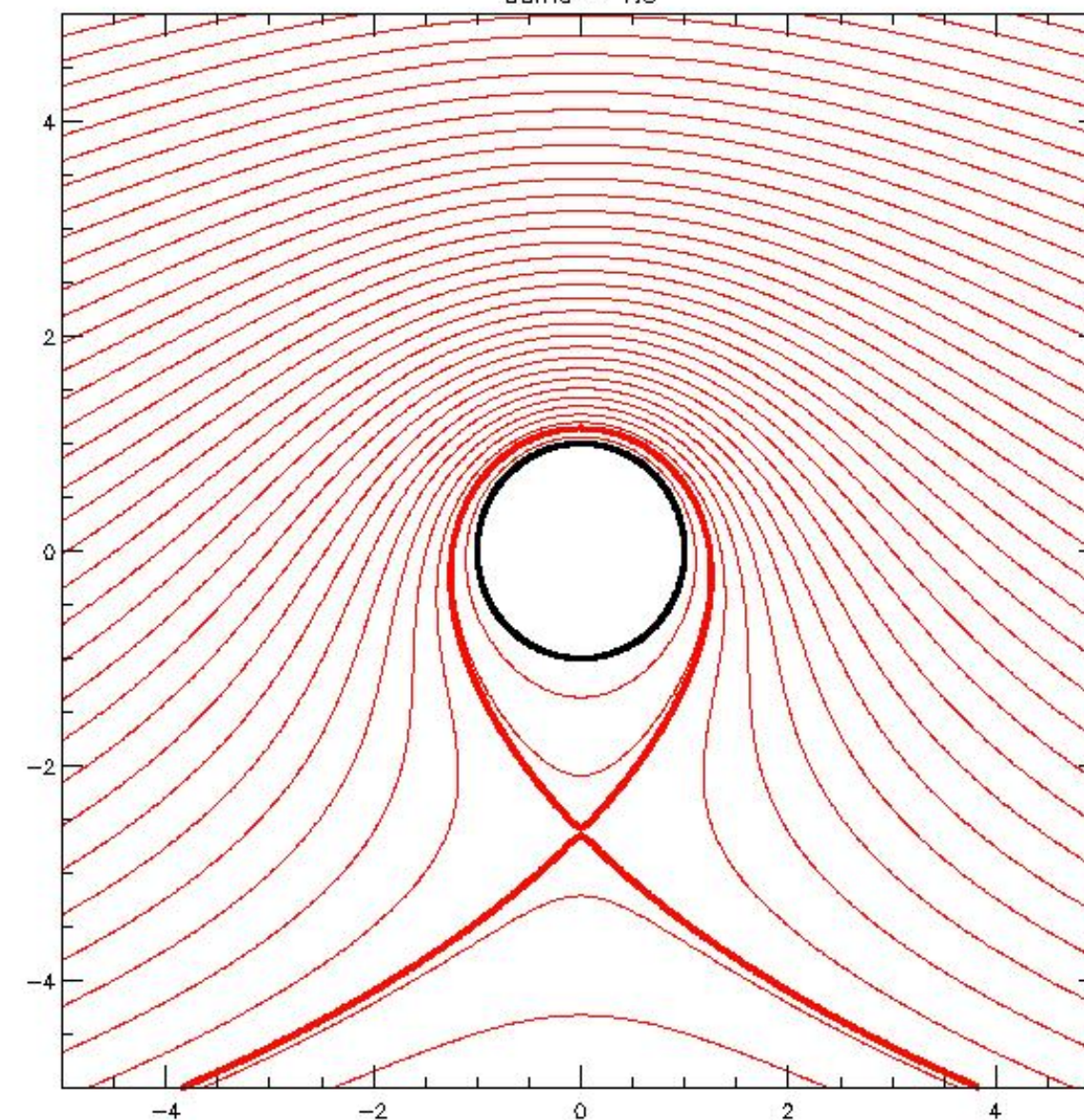
Gamma = 0.5



Gamma = 1.0



Gamma = 1.5



# Teorema de Blasius (1911)

Sea un flujo estacionario con potencial complejo  $W(z)$  alrededor de un sólido delimitado por la curva cerrada  $C$ . La fuerza

del fluido sobre el sólido resulta: 
$$F^* = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C dz \left( \frac{dW}{dz} \right)^2$$

