

Repaso de Clase 6

- Flujos planos ($u_{x,y}(x, y) = 0$), incompresibles ($\frac{d\rho}{dt} = 0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$) e irrotacionales ($\underline{\nabla} \times \underline{u} = 0$).
- Potencial complejo: $W(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y) \quad z = x + iy$
- Flujos simples: uniforme, fuente (sumidero), vórtice, punto de estancamiento.
- Método de imágenes.
- Teorema del círculo (Milne-Thomson, 1940)
- ‘ Flujo alrededor de un cilindro. Agregado de vórtice virtual en el centro.

Teorema de Blasius (1911)

Sea un flujo estacionario con potencial complejo $W(z)$ alrededor de un sólido delimitado por la curva cerrada C . La fuerza del fluido sobre el sólido resulta:

$$F^* = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C dz \left(\frac{dW}{dz} \right)^2$$

Demostración

La fuerza del fluido al sólido se ejerce a través de la pared y vale

$$\underline{F} = - \oint_C \rho \hat{n} ds$$

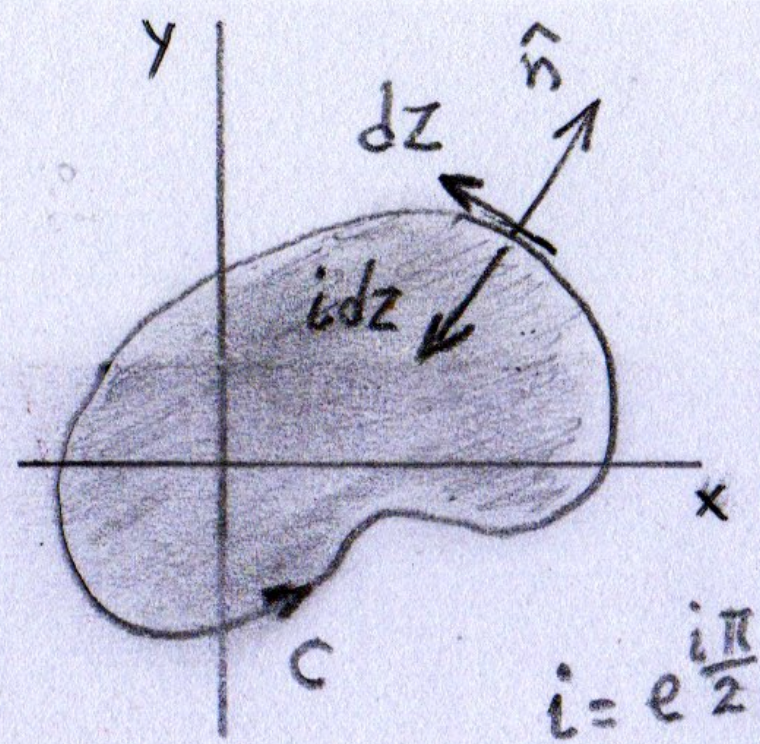
En notación compleja: $\begin{cases} \hat{n} ds \rightarrow -idz \\ \underline{F} \rightarrow \mathbb{F} = F_x + iF_y \end{cases}$

Es decir que:

$$\mathbb{F} = F_x + iF_y = i \oint_C \rho dz \rightarrow \mathbb{F}^* = F_x - iF_y = -i \oint_C \rho dz^*$$

Por Bernoulli 2: $\phi = \phi_0 - \frac{\rho u^2}{2} = \phi_0 - \frac{\rho}{2} \left| \frac{dW}{dz} \right|^2$

$$\therefore F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz^* \quad (\text{porque } \oint_C \phi_0 dz = 0)$$



Se parece al resultado, pero no es.

Como sobre C es $\text{Im}(W) = \text{cte} \rightarrow \text{Im}(dW) = 0$

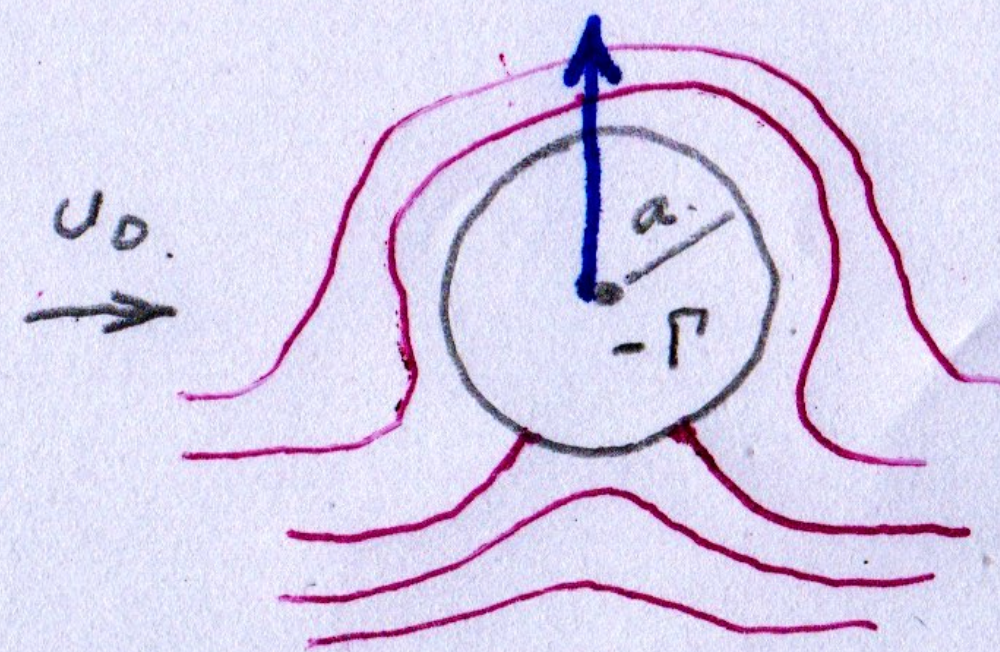
Sobre C es $dW = dW^* \rightarrow \frac{dW}{dz} dz = \left(\frac{dW}{dz} dz \right)^* = \left(\frac{dW}{dz} \right)^* dz^*$

