Repaso de Clase 8

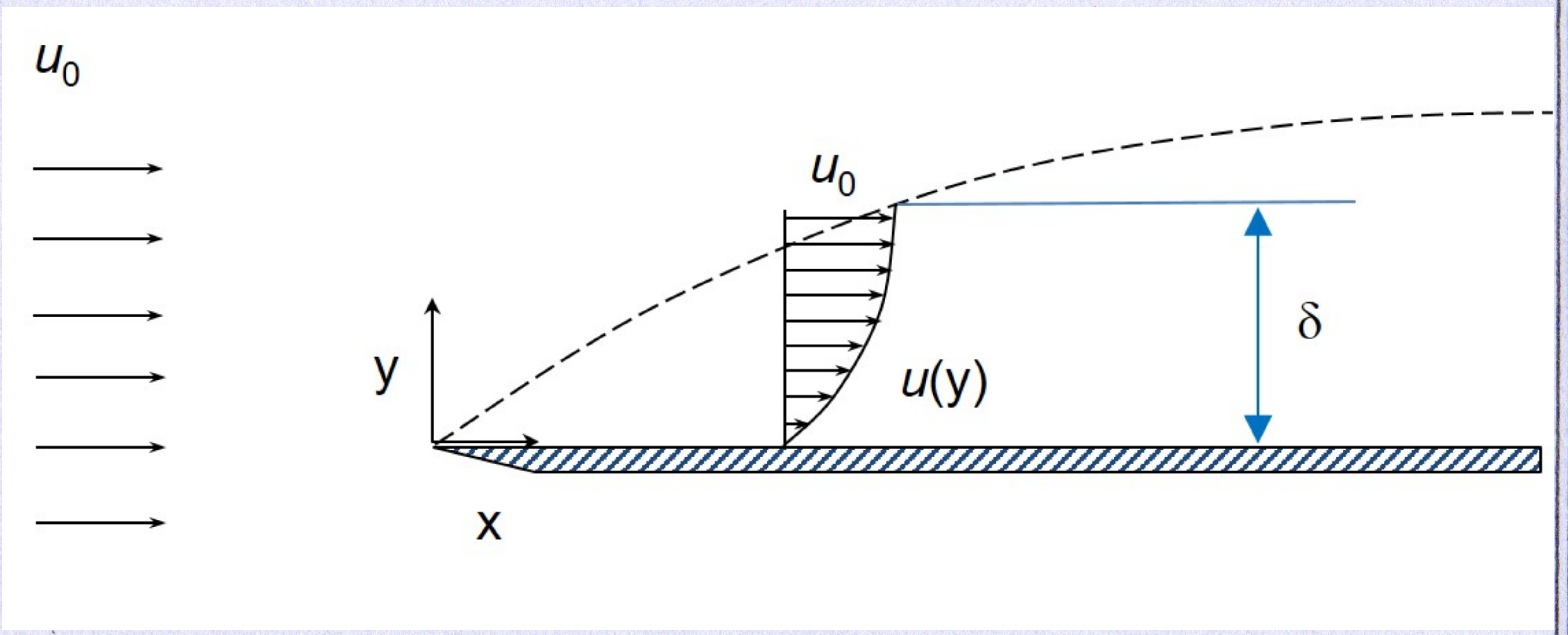
- Flujos viscosos. Viscosidad de Newton.

- Ecuación de Navier-Stokes.

- Disipación de energía.

