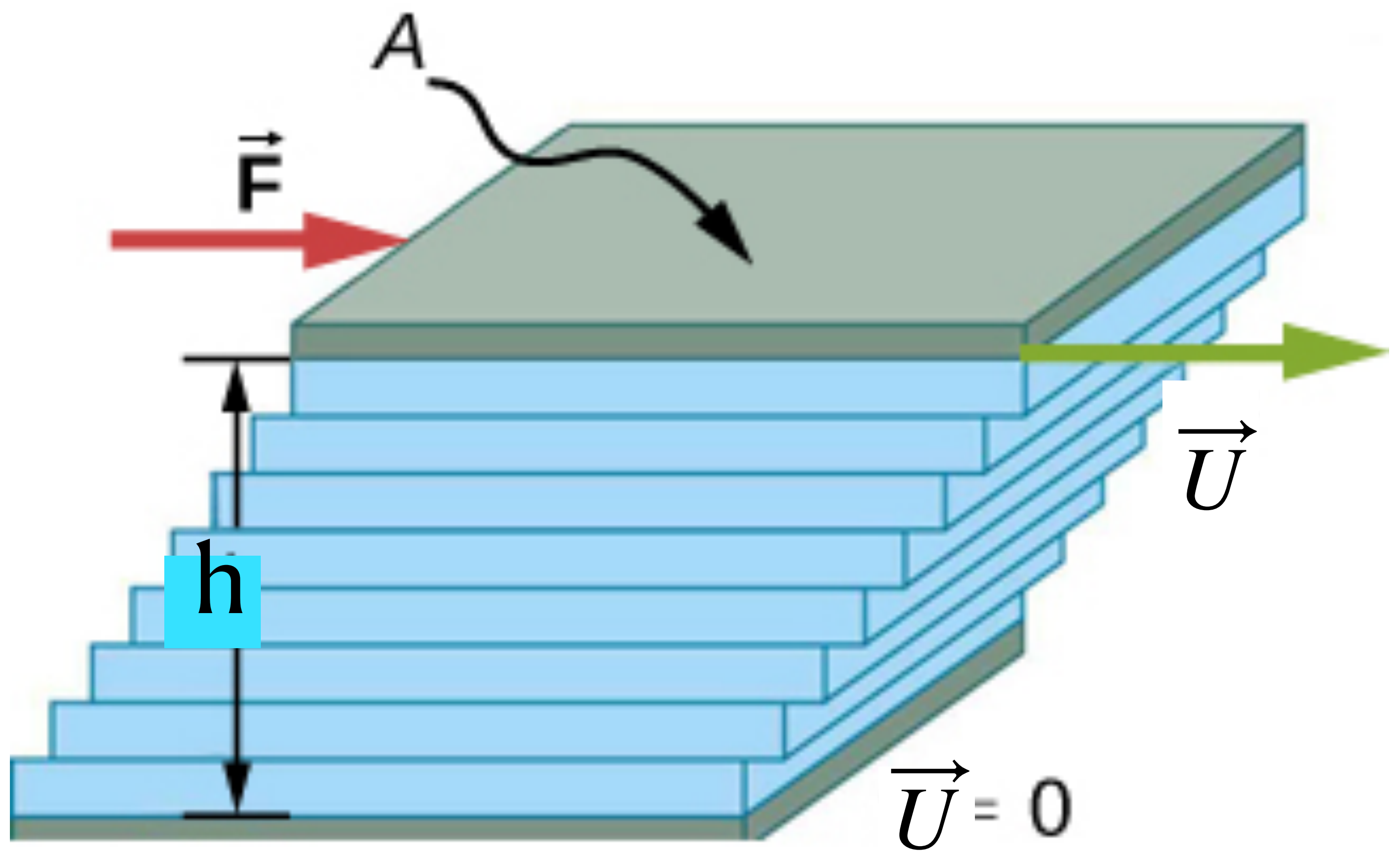
Viscosidad: Modelo de Newton

Para comenzar a estudiar la **viscosidad** de fluidos, un efecto que hasta ahora hemos despreciado, supongamos un flujo entre dos placas horizontales separadas una distancia h. La inferior se encuentra en reposo, y la superior se mueve a velocidad constante $\vec{U}$ bajo la acción de $\vec{F} = cte.$



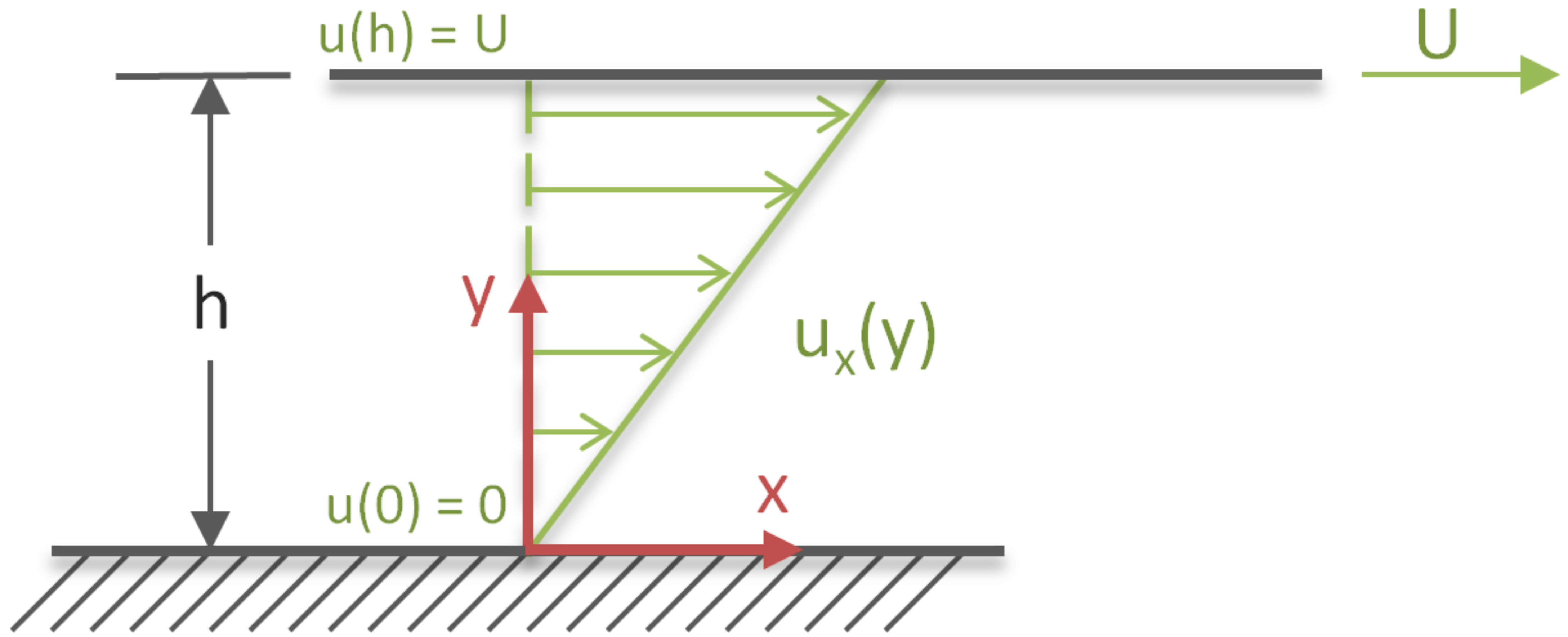
Imaginemos que el fluido se comporta como láminas o como una resma de papel. La aplicación de una fuerza horizontal sobre la lámina superior, dejaría al fluido en reposo si fuera ideal.