## Demostración

La fuerza del fluido al sólido se ejerce a través de la pared y vale

$$\underline{F} = - \oint_C \rho \hat{n} ds$$

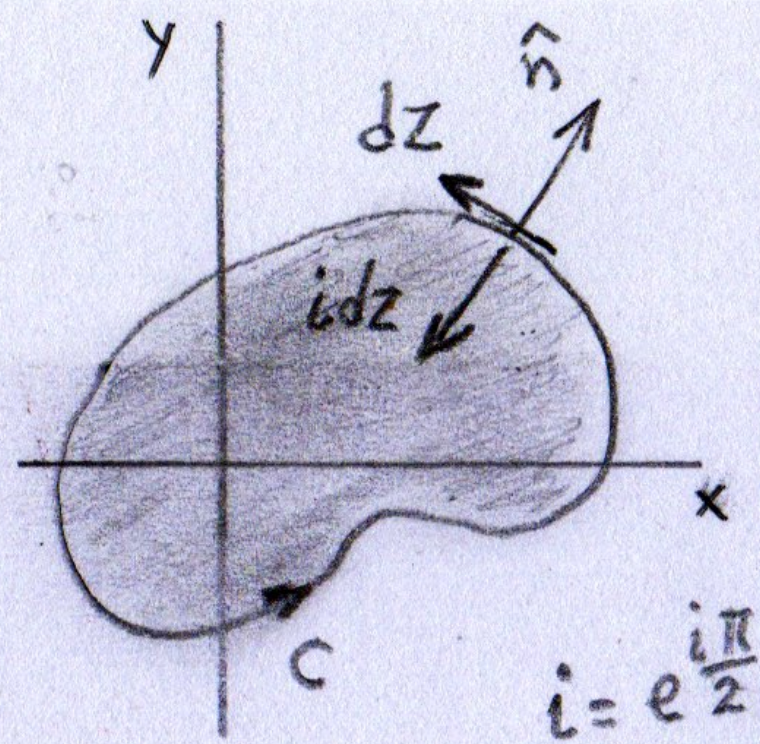
En notación compleja: 
$$\begin{cases} \hat{n} ds \rightarrow -i dz \\ \underline{F} \rightarrow \mathbb{F} = F_x + iF_y \end{cases}$$

Es decir que:

$$\mathbb{F} = F_x + iF_y = i \oint_C \rho dz \rightarrow \mathbb{F}^* = F_x - iF_y = -i \oint_C \rho dz^*$$

Por Bernoulli 2: 
$$\phi = \phi_0 - \frac{\rho u^2}{2} = \phi_0 - \frac{\rho}{2} \left| \frac{dW}{dz} \right|^2$$

$$\therefore F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz^* \quad (\text{porque } \oint_C \phi_0 dz = 0)$$



Se parece al resultado, pero no es.

Como sobre  $C$  es  $\text{Im}(W) = \text{cte} \rightarrow \text{Im}(dW) = 0$

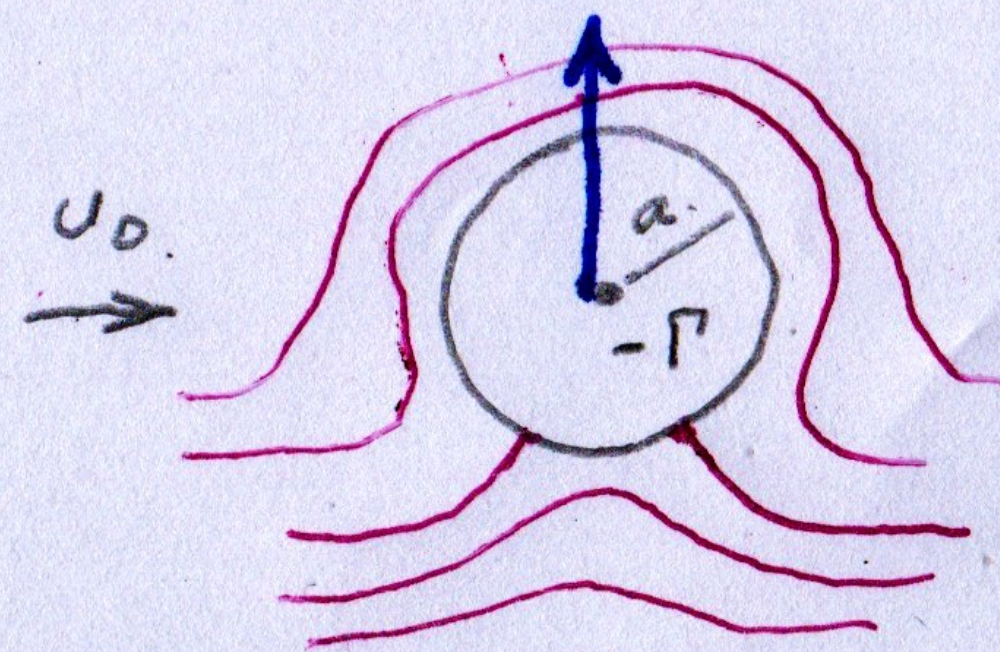
Sobre  $C$  es  $dW = dW^* \rightarrow \frac{dW}{dz} dz = \left( \frac{dW}{dz} dz \right)^* = \left( \frac{dW}{dz} \right)^* dz^*$