Entonces $\left| \frac{dW}{dz} \right|^2 dz^* = \frac{dW}{dz} \left(\frac{dW}{dz} \right)^* dz^* = \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz$ sobre C

$$\therefore F^* = F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint_C dz \left(\frac{dW}{dz} \right)^2$$

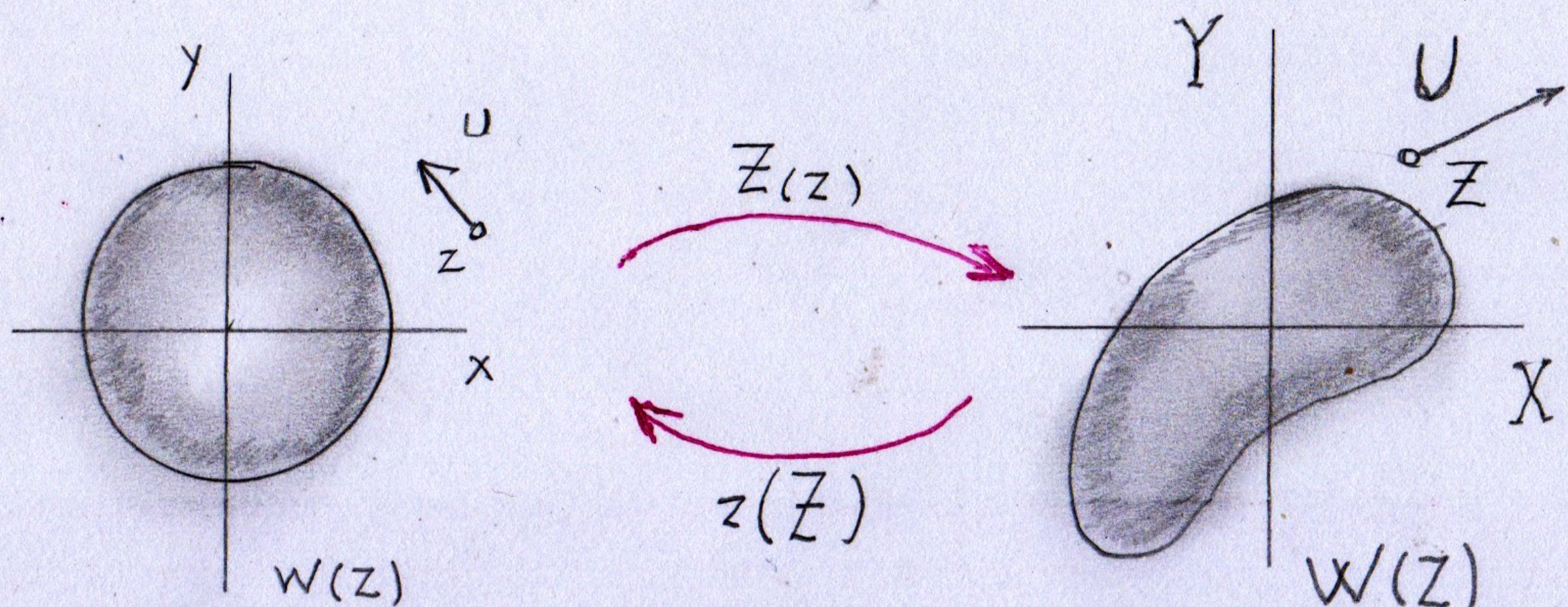
Ejercicio: Muestren que la fuerza de un flujo $u_0 \hat{x}$ sobre un círculo de radio a con vórtice $-\Gamma$ en el origen es

$$\underline{F} = \hat{y} \rho u_0 \Gamma$$



Transformaciones conformes

Una transformación $Z = Z(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice **conforme** si es **analítica** (desarrollable en Taylor), salvo en unos pocos puntos singulares.



Definimos $W(Z)$ tq. $W(Z) \equiv w(z(Z))$

Entonces

$$U^* = \frac{dW}{dZ} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dZ} \longrightarrow \frac{dW}{dZ} = \frac{dw/dz}{Z'(z)}$$

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{1}{Z'(z)}$$

Es decir que:

$$U_x - iU_y = \frac{u_x - iu_y}{Z'(z)}$$

Teorema de Riemann

Todo contorno cerrado y derivable en el plano $Z = X + iY$ puede mapearse en una circunferencia en $z = x + iy$ a través de alguna transf. conforme $z(Z)$.

NOTA: Las transf. conformes conservan los ángulos, para todo z_0 tq. $Z'(z_0) \neq 0$.

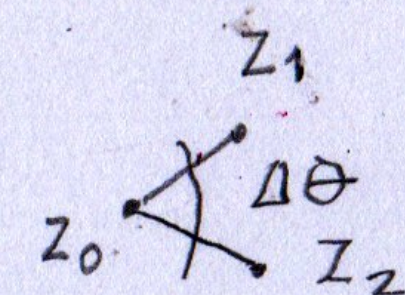
$Z(z)$ analítica:

$$Z - Z_0 \approx Z'(z_0)(z - z_0) + \dots$$

Para todo par z_1, z_2 próximo a z_0 :

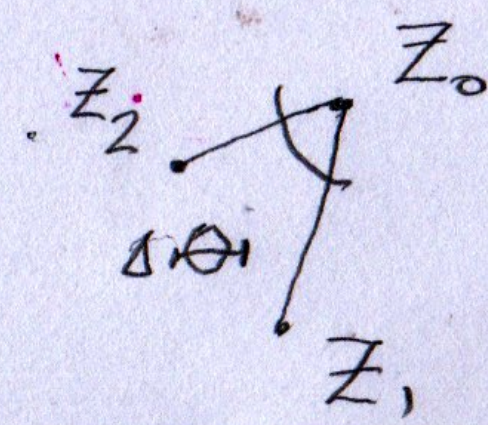
$$\frac{Z_1 - Z_0}{Z_2 - Z_0} = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \quad \text{si } Z'(z) \neq 0$$

$$e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \longrightarrow \Delta\theta = \Delta\theta$$



(z)