- Número de Reynolds: $Re = \dfrac{U_0 \, L_0}{\nu}$

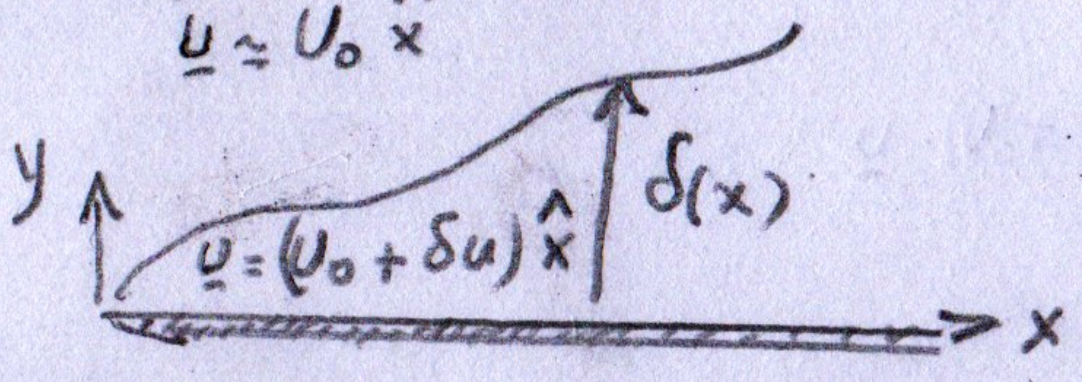
Capa límite



Las condiciones de contorno de un fluido ideal o viscoso, son marcadamente diferentes. Se espera que las respectivas soluciones difieran apreciablemente cerca de los contornos $\longrightarrow$ capas límites

En el problema de la figura suponemos:

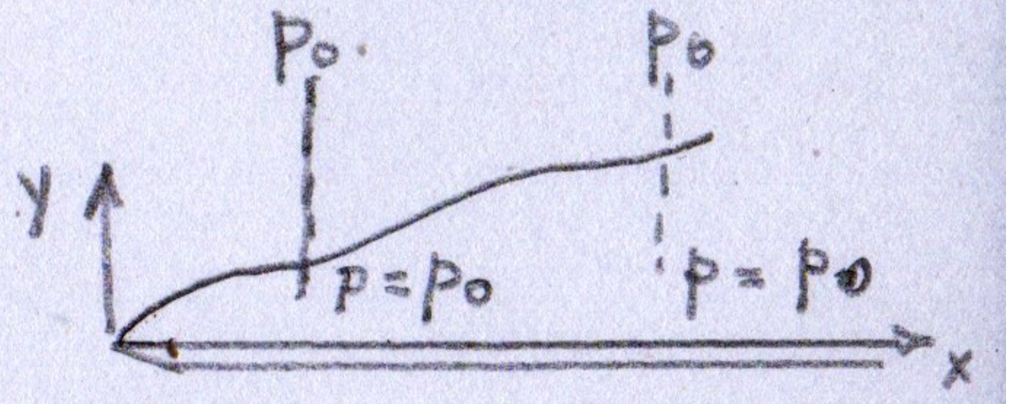
- plano: $\underline{u} = U_x(x,y)\,\hat{x}$
- estacionario: $\partial_t = 0$
- incompresible: $\rho = cte$
- Lineal: $Re \ll 1 \longrightarrow U_x \simeq U_0 + \delta u$, $\delta u \ll U_0$



$(\hat{x})$ $\quad (U_0 + \underbrace{\cancel{\delta u}}_{\delta u \ll U_0})\,\partial_x(\underbrace{\cancel{U_0}}_{=0} + \delta u) = -\frac{1}{\rho}\partial_x p + \nu(\underbrace{\cancel{\partial_{xx}}}_{\partial_{xx} \ll \partial_{yy}} + \partial_{yy})(\underbrace{\cancel{U_0}}_{=0} + \delta u)$

$(\hat{y})$ $\quad 0 = -\frac{1}{\rho}\partial_y p \longrightarrow p = p(x)$

Pero $p(x,y) = p(x,\infty) = p_0$



$\therefore \; \partial_x p = 0 \longrightarrow U_0\,\partial_x \delta u \simeq \nu\,\partial_{yy}\delta u$

Ecuación de difusión $\longrightarrow$ Cond. Contorno $\begin{cases} \delta u(y \to \infty) = 0 \\ \delta u(y=0) = -U_0 \end{cases}$