Entonces  $\left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz^* = \frac{dW}{dz} \left( \frac{dW}{dz} \right)^* dz^* = \left( \frac{dW}{dz} \right)^2 dz$  sobre  $C$

$$\therefore F^* = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C dz \left( \frac{dW}{dz} \right)^2$$

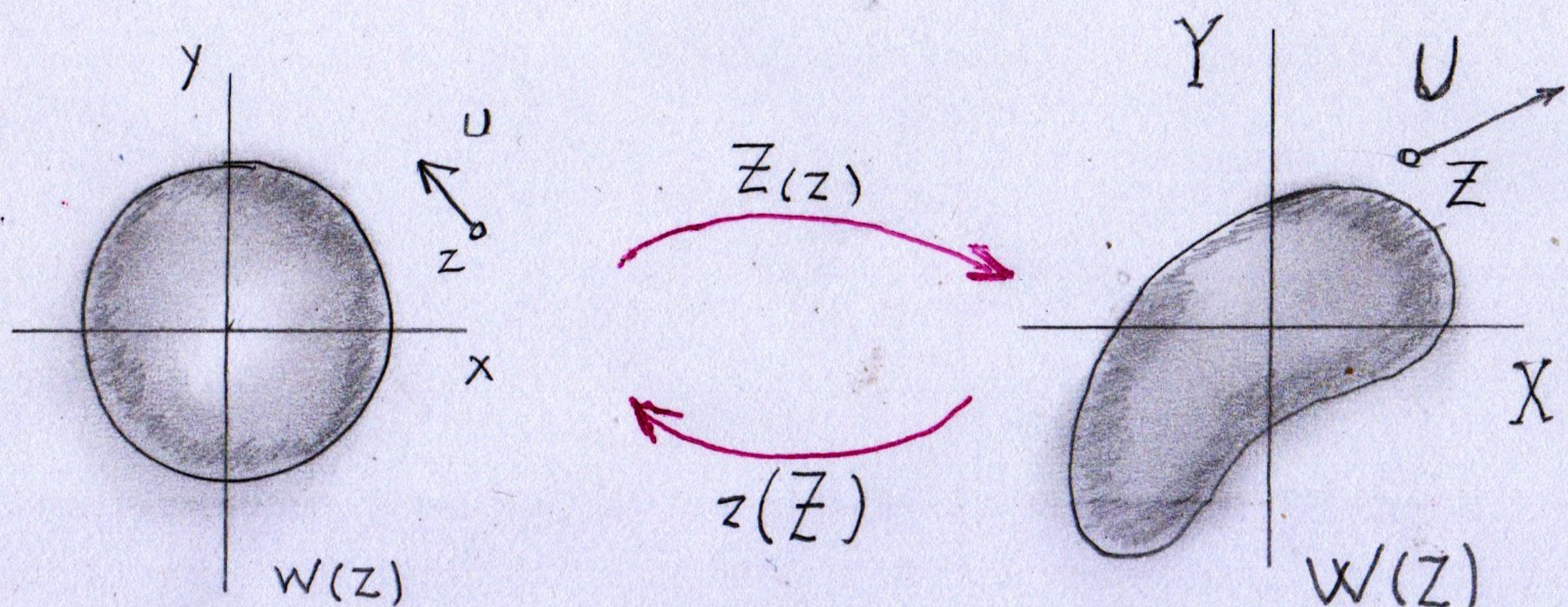
Ejercicio: Muestren que la fuerza de un flujo  $u_0 \hat{x}$  sobre un círculo de radio  $a$  con vórtice  $-\Gamma$  en el origen es

$$\underline{F} = \hat{y} \rho u_0 \Gamma$$



# Transformaciones conformes

Una transformación  $Z = Z(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se dice **conforme** si es **analítica** (desarrollable en Taylor), salvo en unos pocos puntos singulares.



Definimos  $W(Z)$  tq.  $W(Z) \equiv W(z(Z))$

Entonces

$$U^* = \frac{dW}{dZ} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dZ} \longrightarrow \frac{dW}{dZ} = \frac{dw/dz}{Z'(z)}$$

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{1}{Z'(z)}$$

Es decir que:

$$U_x - iU_y = \frac{u_x - iu_y}{Z'(z)}$$

## Teorema de Riemann

Todo contorno cerrado y derivable en el plano  $Z = X + iY$  puede mapearse en una circunferencia en  $z = x + iy$  a través de alguna transf. conforme  $z(Z)$ .

NOTA: Las transf. conformes conservan los ángulos, para todo  $z_0$  tq.  $Z'(z_0) \neq 0$ .