$Z(z)$



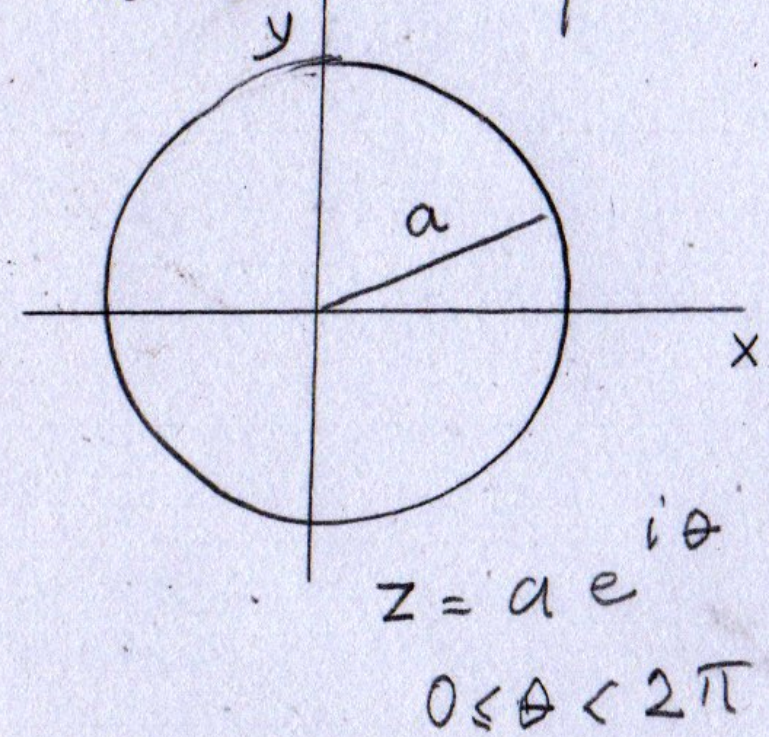
(Z)

Transformación de Zhukovsky (1910)

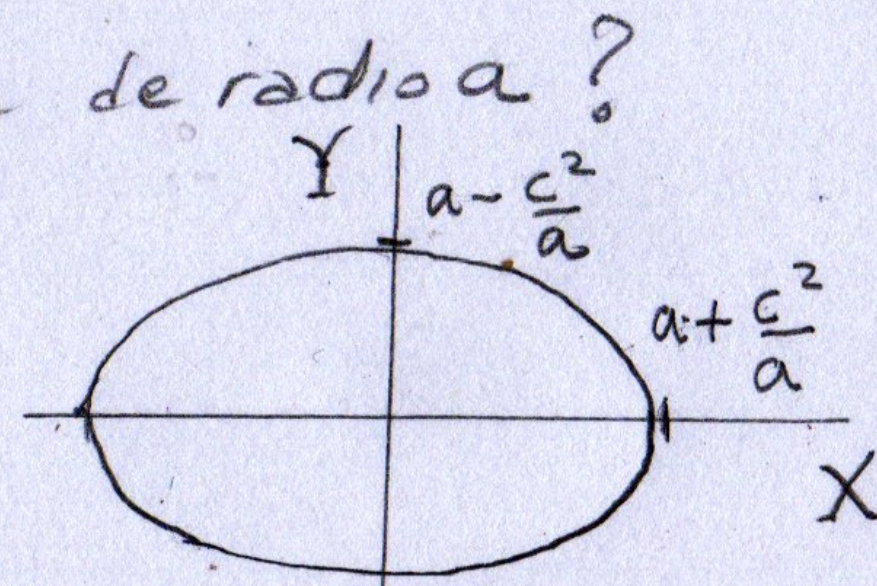
Estudiamos las transf. conformes

$$Z = z + \frac{c^2}{z} \quad c \in \mathbb{R}$$

Como se mapea una circunferencia de radio a ?