Buscamos soluciones auto-similares para esta ecuación, donde la incógnita δu dependa solo de

$$\xi = \frac{y}{\sqrt{4\nu x/U_0}} \xrightarrow[\delta u(x,y) = \delta u(\xi(x,y))]{} \begin{cases} \partial_x \delta u = \partial_x \xi \, \dfrac{d\delta u}{d\xi} \\ \partial_y \delta u = \partial_y \xi \, \dfrac{d\delta u}{d\xi} \end{cases}$$

Entonces:

$$\partial_x \delta u = -\frac{\xi}{2x}\,\delta u'$$

$$\partial_y \delta u = \frac{\xi}{y}\,\delta u' \longrightarrow \partial_{yy}\delta u = \frac{\xi^2}{y^2}\,\delta u''$$

Capa límite

Reemplazando: $\delta u'' = -2\xi\,\delta u'$

La primera integral: $\delta u' = A\, e^{-\xi^2}$

La segunda integral involucra a la llamada función error definida como:

$$f_{err}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} d\xi\, e^{-\xi^2}$$

tal que $f_{err}(0) = 0$ y $f_{err}(\infty) = 1$

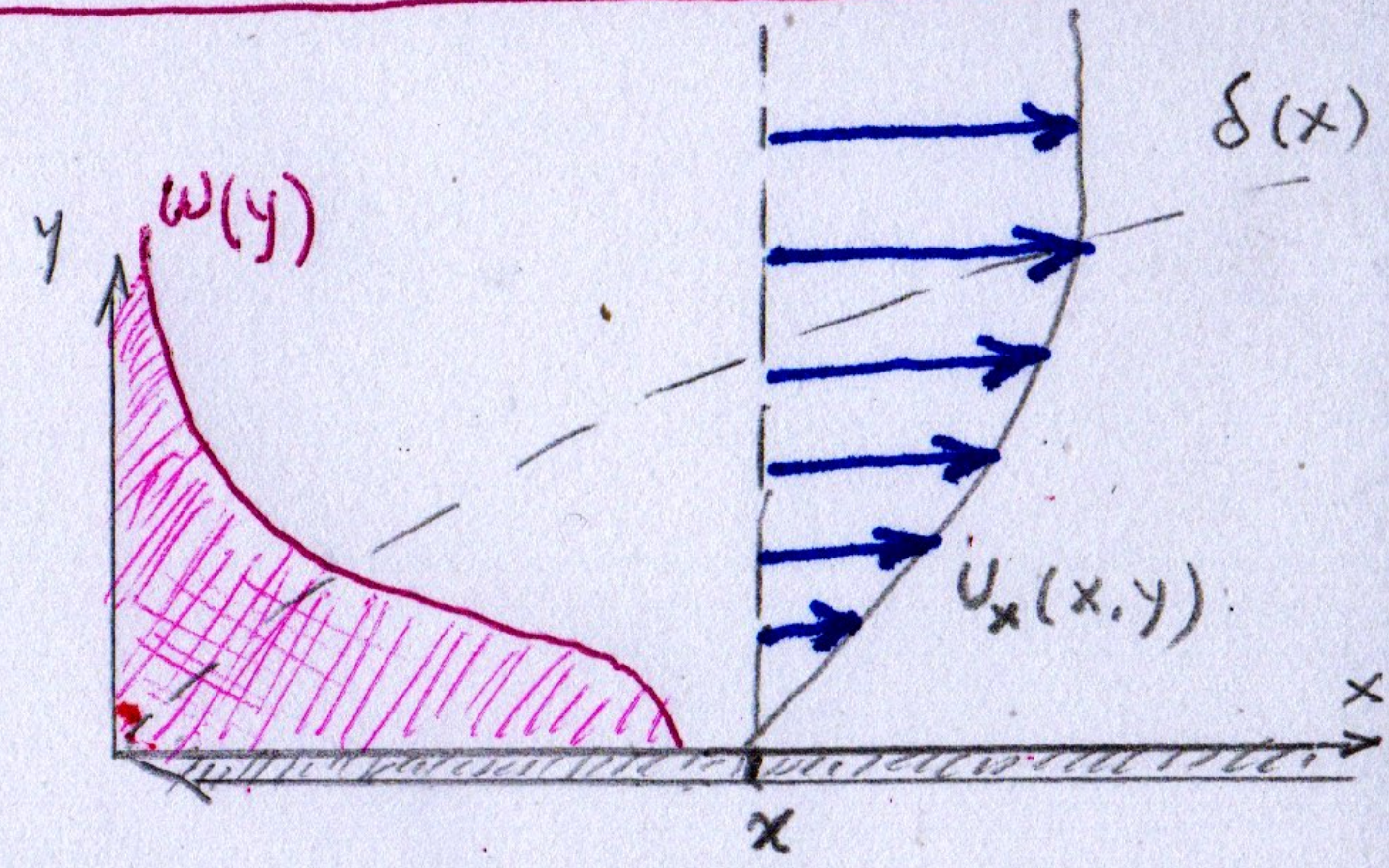
$$\delta u = A\int e^{-\xi^2}\, d\xi = C + \frac{\sqrt{\pi}\,A}{2}\, f_{err}(\xi)$$