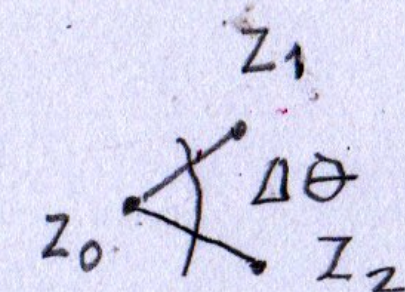
$Z(z)$  analítica:

$$Z - Z_0 \approx Z'(z_0)(z - z_0) + \dots$$

Para todo par  $z_1, z_2$  próximo a  $z_0$ :

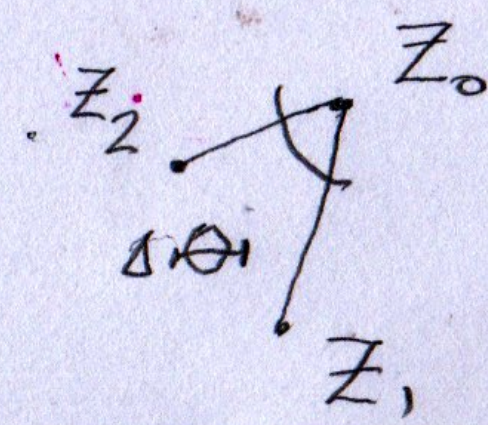
$$\frac{Z_1 - Z_0}{Z_2 - Z_0} = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \quad \text{si } Z'(z) \neq 0$$

$$e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \longrightarrow \Delta\theta = \Delta\theta$$



(z)

$Z(z)$



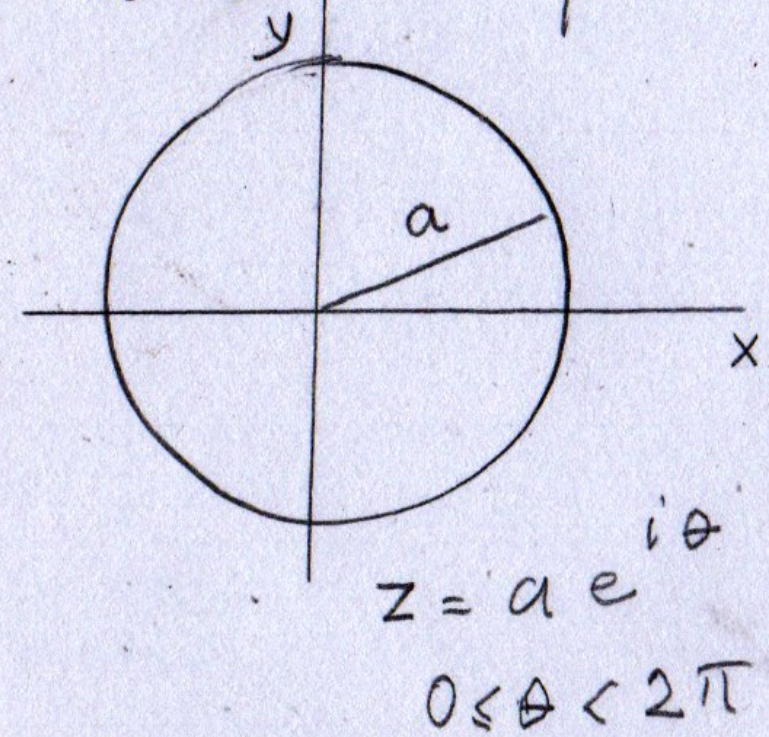
(Z)

# Transformación de Zhukovsky (1910)

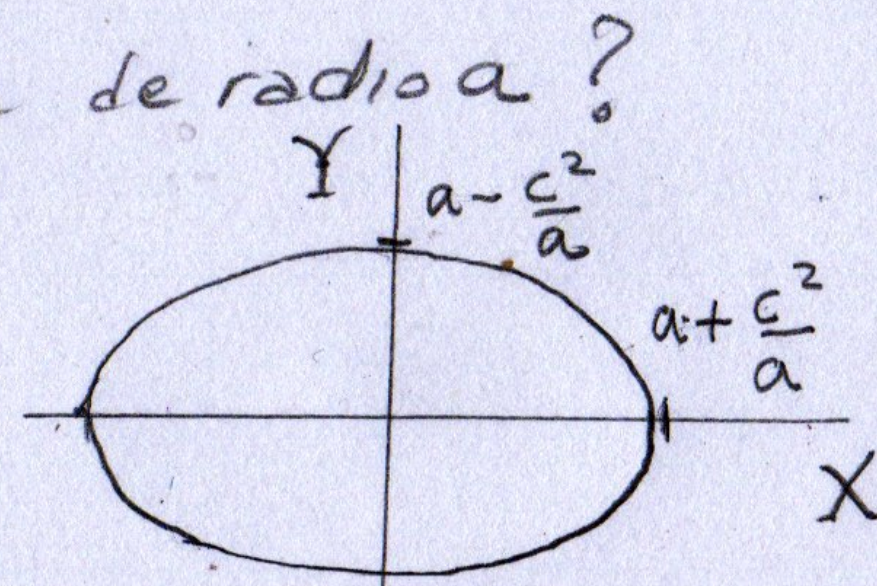
Estudiamos las transf. conformes

$$Z = z + \frac{c^2}{z} \quad c \in \mathbb{R}$$

Como se mapea una circunferencia de radio  $a$ ?