$$z = a e^{i\theta}$$

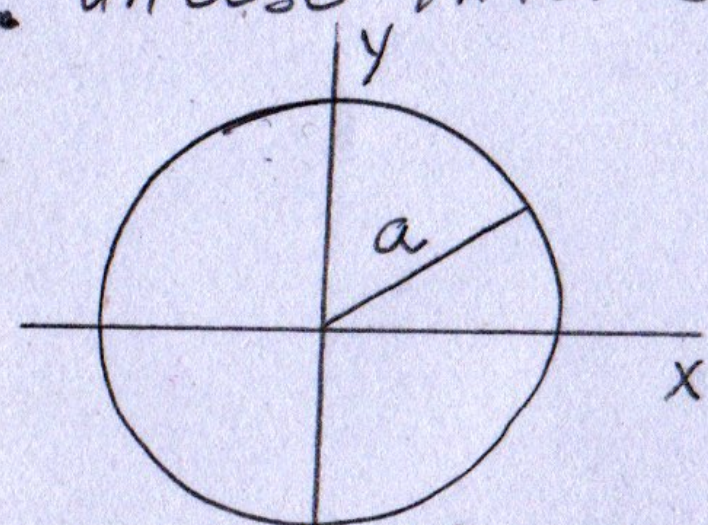


$$X = \operatorname{Re} Z = \left(a + \frac{c^2}{a}\right) \cos \theta$$

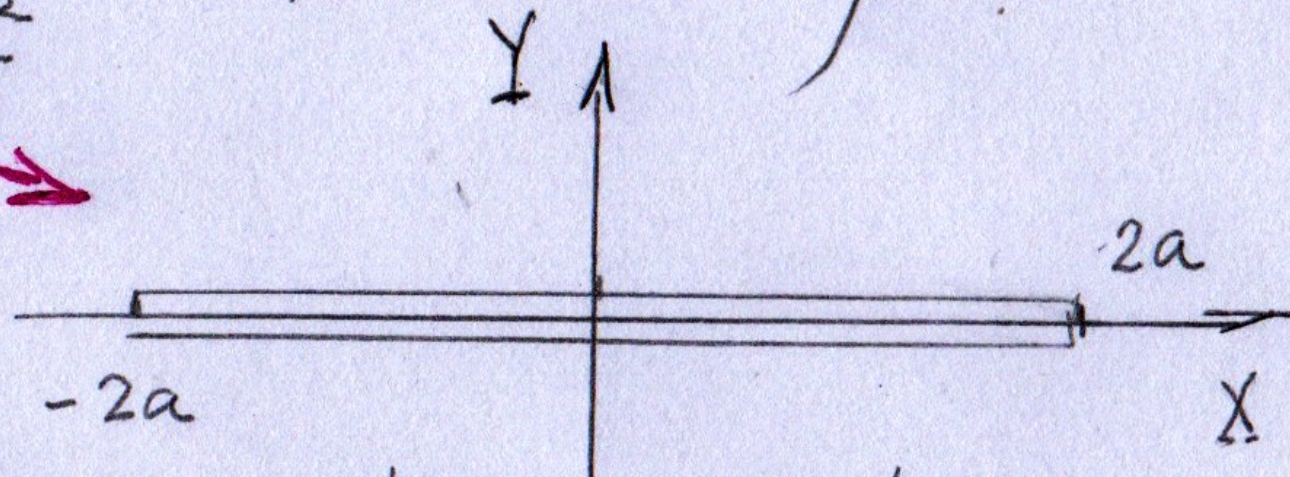
$$Y = \operatorname{Im} Z = \left(a - \frac{c^2}{a}\right) \sin \theta$$

$$\frac{X^2}{\left(a + \frac{c^2}{a}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(a - \frac{c^2}{a}\right)^2} = 1$$

- Se mapea en elipses con mayor o menor elongación, según el valor del parámetro c de la transformación.
- Un caso interesante es la transf. Zhukovsky con $c = a$.



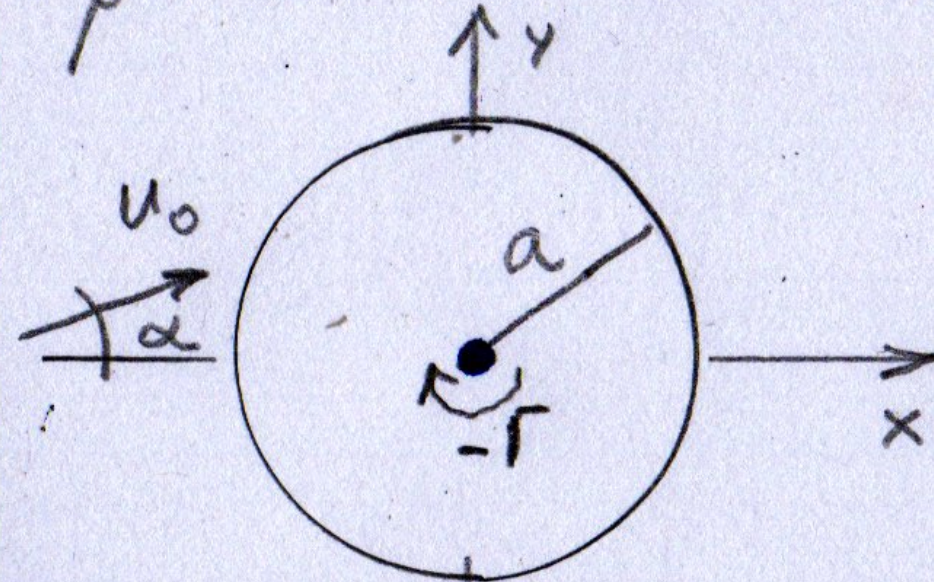
$$Z = z + \frac{a^2}{z}$$



Vamos a suponer que el nuevo contorno corresponde a un corte de un ala plana de avión.

Ejemplo: Ala plana de avión (avión de papel)

Planteamos un flujo uniforme incidido sobre un círculo con un vórtice en el origen. Y luego aplicamos Zhukovsky con $c = a$



α : ángulo de ataque

$$w(z) = u_0 \left(z e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

Si transformamos Zhukovsky

con $c = a$, el campo de velocidades transformado:

$$U_x - iU_y = \frac{dW}{dZ} = \frac{dw/dz}{Z'(z)} = \frac{u_0 \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{z^2} e^{i\alpha} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}}{1 - \frac{a^2}{z^2}}$$

Si calculamos la velocidad en el contorno del ala:

$$z = a e^{i\theta} \quad \left. \begin{array}{l} 0 \leq \theta < 2\pi \end{array} \right\} \rightarrow U_x - iU_y = \frac{u_0 \left(e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha-2\theta)} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$

$$U_x - iU_y = \frac{u_0 \left(e^{i(\theta-\alpha)} - e^{i(\alpha-\theta)} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi a}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$