En cambio, observamos que:

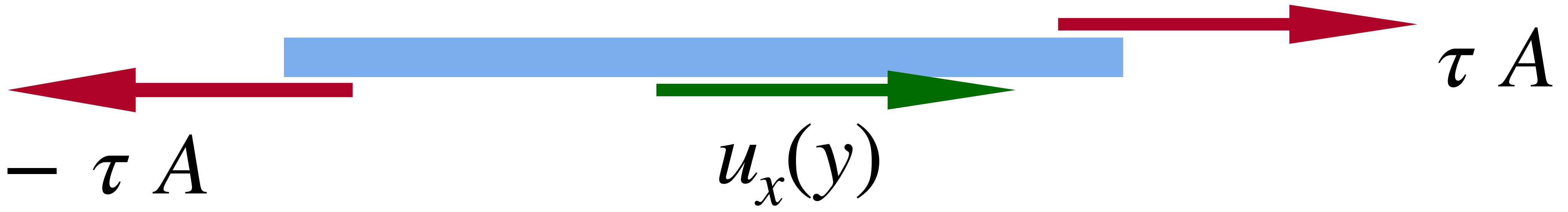
(i) la placa sobre la cual aplicamos $\vec{F}$ mueve con $\vec{U} = cte.$

(ii) En el fluido se establece un perfil $u_x(y) = U\dfrac{y}{h}$ como muestra la figura de la derecha.

Proponemos que sobre la placa superior actúa un esfuerzo tangencial τ tal que: $F - \tau A = 0 \quad \rightarrow \quad U = cte$



Sobre una lámina genérica ubicada en y con espesor Δy:



$$\tau = \frac{F}{A} \approx \mu \frac{u_x(y+\Delta y/2) - u_x(y-\Delta y/2)}{\Delta y} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

El **coeficiente de viscosidad** μ depende de las propiedades termodinámicas del fluido. $[\mu] = \dfrac{M}{LT}$

Ecuación de Navier-Stokes

Proponemos incorporar el esfuerzo tangencial $\tau = \mu\, \partial_y u_x$ como parte del tensor de esfuerzos $\underline{\underline{\sigma}}$

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

tensor de esfuerzos viscosos

$$\sigma'_{ij} = \alpha\, \partial_i u_j + \beta\, \partial_j u_i + \gamma\, \partial_k u_k\, \delta_{ij}$$

Como $\underline{\underline{\sigma}}$ debe ser simétrico $\longrightarrow \alpha = \beta$

Sin perder generalidad:

$$\boxed{\sigma'_{ij} = \mu \underbrace{\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{2}{3} \partial_k u_k\, \delta_{ij}\right)}_{\text{traza nula}} + \mu' \partial_k u_k\, \delta_{ij}}$$

segunda viscosidad

Incorporamos esta expresión a la ec. movimiento:

$$\rho\left[\partial_t \underline{u} + (\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}\right] = \rho \underline{f} + \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}}$$

$$[\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\sigma}}']_i = \partial_j \sigma'_{ij} = \mu\left(\partial_{ji} u_j + \partial_{jj} u_i - \frac{2}{3}\partial_{jk} u_k\, \delta_{ij}\right) + \mu' \partial_{jk} u_k\, \delta_{ij}$$

Sup μ, μ' constantes.

Entonces:

$$\boxed{\rho\left[\partial_t \underline{u} + (\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}\right] = \rho \underline{f} - \underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \left(\frac{\mu}{3} + \mu'\right)\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u})}$$

Ec. Navier-Stokes

Para flujos incompresibles:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \longrightarrow \underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0$$

$$\partial_t \underline{u} + (\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u} = \underline{f} - \frac{1}{\rho}\underline{\nabla} p + \nu \nabla^2 \underline{u}$$

Navier-Stokes para flujos incompresibles

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$: viscosidad cinemática

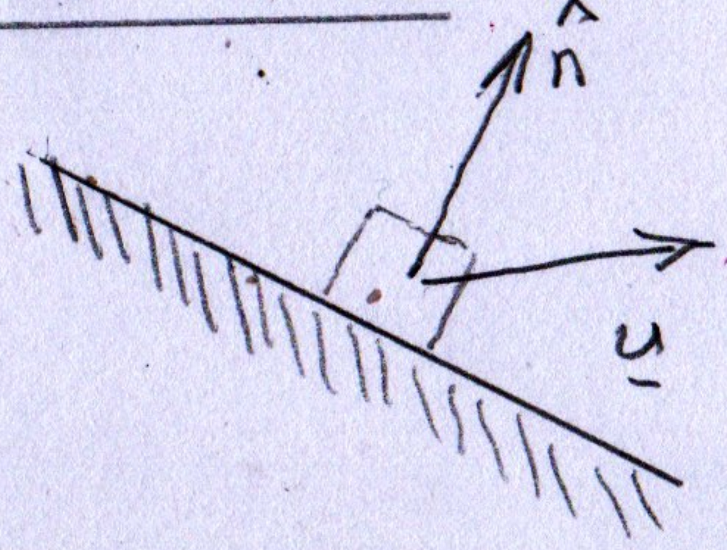
$[\nu] = \frac{L^2}{T}$

Condiciones de contorno

Fluido ideal

$\underline{u}\cdot\hat{n}\big|_{pared} = 0$

(rigidez)