$$z = a e^{i\theta}$$

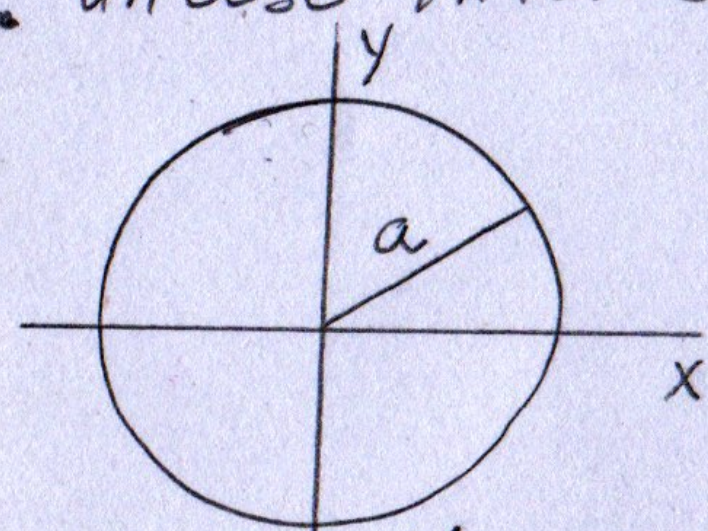


$$X = \text{Re} Z = \left(a + \frac{c^2}{a}\right) \cos \theta$$

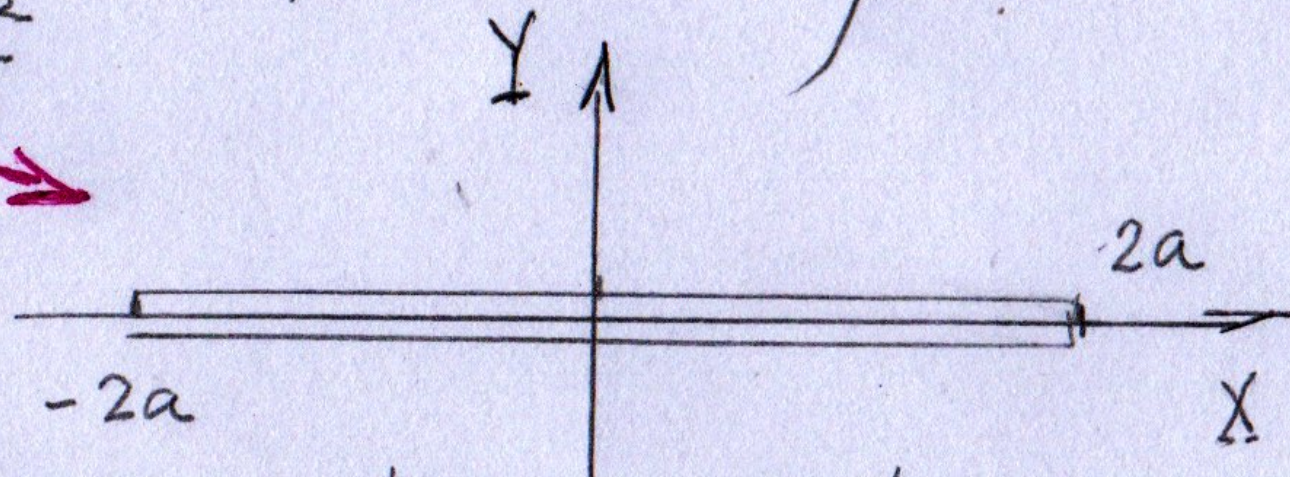
$$Y = \text{Im} Z = \left(a - \frac{c^2}{a}\right) \sin \theta$$

$$\frac{X^2}{\left(a + \frac{c^2}{a}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(a - \frac{c^2}{a}\right)^2} = 1$$

- Se mapea en elipses con mayor o menor elongación, según el valor del parámetro  $c$  de la transformación.
- Un caso interesante es la transf. Zhukovsky con  $c=a$ .