Ala plana de avión

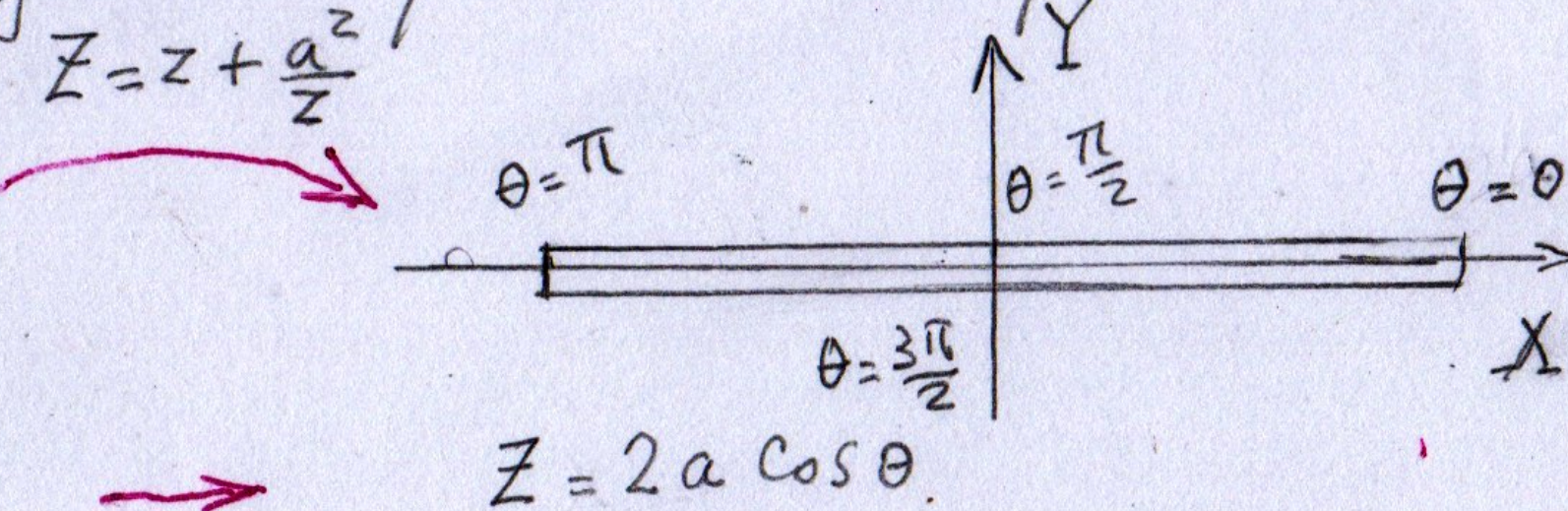
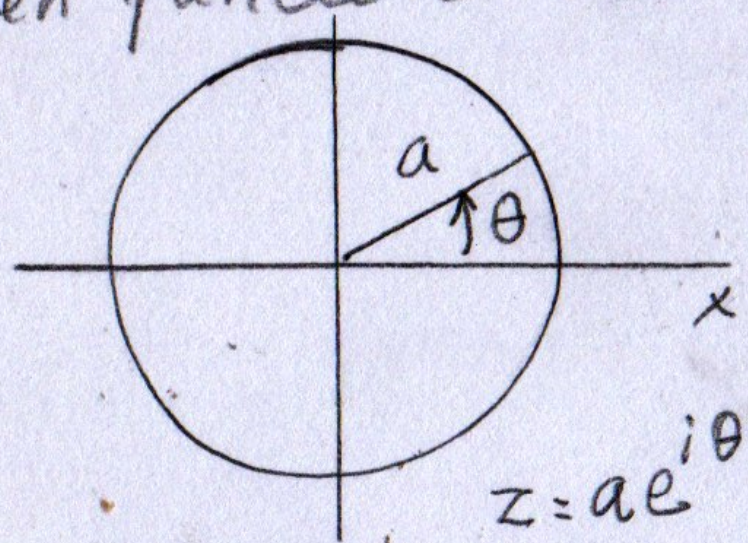
$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\rightarrow U_x - iU_y = \frac{U_0 \sin(\theta - \alpha) + \frac{\Gamma}{4\pi a}}{\sin \theta}$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{4\pi U_0 a}$$

$$\rightarrow U_x - iU_y = U_0 \frac{\sin(\theta - \alpha) + \gamma}{\sin \theta} \rightarrow \underline{U_y = 0}$$

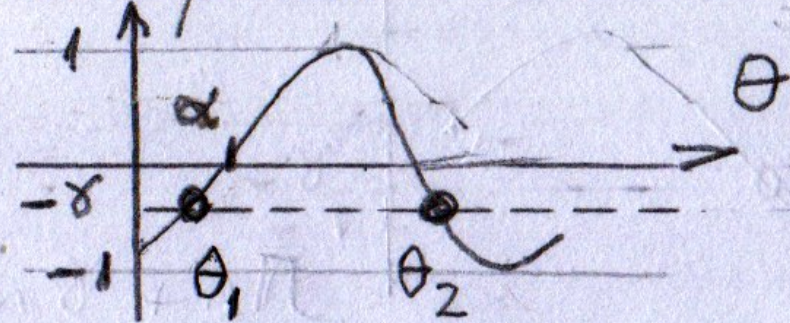
Obtenemos la velocidad en el contorno transformado, en función del ángulo de polares en el plano Z .



Los puntos de estancamiento cumplen

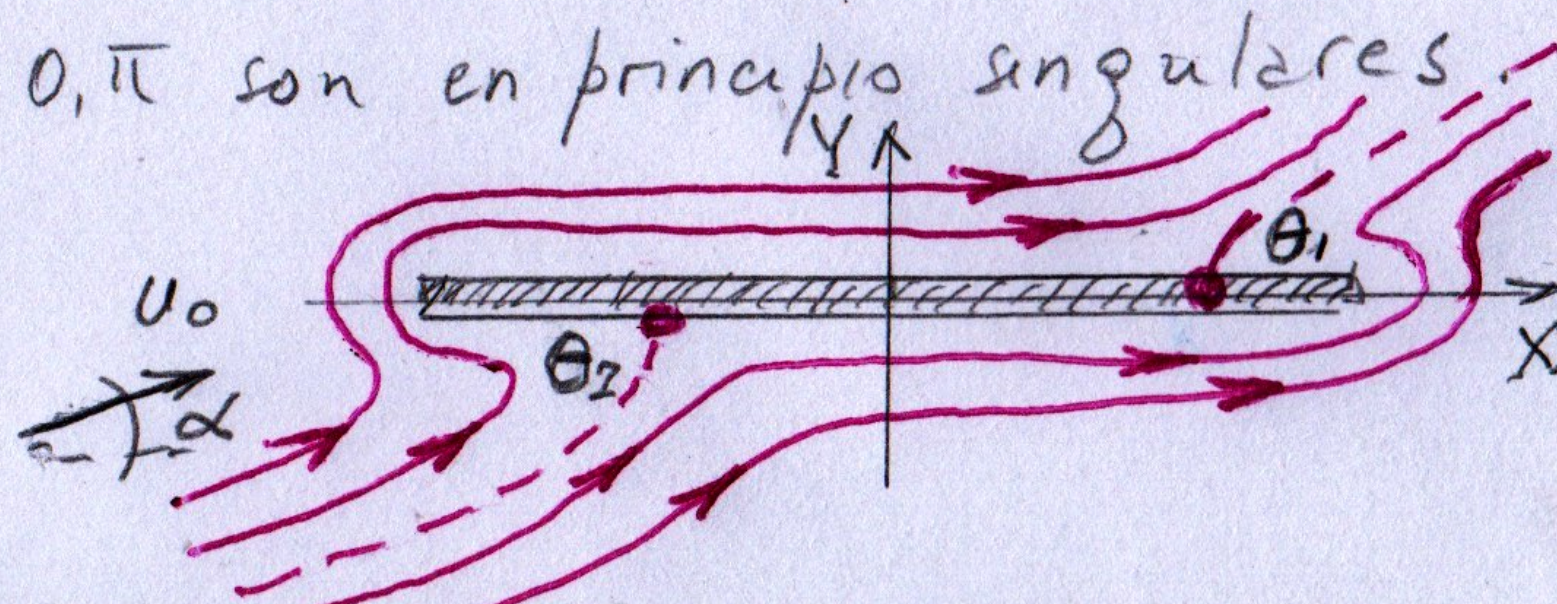
$$U_x = 0 \rightarrow \sin(\theta - \alpha) = -\gamma$$