Fluido viscoso

$\underline{u}\big|_{pared} = 0$

$\underline{u}\cdot\hat{n}\big|_{pared} = 0$ (rigidez)

$\underline{u}\times\hat{n}\big|_{pared} = 0$ (no desliza)

Disipación de energía

Veamos el balance de energía cinética de un flujo viscoso en el caso incompresible. Para un volumen $V=$ cte hacemos $\int_V d^3r\, u_i (NS)_i$

$$\int_V d^3r\, \rho u_i (\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i) = \int_V d^3r\, \rho u_i f_i - \int_V d^3r\, u_i \partial_i p + \mu \int_V d^3r\, u_i \partial^2_{jj} u_i$$

Como:

$$\left. \begin{array}{l} E = \int_V d^3r\, \rho \frac{u^2}{2} \\ \underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0 \end{array} \right\} \nearrow \frac{dE}{dt} = \int_V d^3r\, \rho \underline{u}\cdot\underline{f} - \oiint_{S_V} d\underline{S}\cdot\underline{u}\left(\frac{\rho u^2}{2}+p\right) + \mu \int_V d^3r\, \underline{u}\cdot\nabla^2\underline{u}$$

donde:

- $\int_V d^3r\, \rho \underline{u}\cdot\underline{f}$: potencia entregada por $\underline{f}$
- $\left(\frac{\rho u^2}{2}+p\right)\underline{u}$: flujo de energía

En cuanto al término viscoso:

$$u_i \partial_{jj} u_i = \partial_j (u_i \partial_j u_i) - \partial_j u_i\, \partial_j u_i \pm \partial_j (u_i \partial_i u_j)$$

$$= \partial_j \Big[u_i \underbrace{(\partial_i u_j + \partial_j u_i)}_{\sigma'_{ij}/\mu}\Big] - \underbrace{\partial_j u_i (\partial_j u_i + \partial_i u_j)}_{\frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)^2}$$

(simetrizando)

Entonces:

$$\mu \underline{u}\cdot\nabla^2\underline{u} = \underline{\nabla}\cdot(\underline{u}\cdot\underline{\underline{\sigma}}') - \frac{\mu}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)^2$$

Por lo tanto:

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{\int_V d^3r\, \rho \underline{u}\cdot\underline{f}}_{\text{potencia de } f} - \oiint_{S_V} d\underline{S}\cdot\overbrace{\left(\frac{\rho u^2}{2}\underline{u} + p\underline{u} - \underline{u}\cdot\underline{\underline{\sigma}}'\right)}^{\text{flujo de energía}} - \underbrace{\frac{\mu}{2}\int_V d^3r\, (\partial_j u_i + \partial_i u_j)^2}_{\text{disipación viscosa}}$$

La potencia entregada por $\underline{f}$ puede ser positiva o negativa, al igual que el flujo de energía.

En cambio, la disipación viscosa siempre expresa pérdida de energía (fricción entre E.F.).

Número de Reynolds

Es un número adimensional que mide la importancia relativa del término convectivo respecto del viscoso:

$$Re = \frac{\|(\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\,\underline{u}\|}{\|\nu\,\nabla^2\underline{u}\|} \sim \frac{u_0^2/L_0}{\nu\, u_0/L_0^2} \sim \frac{u_0 L_0}{\nu}.$$

Si $Re \gg 1$ $\longrightarrow$ efectos viscosos despreciables $\rightarrow$ fluido ideal?

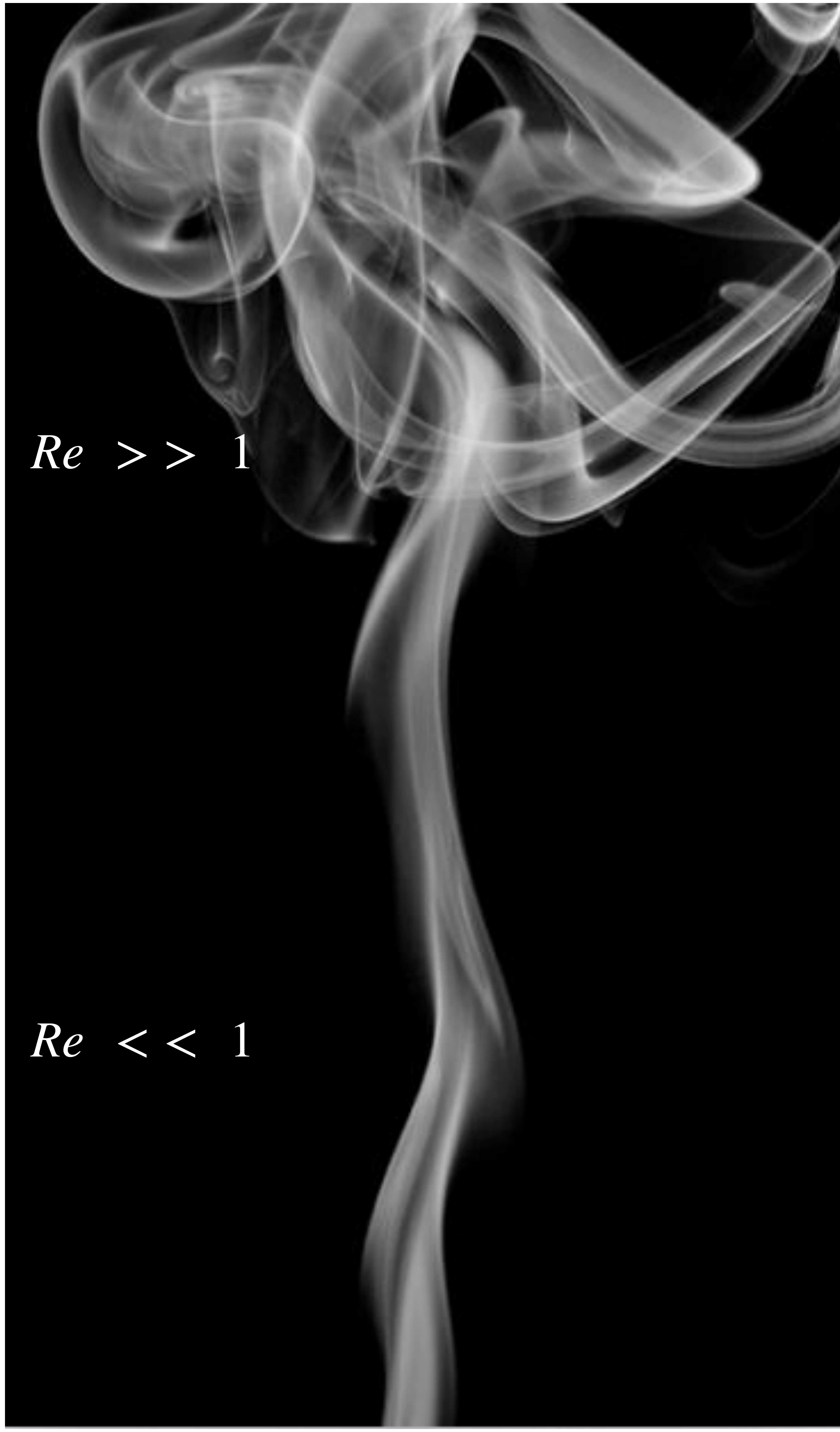
Si $Re \ll 1$ $\longrightarrow$ efectos no lineales despreciables $\rightarrow$ flujo laminar