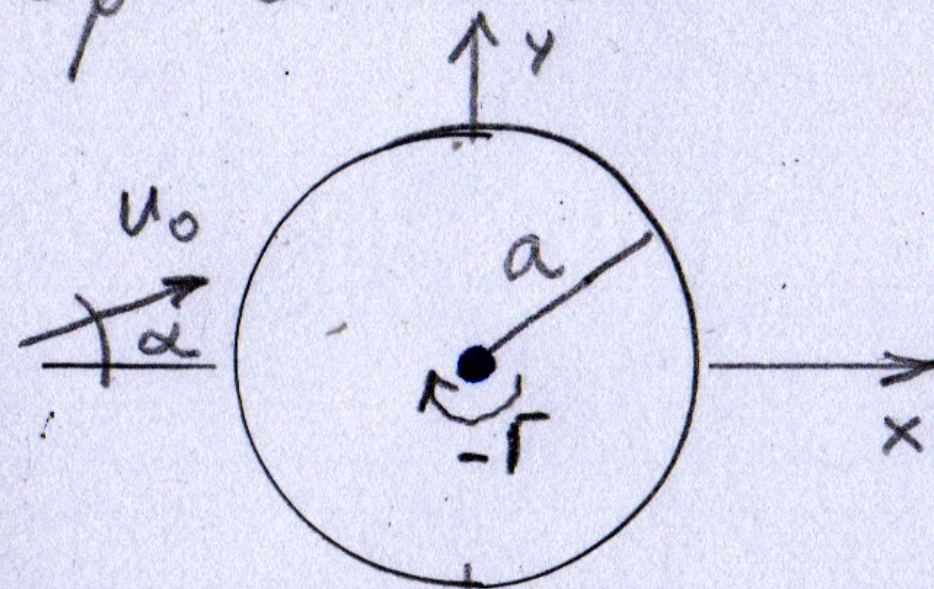
$$Z = z + \frac{a^2}{z}$$



Vamos a suponer que el nuevo contorno corresponde a un corte de un ala plana de avión.

Ejemplo: Ala plana de avión (avión de papel)

Planteamos un flujo uniforme incidido sobre un círculo con un vórtice en el origen. Y luego aplicamos Zhukovsky con  $c=a$



$\alpha$ : ángulo de ataque

$$w(z) = u_0 \left( z e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

Si transformamos Zhukovsky

con  $c=a$ , el campo de velocidades transformado:

$$U_x - iU_y = \frac{dW}{dZ} = \frac{dw/dz}{Z'(z)} = \frac{u_0 \left( e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{z^2} e^{i\alpha} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}}{1 - \frac{a^2}{z^2}}$$

Si calculamos la velocidad en el contorno del ala:

$$z = a e^{i\theta} \quad \left. \begin{array}{l} 0 \leq \theta < 2\pi \end{array} \right\} \rightarrow U_x - iU_y = \frac{u_0 \left( e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha-2\theta)} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$

# Ala plana de avión

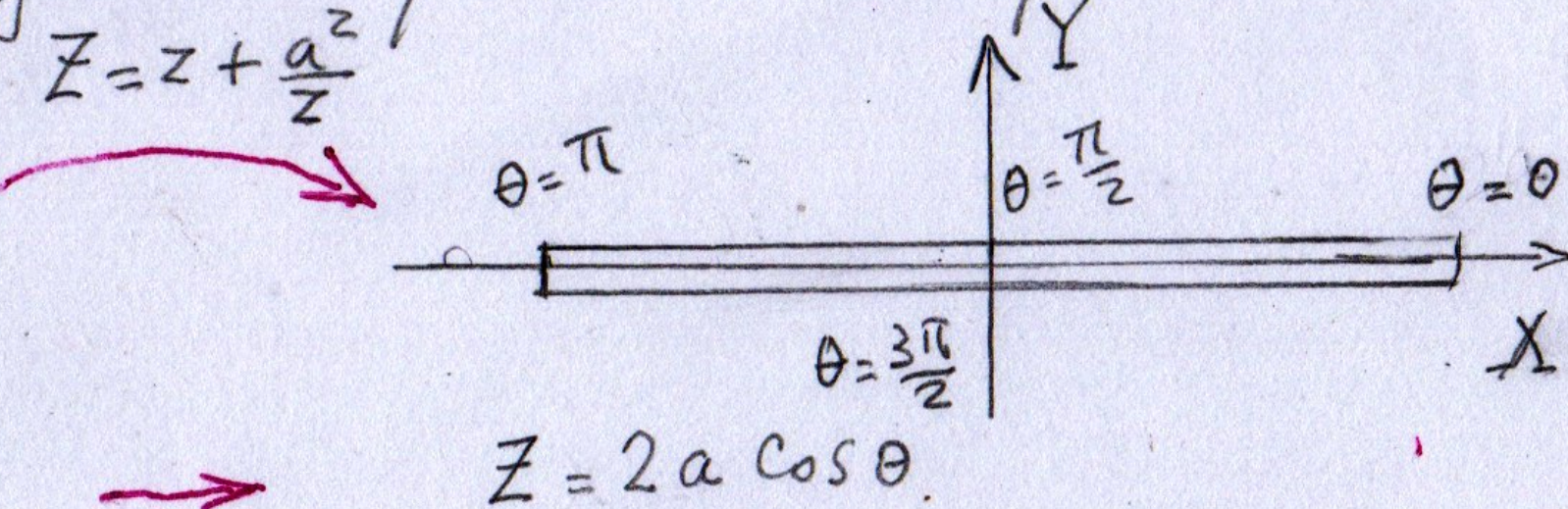
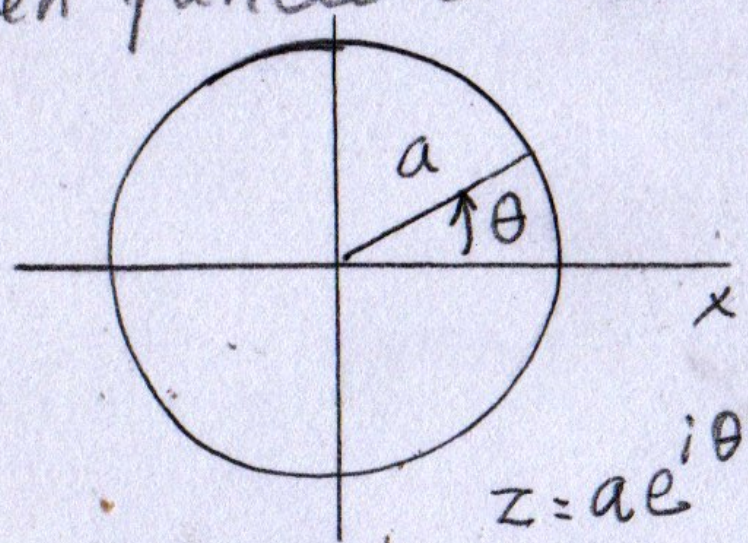
$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\rightarrow U_x - iU_y = \frac{U_0 \sin(\theta - \alpha) + \frac{\Gamma}{4\pi a}}{\sin \theta}$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{4\pi U_0 a}$$