Con las condiciones de contorno, fijamos los valores de las constantes de integración:

- $\delta u(\xi \to \infty) = 0 \longrightarrow C + \frac{\sqrt{\pi}\,A}{2} = 0$
- $\delta u(\xi = 0) = -U_0 \longrightarrow C = -U_0$

$$\therefore\ u_x(x,y) = U_0 + \delta u_{(x,y)} = U_0\, f_{err}\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu x/U_0}}\right)$$

Para interpretar este resultado, definimos el espesor de la capa límite $\delta_{(x)} = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_0}}$



de modo que

$$u_x(x,y) = U_0\, f_{err}\left(\frac{y}{\sqrt{2}\,\delta(x)}\right)$$

Calculamos la vorticidad de este flujo:

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} \longrightarrow \omega_z = -\frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$f'_{err}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\xi^2} \longrightarrow \omega_z = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{U_0}{\delta(x)}\, e^{-\frac{y^2}{2\delta^2_{(x)}}}$$

Es decir que en una dada posición x, la vorticidad se distribuye en altura con un perfil gaussiano.

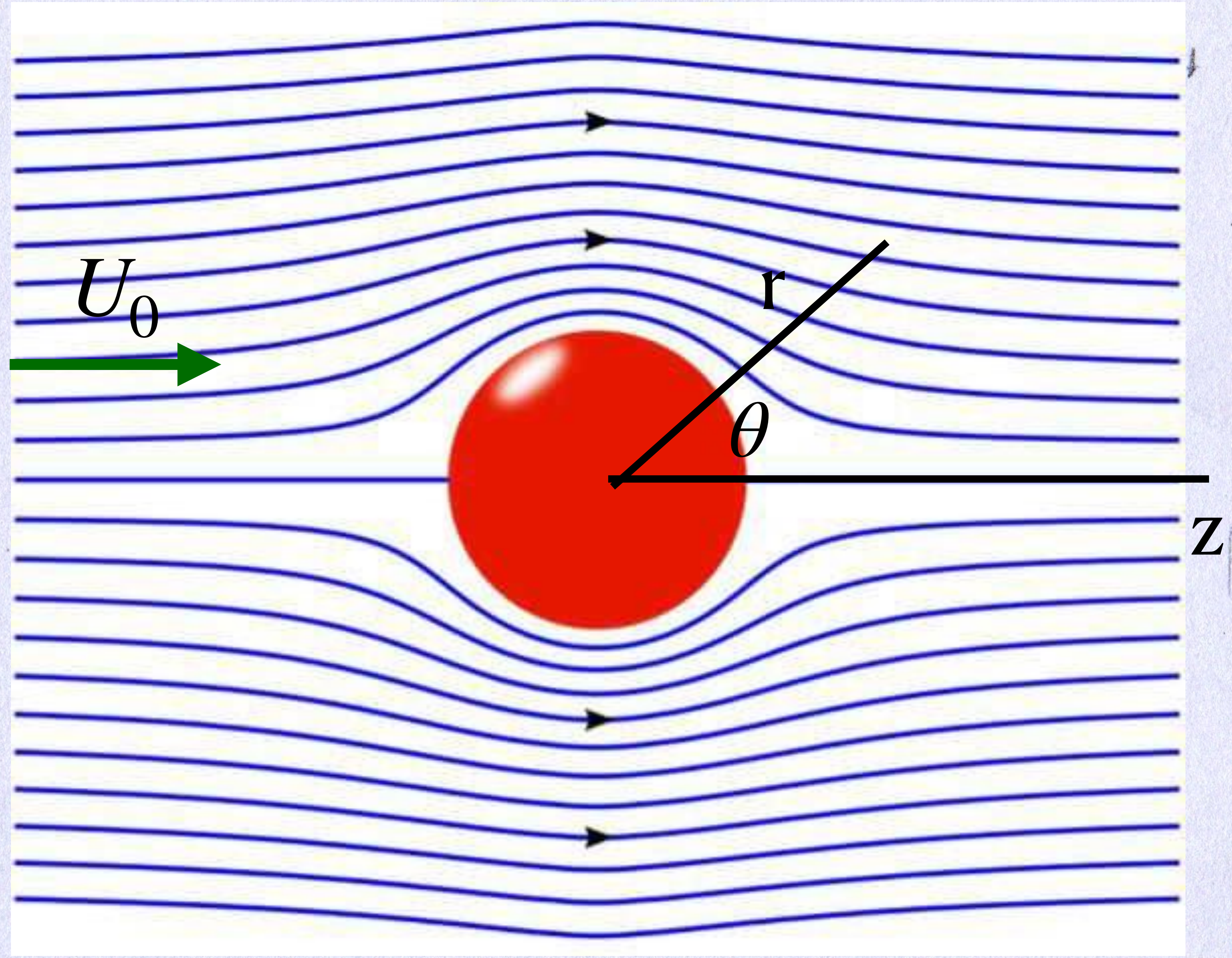
Ley de Stokes

Calculemos la fuerza que ejerce un flujo estacionario, laminar e incompresible sobre una esfera

$$\rho\Big(\underbrace{\cancel{\partial_t \underline{u}}}_{\substack{=0\\ (\text{estac.})}} + \underbrace{\cancel{(\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}}}_{\substack{=0\\ (Re \ll 1)}}\Big) = -\underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{u}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\nabla} p = \mu \nabla^2 \underline{u} \\ \underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0 \qquad \underline{u}(r=a) = 0 \end{array}}$$



El problema es axisimétrico. En esféricas:

$$\underline{u} = u_r(r,\theta)\,\hat{r} + u_\theta(r,\theta)\,\hat{\theta} \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 0 \longrightarrow \underline{u} = \underline{\nabla}\times(\psi\,\hat{\varphi})$$

$$u_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\partial_\theta\psi \qquad u_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_r\psi$$

La vorticidad resulta:

$$\underline{\omega} = \underline{\nabla}\times\underline{u} = -\frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\,E^2\psi$$

donde $E^2 = \partial^2_{rr} + \frac{\sin\theta}{r^2}\,\partial_\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\right)$

La ecuación N-S resulta:

$(\hat{r})$ $$\partial_r p = \frac{\mu}{r^2\sin\theta}\,\partial_\theta(E^2\psi)$$