Si adimensionamos N-S en el caso $\rho =$ cte y $\underline{f}=0$:

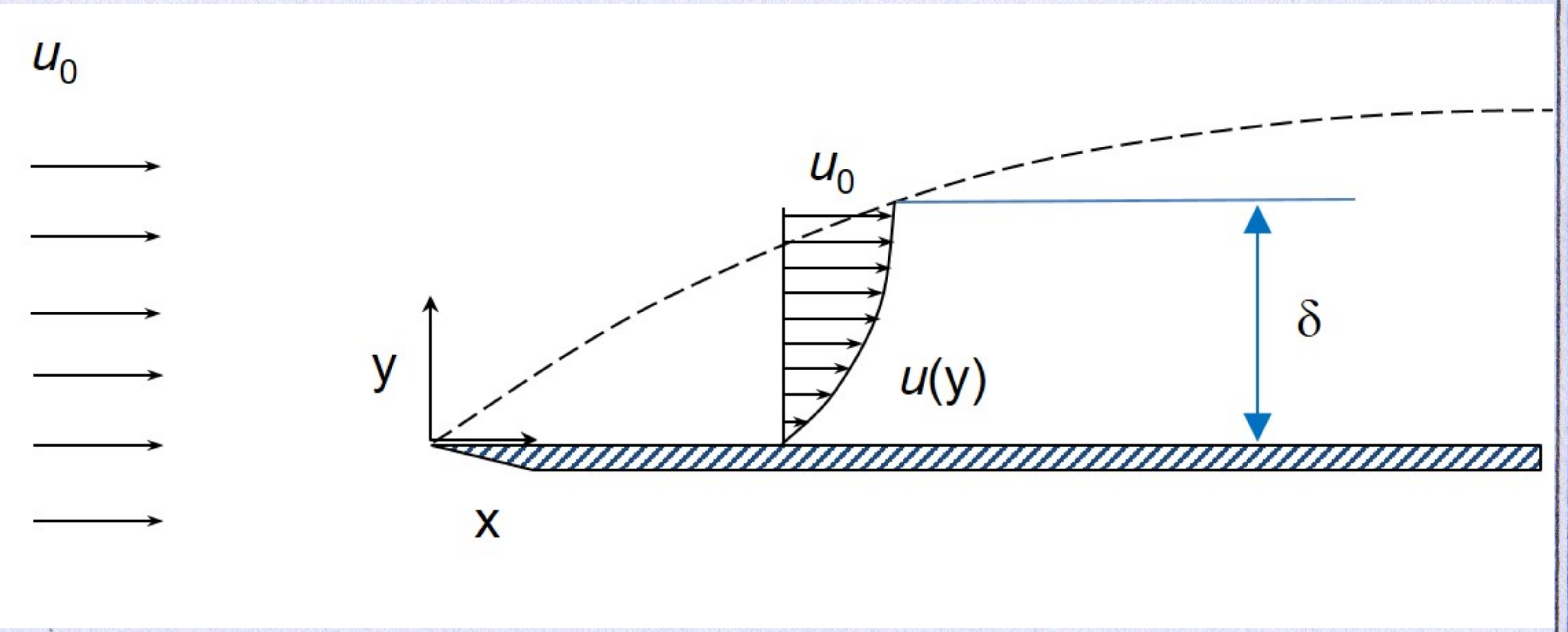
$$\left.\begin{aligned} \underline{u} &\rightarrow u_0\,\underline{u} \\ \underline{r} &\rightarrow L_0\,\underline{r} \\ t &\rightarrow \frac{L_0}{u_0}\,t \\ p &\rightarrow \rho_0 u_0^2\, p \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left[\frac{\rho_0 u_0^2}{L_0}\right]\frac{d\underline{u}}{dt} = -\left[\frac{\rho_0 u_0^2}{L_0}\right]\underline{\nabla} p + \left[\frac{\mu u_0}{L_0^2}\right]\nabla^2\underline{u}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_0} \quad \text{y} \quad Re = \frac{u_0 L_0}{\nu} \Longrightarrow \boxed{\frac{d\underline{u}}{dt} = -\underline{\nabla} p + \frac{1}{Re}\nabla^2\underline{u}}$$

- El único parámetro adimensional es Re.
- El límite $Re \rightarrow \infty$ es no trivial si simultaneamente $\nabla^2\underline{u} \xrightarrow[Re\to\infty]{} \infty$
- En fluidos viscosos suele ocurrir que $\nabla^2\underline{u} = -\underline{\nabla}\times\underline{\omega} \rightarrow \infty$ cerca de los contornos.