$$\rightarrow U_x - iU_y = U_0 \frac{\sin(\theta - \alpha) + \gamma}{\sin \theta} \rightarrow \underline{U_y = 0}$$

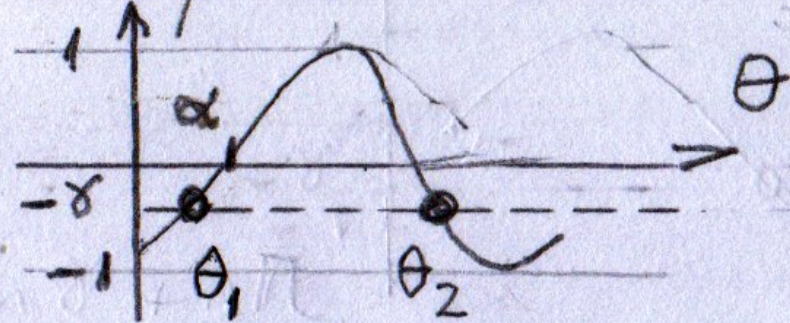
Obtenemos la velocidad en el contorno transformado, en función del ángulo de polares en el plano  $Z$ .



Los puntos de estancamiento cumplen

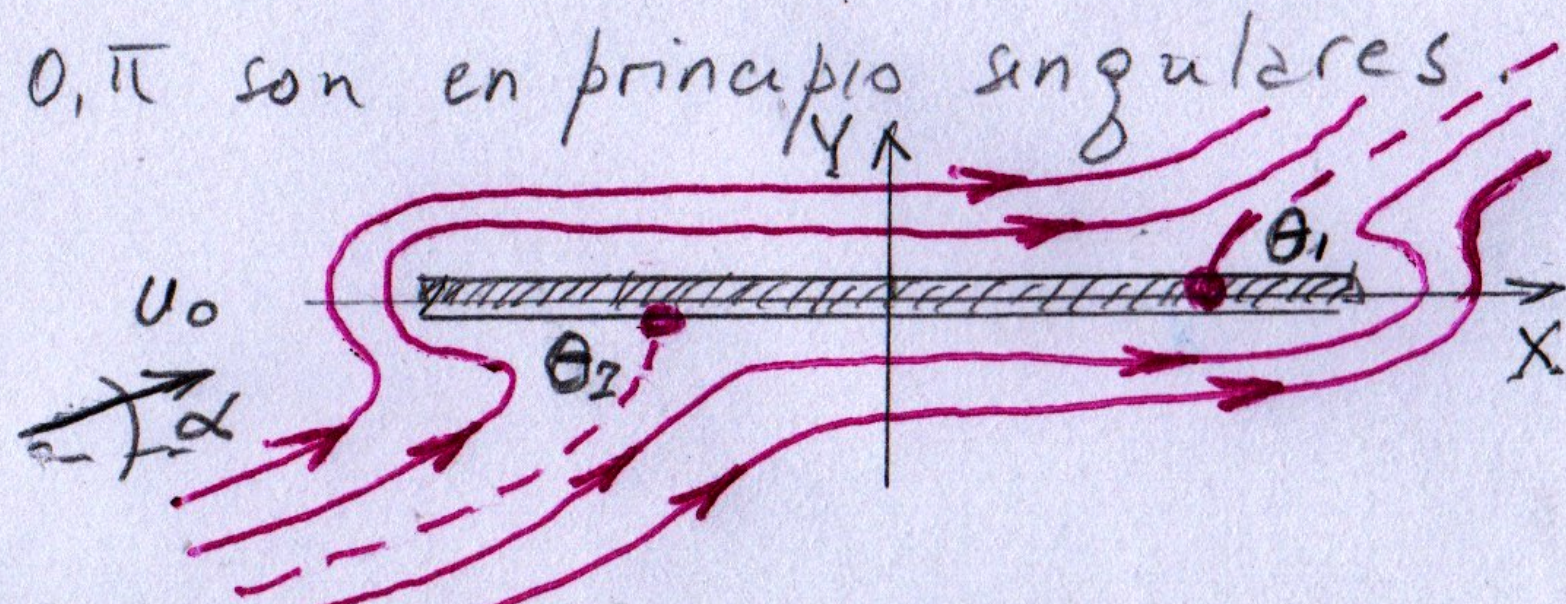
$$U_x = 0 \rightarrow \sin(\theta - \alpha) = -\gamma$$