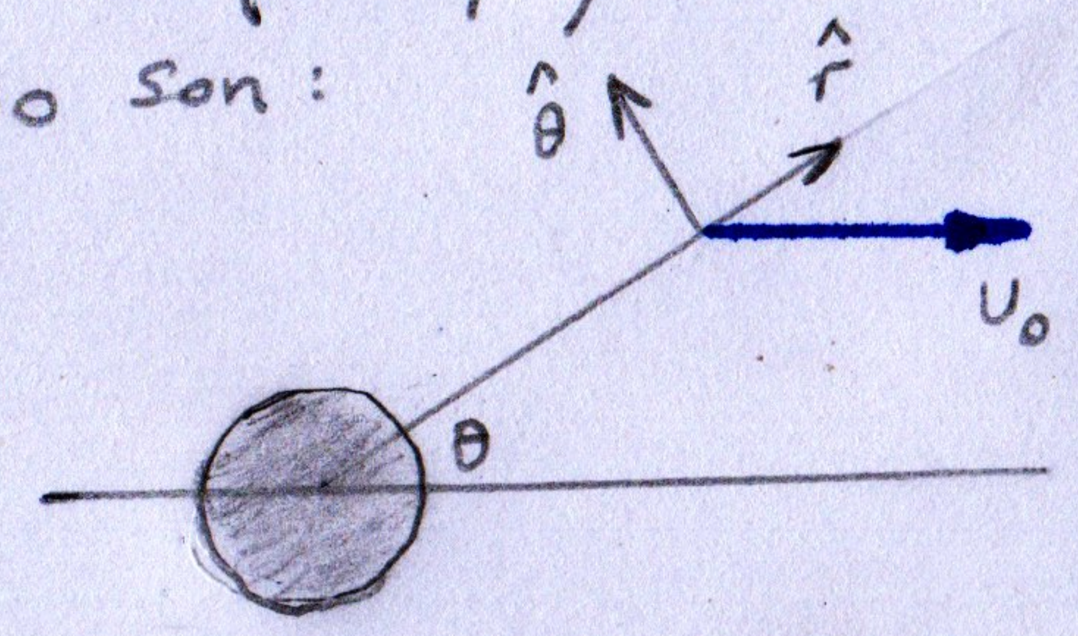
$(\hat{\theta})$ $$\frac{1}{r}\partial_\theta p = -\frac{\mu}{r\sin\theta}\,\partial_r(E^2\psi)$$

Como $\partial^2_{r\theta}p = \partial^2_{\theta r}p \longrightarrow E^2(E^2\psi) = 0$

Las condiciones de contorno son:

- $r = a \longrightarrow \partial_r\psi = 0 = \frac{1}{r}\partial_\theta\psi$
- $r = \infty \longrightarrow u_r = u_0\cos\theta$

$$u_\theta = -u_0\sin\theta$$



Ley de Stokes

$$r=\infty \rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_r = u_0\cos\theta = \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\partial_\theta\psi \\ u_\theta = -u_0\sin\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_r\psi \end{array}\right\} \rightarrow \psi_{(r\to\infty)} = \frac{u_0 r^2}{2}\sin^2\theta$$

Proponemos soluciones de la forma:

$$\psi(r,\theta) = f(r)\sin^2\theta \xrightarrow[E^2(E^2\psi)=0]{} \left(\partial^2_{rr} - \frac{2}{r^2}\right)^2 f = 0$$

Probamos $f(r)\sim r^\alpha \rightarrow [(\alpha-2)(\alpha-3)-2][\alpha(\alpha-1)-2]=0$

Resulta $\alpha = -1, 1, 2, 4$

Por lo tanto $f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4$

$$r=\infty \rightarrow \psi \rightarrow \frac{u_0 r^2}{2}\sin^2\theta \rightarrow D = 0, \quad C = \frac{u_0}{2}$$

$$r=a \rightarrow \partial_r\psi\Big|_{r=a} = 0 = \left(-\frac{A}{a^2} + B + u_0 a\right)\sin^2\theta$$

$$\partial_\theta\psi\Big|_{r=a} = 0 = \left(\frac{A}{a} + Ba + \frac{u_0}{2}a^2\right)2\sin\theta\cos\theta$$