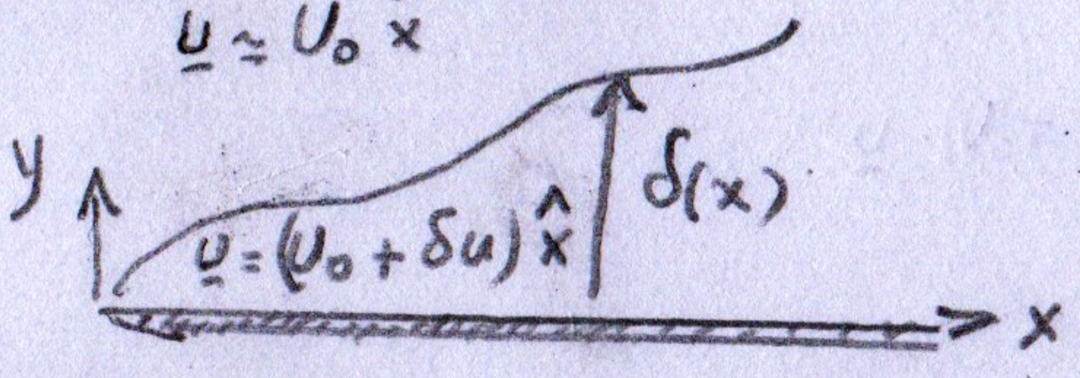


Capa límite



Las condiciones de contorno de un fluido ideal o viscoso, son marcadamente diferentes. Se espera que las respectivas soluciones difieran apreciablemente cerca de los contornos $\longrightarrow$ capas límites

En el problema de la figura suponemos:



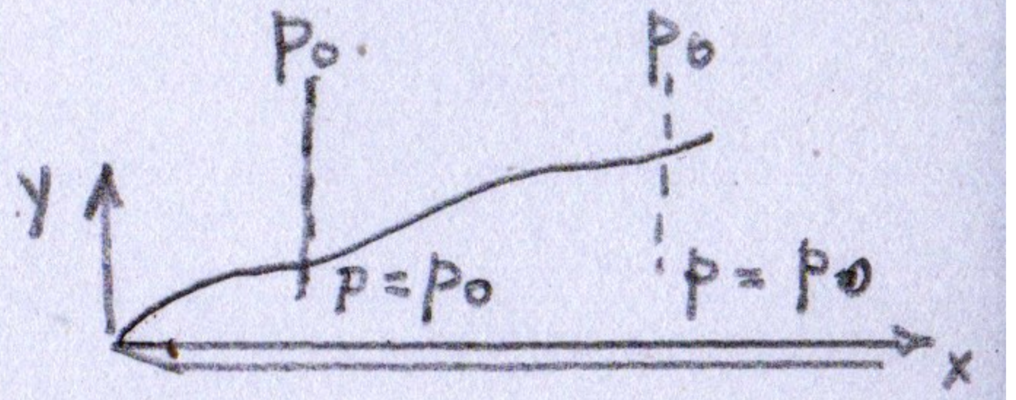
- plano: $\underline{u} = U_x(x,y)\,\hat{x}$
- estacionario: $\partial_t = 0$
- incompresible: $\rho = cte$
- Lineal: $Re \ll 1 \longrightarrow U_x \simeq U_0 + \delta u$, $\delta u \ll U_0$

$\hat{x}$ $\quad (\cancel{U_0} + \delta u)\,\partial_x(\underbrace{U_0}_{=0} + \delta u) = -\frac{1}{\rho}\partial_x p + \nu(\cancel{\partial_{xx}} + \partial_{yy})(\underbrace{U_0}_{=0} + \delta u)$

$\delta u \ll U_0 \qquad\qquad \partial_{xx} \ll \partial_{yy}$

$\hat{y}$ $\quad 0 = -\frac{1}{\rho}\partial_y p \longrightarrow p = p(x)$

Pero $p(x,y) = p(x,\infty) = p_0$



$\therefore \quad \partial_x p = 0 \longrightarrow U_0\,\partial_x \delta u \simeq \nu\,\partial_{yy}\delta u$

Ecuación de difusión $\longrightarrow$ Cond. Contorno $\begin{cases} \delta u(y \to \infty) = 0 \\ \delta u(y=0) = -U_0 \end{cases}$

Buscamos soluciones auto-similares para esta ecuación, donde la incógnita δu dependa solo de

$$\xi = \frac{y}{\sqrt{4\nu x / U_0}} \xrightarrow[\delta u(x,y) = \delta u(\xi(x,y))]{} \begin{cases} \partial_x \delta u = \partial_x \xi \, \frac{d\delta u}{d\xi} \\ \partial_y \delta u = \partial_y \xi \, \frac{d\delta u}{d\xi} \end{cases}$$

Entonces:

$$\partial_x \delta u = -\frac{\xi}{2x}\,\delta u'$$

$$\partial_y \delta u = \frac{\xi}{y}\,\delta u' \longrightarrow \partial_{yy}\delta u = \frac{\xi^2}{y^2}\,\delta u''$$

Capa límite

Reemplazando: $\delta u'' = -2\xi\,\delta u'$

La primera integral: $\delta u' = A e^{-\xi^2}$

La segunda integral involucra a la llamada <u>función error</u> definida como:

$$f_{err}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} d\xi \, e^{-\xi^2}$$