$$\therefore \theta = \alpha - \arcsin \gamma + n\pi$$

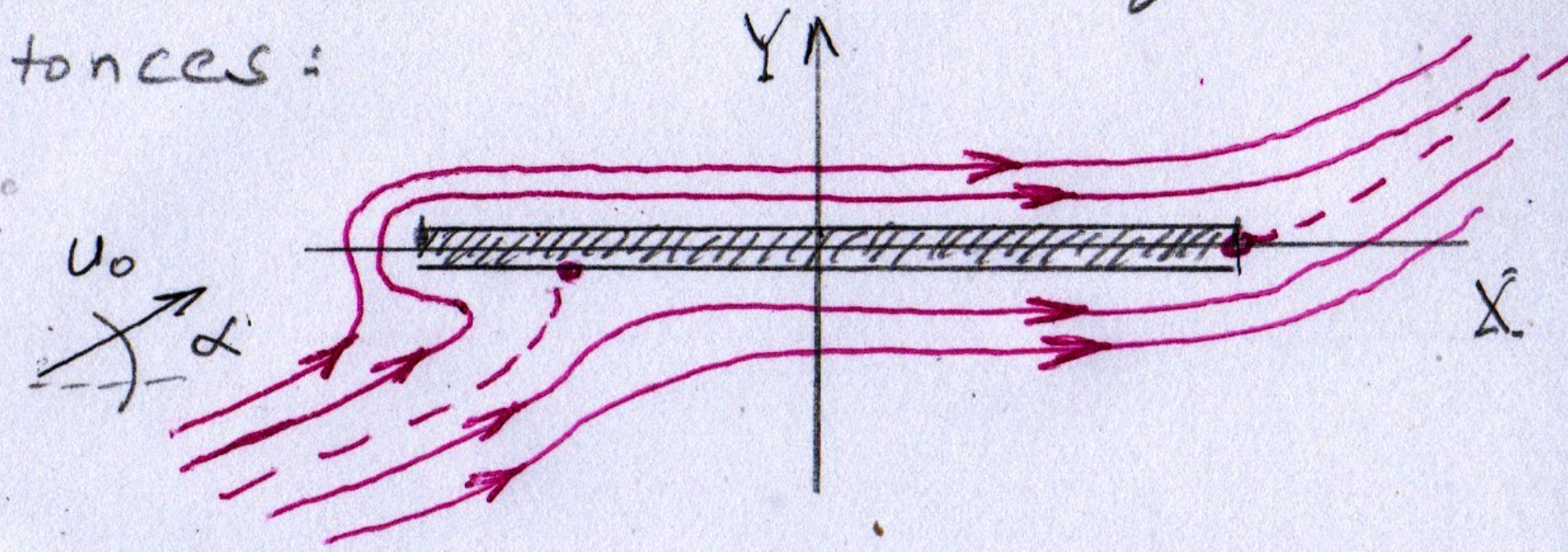


Los puntos $\theta = 0, \pi$ son en principio singulares

Las líneas de corriente son



Ejercicio: Mostrar que existe un valor del ángulo de ataque α para el cual se evita la singularidad en $\theta = 0$ y entonces:



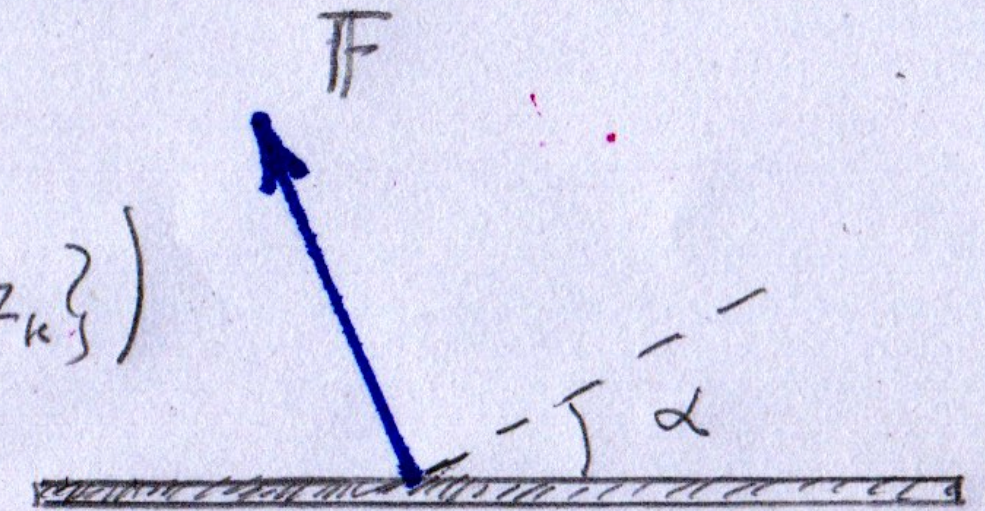
$$\gamma = \sin \alpha = \frac{\Gamma}{4\pi U_0 a}$$

Podemos usar Blasius para obtener la fuerza de sustentación sobre el ala plana:

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} \oint \frac{(dw/dz)^2}{z'^2} z' dz$$