$$\therefore \theta = \alpha - \arcsin \gamma + n\pi$$

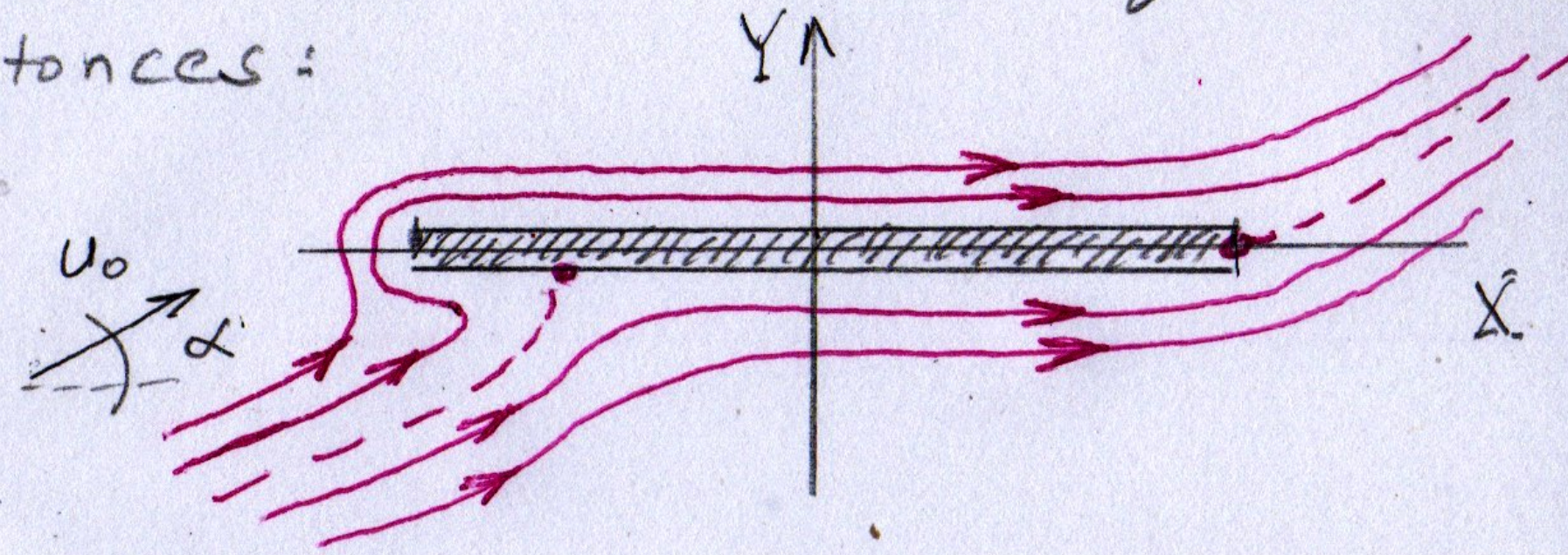


Los puntos  $\theta = 0, \pi$  son en principio singulares

Las líneas de corriente son



Ejercicio: Mostrar que existe un valor del ángulo de ataque  $\alpha$  para el cual se evita la singularidad en  $\theta = 0$  y entonces:



$$\gamma = \sin \alpha = \frac{\Gamma}{4\pi U_0 a}$$

Podemos usar Blasius para obtener la fuerza de sustentación sobre el ala plana:

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dW}{dZ}\right)^2 dZ = \frac{i\rho}{2} \oint \frac{(dw/dz)^2}{Z'^2} Z' dz$$

Aplicando el Teorema de los Residuos  $\left( \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}\{f, z_k\} \right)$  obtenemos

$$F = F_x - iF_y = \rho U_0 \Gamma e^{-i(\alpha + \frac{\pi}{2})}$$