tal que $f_{err}(0) = 0$ y $f_{err}(\infty) = 1$

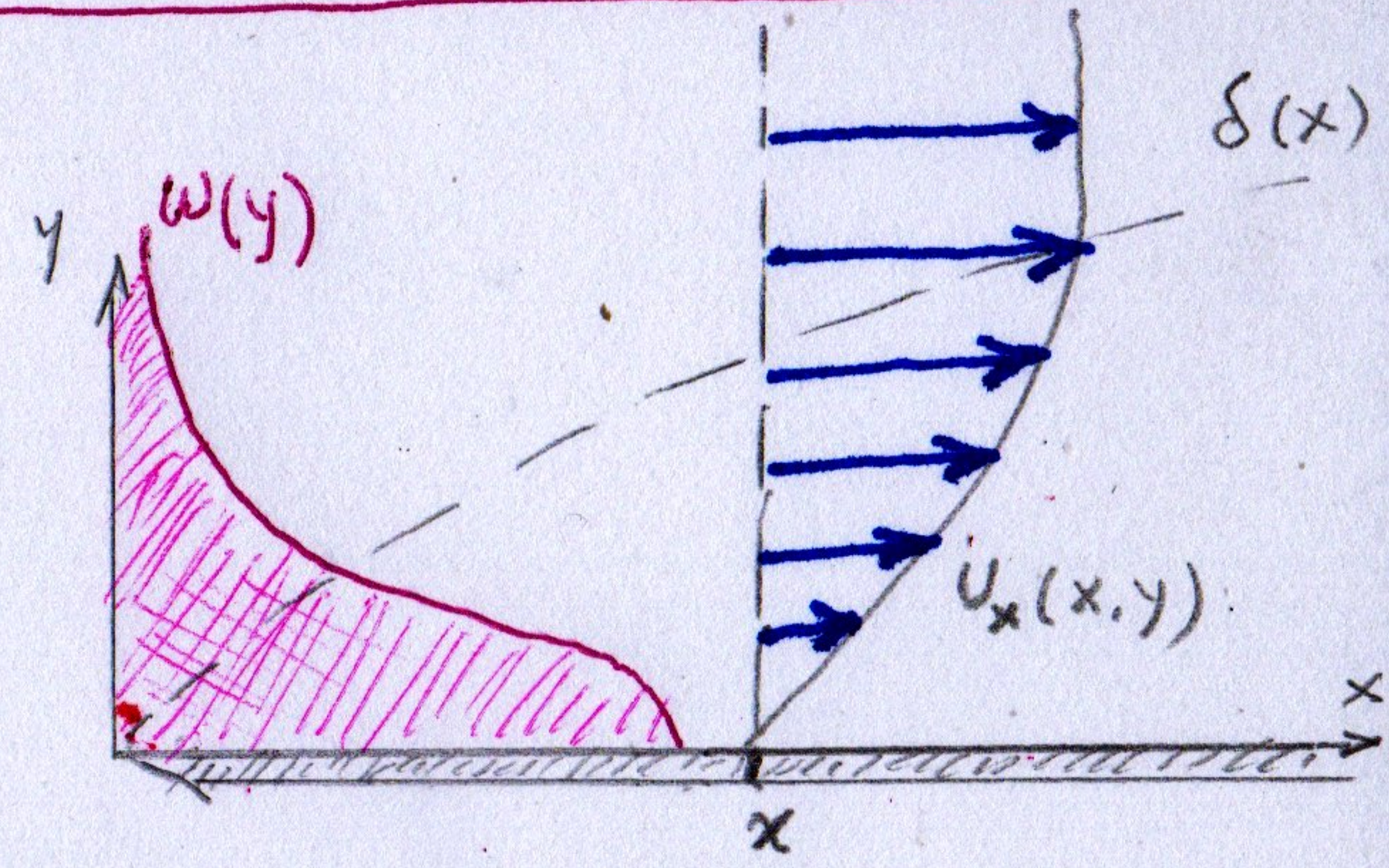
$$\delta u = A \int e^{-\xi^2} d\xi = C + \frac{\sqrt{\pi}\,A}{2} f_{err}(\xi)$$

Con las condiciones de contorno, fijamos los valores de las constantes de integración:

- $\delta u(\xi \to \infty) = 0 \longrightarrow C + \frac{\sqrt{\pi}\,A}{2} = 0$
- $\delta u(\xi = 0) = -U_0 \longrightarrow C = -U_0$

$$\therefore u_x(x,y) = U_0 + \delta u_{(x,y)} = U_0 \, f_{err}\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu x / U_0}} \right)$$

Para interpretar este resultado, definimos el espesor de la <u>capa límite</u> $\delta_{(x)} = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_0}}$



de modo que

$$u_x(x,y) = U_0 \, f_{err}\left(\frac{y}{\sqrt{2}\,\delta(x)} \right)$$

Calculamos la vorticidad de este flujo:

$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} \longrightarrow \omega_z = -\frac{\partial u_x}{\partial y}$

$f'_{err}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} \longrightarrow \omega_z = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{U_0}{\delta(x)} e^{-\frac{y^2}{2\delta^2_{(x)}}}$

Es decir que en una dada posición x, la vorticidad se distribuye en altura con un perfil gaussiano.

Ley de Stokes

Calculemos la fuerza que ejerce un flujo estacionario, laminar e incompresible sobre una esfera

$$\rho\Big(\underbrace{\cancel{\partial_t \underline{u}}}_{\substack{=0\\(\text{estac.})}} + \underbrace{\cancel{(\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}}}_{\substack{=0\\(Re \ll 1)}}\Big) = -\underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{u}$$

Por lo tanto:

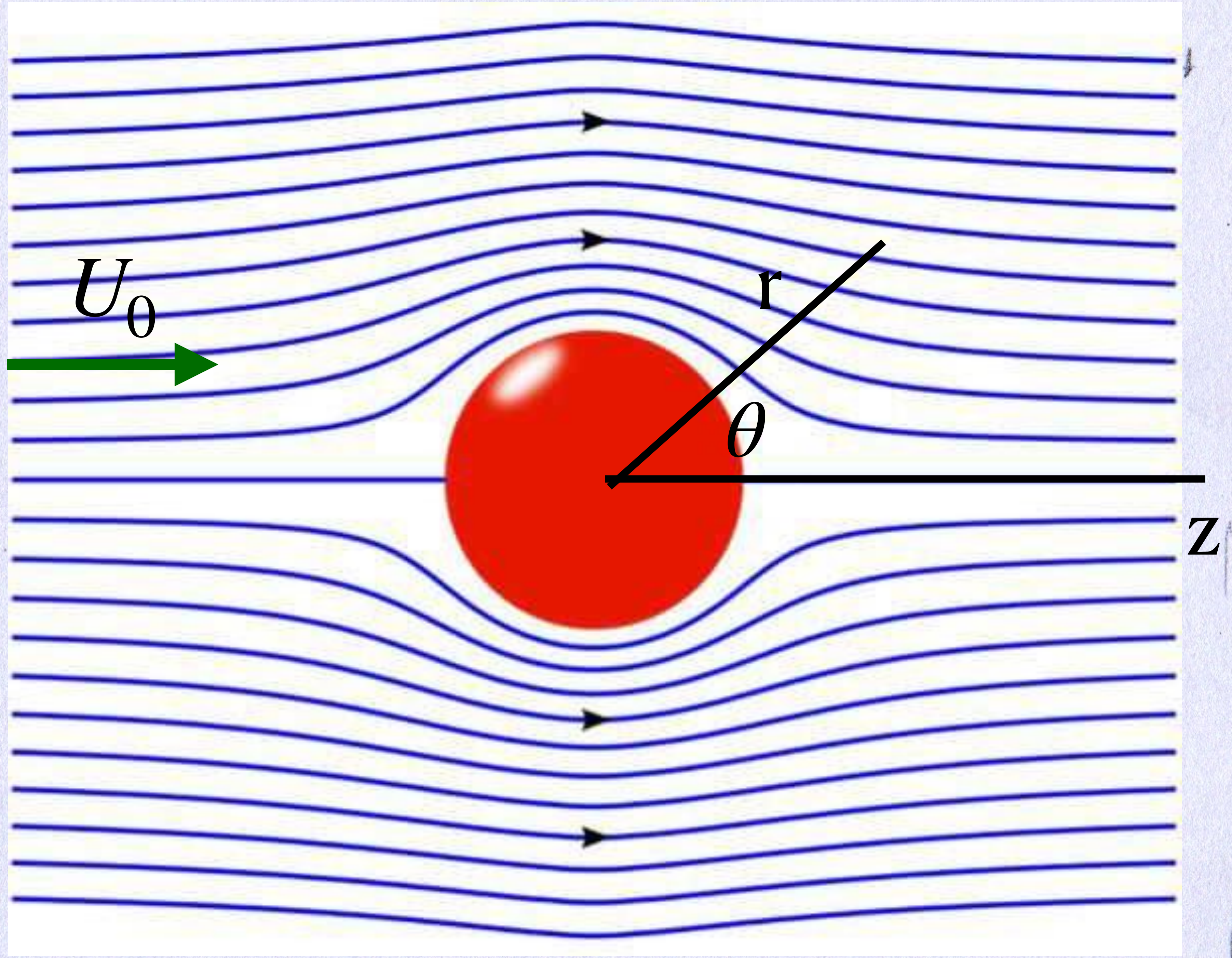
$$\boxed{\begin{array}{ll} \underline{\nabla} p = \mu \nabla^2 \underline{u} & \\ \underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0 & \underline{u}(r=a) = 0 \end{array}}$$

El problema es axisimétrico. En esféricas:

$$\underline{u} = u_r(r,\theta)\,\hat{r} + u_\theta(r,\theta)\,\hat{\theta} \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0 \longrightarrow \underline{u} = \underline{\nabla}\times(\psi\,\hat{\varphi})$$

$$u_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\partial_\theta\psi \qquad u_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_r\psi$$



La vorticidad resulta:

$$\underline{\omega} = \underline{\nabla}\times\underline{u} = -\frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\,E^2\psi$$

donde $E^2 = \partial^2_{rr} + \dfrac{\sin\theta}{r^2}\,\partial_\theta\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\,\partial_\theta\right)$

La ecuación N-S resulta:

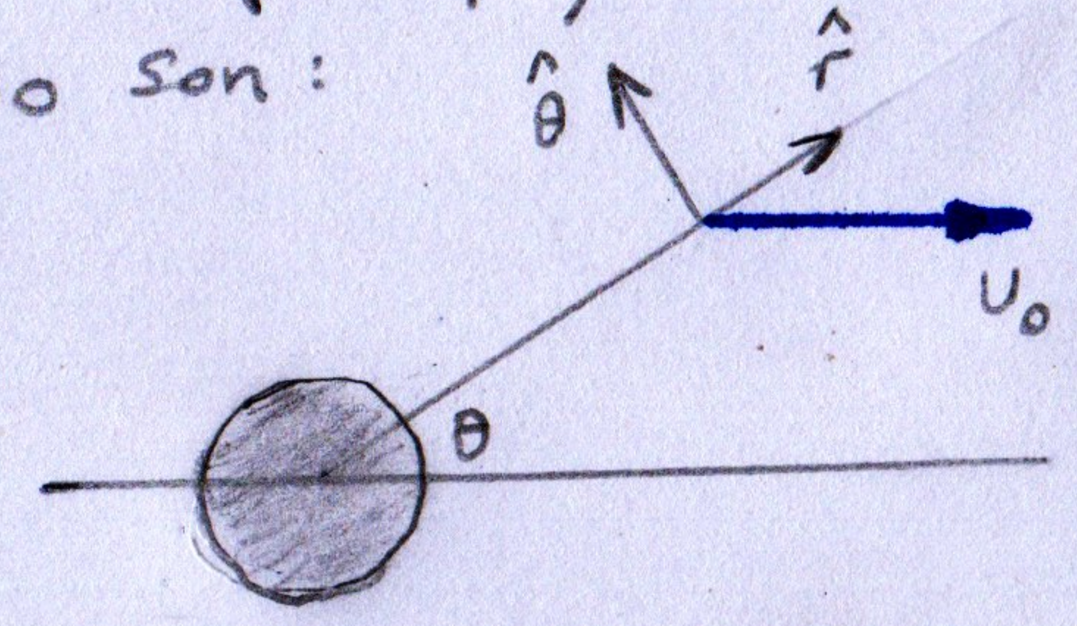
$$(\hat{r}) \qquad \partial_r p = \frac{\mu}{r^2\sin\theta}\,\partial_\theta(E^2\psi)$$

$$(\hat{\theta}) \qquad \frac{1}{r}\,\partial_\theta p = -\frac{\mu}{r\sin\theta}\,\partial_r(E^2\psi)$$

Como $\partial^2_{r\theta} p = \partial^2_{\theta r} p \longrightarrow E^2(E^2\psi) = 0$

Las condiciones de contorno son:

- $r = a \longrightarrow \partial_r\psi = 0 = \dfrac{1}{r}\,\partial_\theta\psi$
- $r = \infty \longrightarrow u_r = u_0\cos\theta$, $\quad u_\theta = -u_0\sin\theta$