Aplicando el Teorema de los Residuos $\left(\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}\{f, z_k\} \right)$ obtenemos

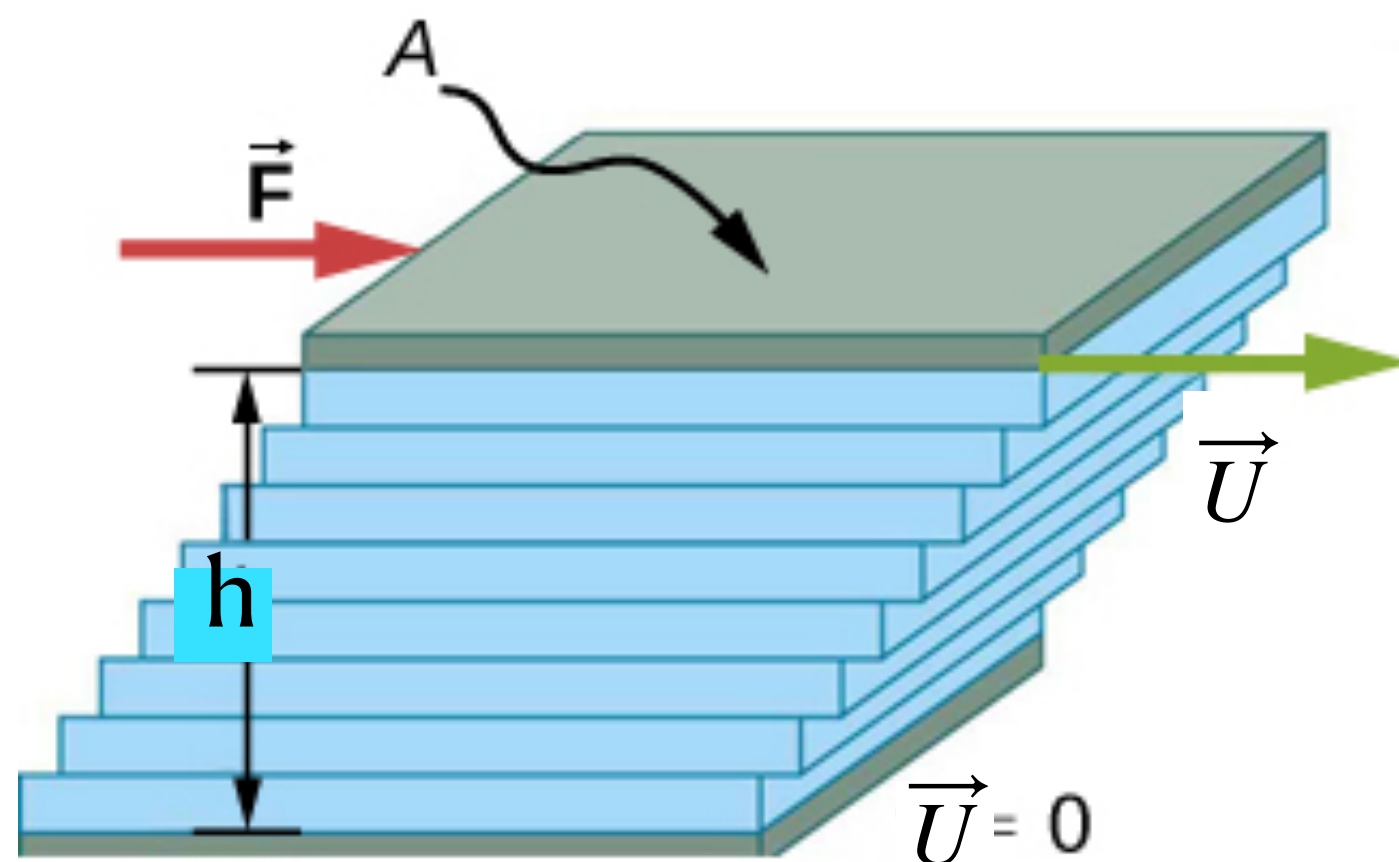
$$F = F_x - iF_y = \rho U_0 \Gamma e^{-i(\alpha + \frac{\pi}{2})}$$



Viscosidad: Modelo de Newton

Para comenzar a estudiar la **viscosidad** de fluidos, un efecto que hasta ahora hemos despreciado, supongamos un flujo entre dos placas horizontales separadas una distancia h . La inferior se encuentra en reposo, y la superior se mueve a velocidad constante \vec{U} bajo la acción de $\vec{F} = cte$.