Ley de Stokes

$$r=\infty \rightarrow \begin{cases} u_r = u_0 \cos\theta = \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\,\partial_\theta\psi \\[2mm] u_\theta = -u_0\sin\theta = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\,\partial_r\psi \end{cases} \rightarrow \psi_{(r\to\infty)} = \frac{u_0 r^2}{2}\sin^2\theta$$

Proponemos soluciones de la forma:

$$\psi(r,\theta) = f(r)\sin^2\theta \xrightarrow[E^2(E^2\psi)=0]{} \left(\partial^2_{rr} - \frac{2}{r^2}\right)^2 f = 0$$

Probamos $f(r) \sim r^\alpha \rightarrow [(\alpha-2)(\alpha-3)-2][\alpha(\alpha-1)-2] = 0$

Resulta $\alpha = -1, 1, 2, 4$

Por lo tanto $f(r) = \dfrac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4$

$$r=\infty \rightarrow \psi \rightarrow \frac{u_0 r^2}{2}\sin^2\theta \rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ C = \dfrac{u_0}{2} \end{cases}$$

$$r = a \rightarrow \partial_r\psi\big|_{r=a} = 0 = \left(-\frac{A}{a^2} + B + u_0 a\right)\sin^2\theta$$

$$\rightarrow \partial_\theta\psi\big|_{r=a} = 0 = \left(\frac{A}{a} + Ba + \frac{u_0}{2}a^2\right)2\sin\theta\cos\theta$$

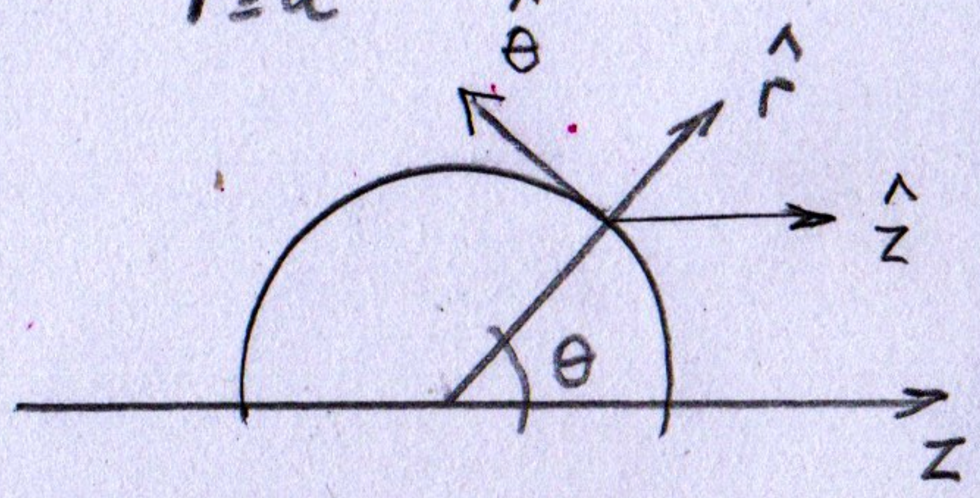
$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{u_0}{4}a^3 \\ B &= -\frac{3}{4}u_0 a \end{aligned}\right\} \rightarrow \psi(r,\theta) = \frac{u_0}{4}\sin^2\theta\left(2r^2 + \frac{a^3}{r} - 3ar\right)$$

De cualquiera de las componentes de N-S integramos para obtener la presión:

$$p(r,\theta) = p_0 - \frac{3}{2}\frac{\mu u_0 a}{r^2}\cos\theta$$

Finalmente, para calcular la fuerza sobre la esfera:

$$\underline{F} = \oiint_{r=a} \underline{\underline{\sigma}}\cdot\hat{r}\,dS \xrightarrow[\partial_\varphi = 0]{} F_z = \oiint_{r=a} \hat{z}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\cdot\hat{r}\,dS$$



Como:

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu\,\partial_r u_r \;\ldots$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu r\,\partial_r\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{\mu}{r}\partial_\theta u_r$$

$$\hat{z}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\cdot\hat{r} = \sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta$$

Ley de Stokes

Necesitamos calcular

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\,\partial_\theta \psi = \frac{u_0 \cos\theta}{2r^2}\left(2r^2 + \frac{a^3}{r} - 3ar\right)$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_r \psi = -\frac{u_0 \sin\theta}{4r}\left(4r - \frac{a^3}{r^2} - 3a\right)$$

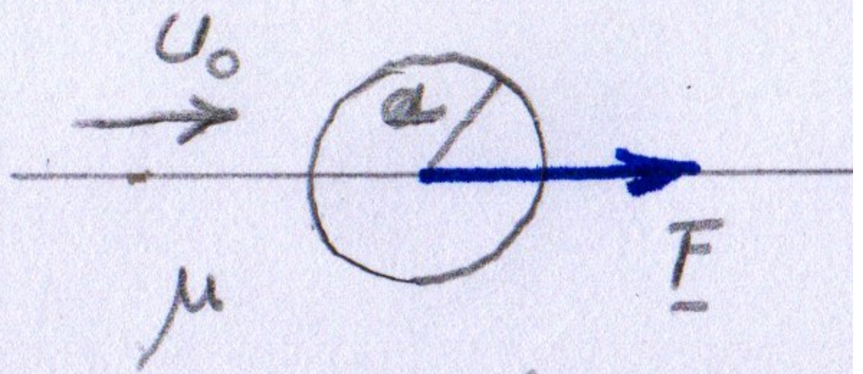
y luego:

$$\partial_r u_r\Big|_{r=a} = 0 \qquad \partial_\theta u_r\Big|_{r=a} = 0$$

$$\partial_r\left(\frac{u_\theta}{r}\right)\Big|_{r=a} = -\frac{3}{2}\frac{u_0 \sin\theta}{a^2}$$

Finalmente

$$F_z = 6\pi\mu a u_0$$



- Las líneas continuas son líneas de corriente ($\psi = cte$)
- Las punteadas son de $p = cte$.
- La paleta de colores muestra vorticidad ω_φ

$$\omega_\varphi = -\frac{3}{2}\frac{u_0 a \sin\theta}{r^2}$$