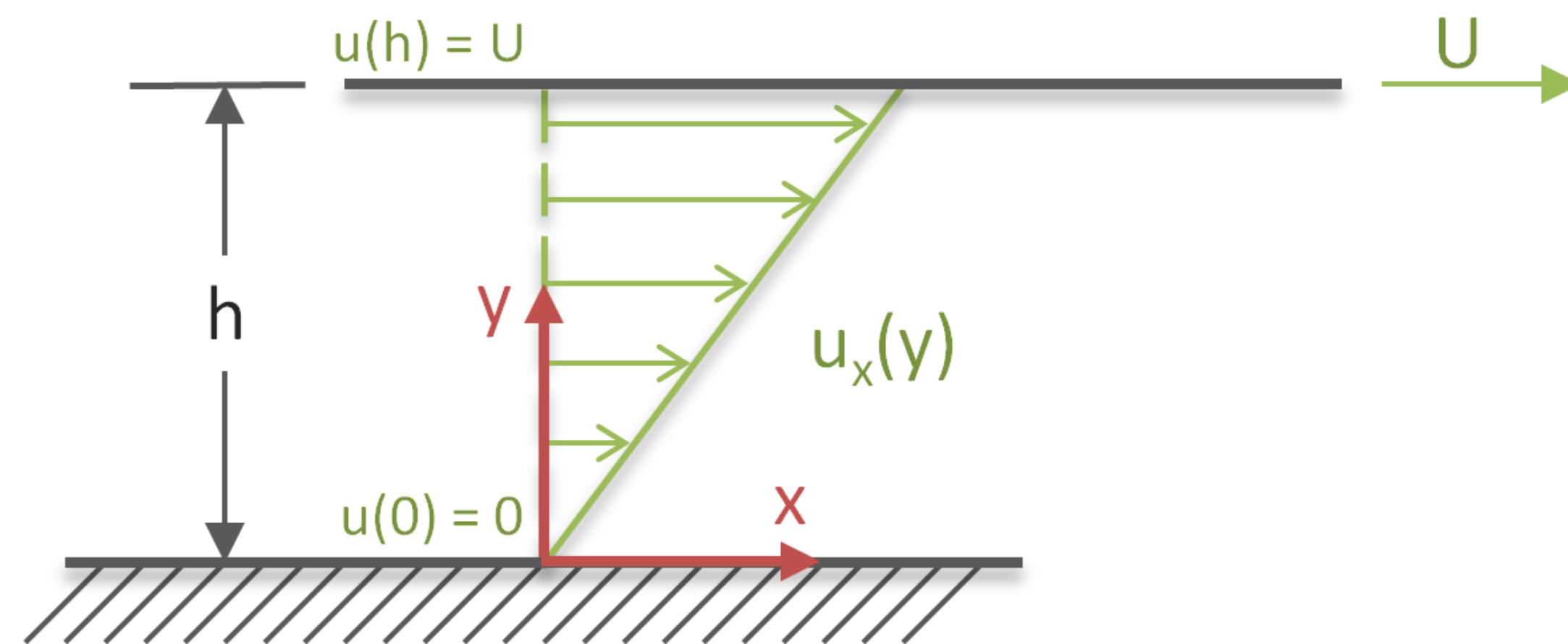
Imaginemos que el fluido se comporta como láminas o como una resma de papel. La aplicación de una fuerza horizontal sobre la lámina superior, dejaría al fluido en reposo si fuera ideal.



En cambio, observamos que:

- (i) la placa sobre la cual aplicamos \vec{F} mueve con $\vec{U} = cte$.
- (ii) En el fluido se establece un perfil $u_x(y) = U \frac{y}{h}$ como muestra la figura de la derecha.

Proponemos que sobre la placa superior actúa un esfuerzo tangencial τ tal que: $F - \tau A = 0 \rightarrow U = cte$



Sobre una lámina genérica ubicada en y con espesor Δy :

$$\tau = \frac{F}{A} \approx \mu \frac{u_x(y + \Delta y/2) - u_x(y - \Delta y/2)}{\Delta y} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

El **coeficiente de viscosidad** μ depende de las propiedades termodinámicas del fluido.

$$[\mu] = \frac{M}{LT}$$

Ecuación de Navier-Stokes

Proponemos incorporar el esfuerzo tangencial $\tau = \mu \partial_y u_x$ como parte del tensor de esfuerzos $\underline{\underline{\sigma}}$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad \text{tensor de esfuerzos viscosos}$$

$$\sigma'_{ij} = \alpha \partial_i u_j + \beta \partial_j u_i + \gamma \partial_k u_k \delta_{ij}$$

Como $\underline{\underline{\sigma}}$ debe ser simétrico $\rightarrow \alpha = \beta$

Sin perder generalidad:

$$\sigma'_{ij} = \mu \left(\partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{2}{3} \partial_k u_k \delta_{ij} \right) + \mu' \partial_k u_k \delta_{ij}$$

traza nula

segunda viscosidad

Incorporamos esta expresión a la ec. movimiento:

$$\rho \left[\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \right] = \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

$$[\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}]_i = \partial_j \sigma'_{ij} = \mu \left(\partial_{ji} u_j + \partial_{jj} u_i - \frac{2}{3} \partial_{jk} u_k \delta_{ij} \right) + \mu' \partial_{jk} u_k \delta_{ij}$$

Sup μ, μ' constantes.

Entonces:

$$\rho \left[\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \right] = \rho \underline{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \left(\frac{\mu}{3} + \mu' \right) \nabla (\nabla \cdot \underline{u})$$

Ec. Navier-Stokes

Para flujos incompresibles:

$$\frac{dp}{dt} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \underline{u} = 0$$

$$\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = \underline{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{u}$$

Navier-Stokes para flujos incompresibles

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$; viscosidad cinemática

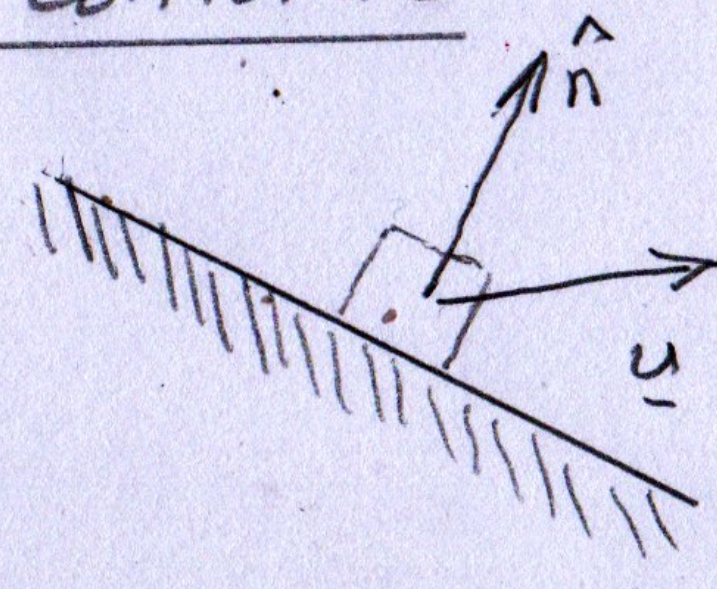
$$[\nu] = \frac{L^2}{T}$$

Condiciones de contorno

Fluido ideal

$$\underline{u} \cdot \hat{n} \Big|_{\text{pared}} = 0$$

(rigidez)



Fluido viscoso

$$\underline{u} \Big|_{\text{pared}} = 0$$

$$\underline{u} \cdot \hat{n} \Big|_{\text{pared}} = 0$$

(rigidez)

$$\underline{u} \times \hat{n} \Big|_{\text{pared}} = 0$$

(no desliza)