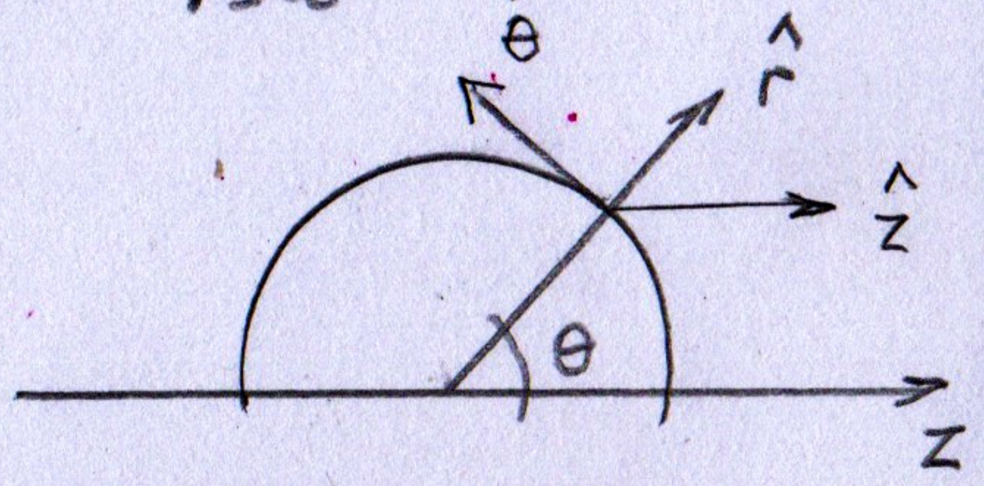
$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{u_0}{4}a^3 \\ B = -\frac{3}{4}u_0 a \end{array}\right\} \rightarrow \psi(r,\theta) = \frac{u_0}{4}\sin^2\theta\left(2r^2 + \frac{a^3}{r} - 3ar\right)$$

De cualquiera de las componentes de N-S integramos para obtener la presión:

$$p(r,\theta) = p_0 - \frac{3}{2}\frac{\mu u_0 a}{r^2}\cos\theta$$

Finalmente, para calcular la fuerza sobre la esfera:

$$\underline{F} = \oint\!\!\oint_{r=a} \underline{\underline{\sigma}}\cdot\hat{r}\,dS \xrightarrow[\partial_\varphi = 0]{} F_z = \oint\!\!\oint_{r=a} \hat{z}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\cdot\hat{r}\,dS$$



Como:

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu\,\partial_r u_r$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu r\,\partial_r\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{\mu}{r}\partial_\theta u_r$$

$$\hat{z}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\cdot\hat{r} = \sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta$$

Ley de Stokes

Necesitamos calcular

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\,\partial_\theta \psi = \frac{u_0 \cos\theta}{2r^2}\left(2r^2 + \frac{a^3}{r} - 3ar\right)$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_r \psi = -\frac{u_0 \sin\theta}{4r}\left(4r - \frac{a^3}{r^2} - 3a\right)$$

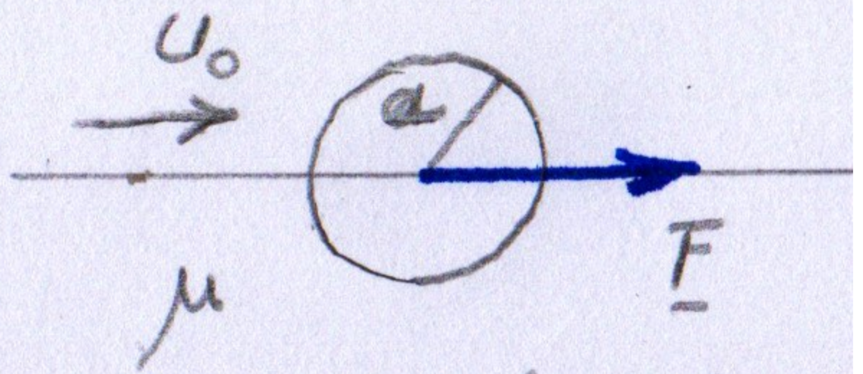
y luego:

$$\partial_r u_r\Big|_{r=a} = 0 \qquad \partial_\theta u_r\Big|_{r=a} = 0$$

$$\partial_r\left(\frac{u_\theta}{r}\right)\Big|_{r=a} = -\frac{3}{2}\,\frac{u_0 \sin\theta}{a^2}$$

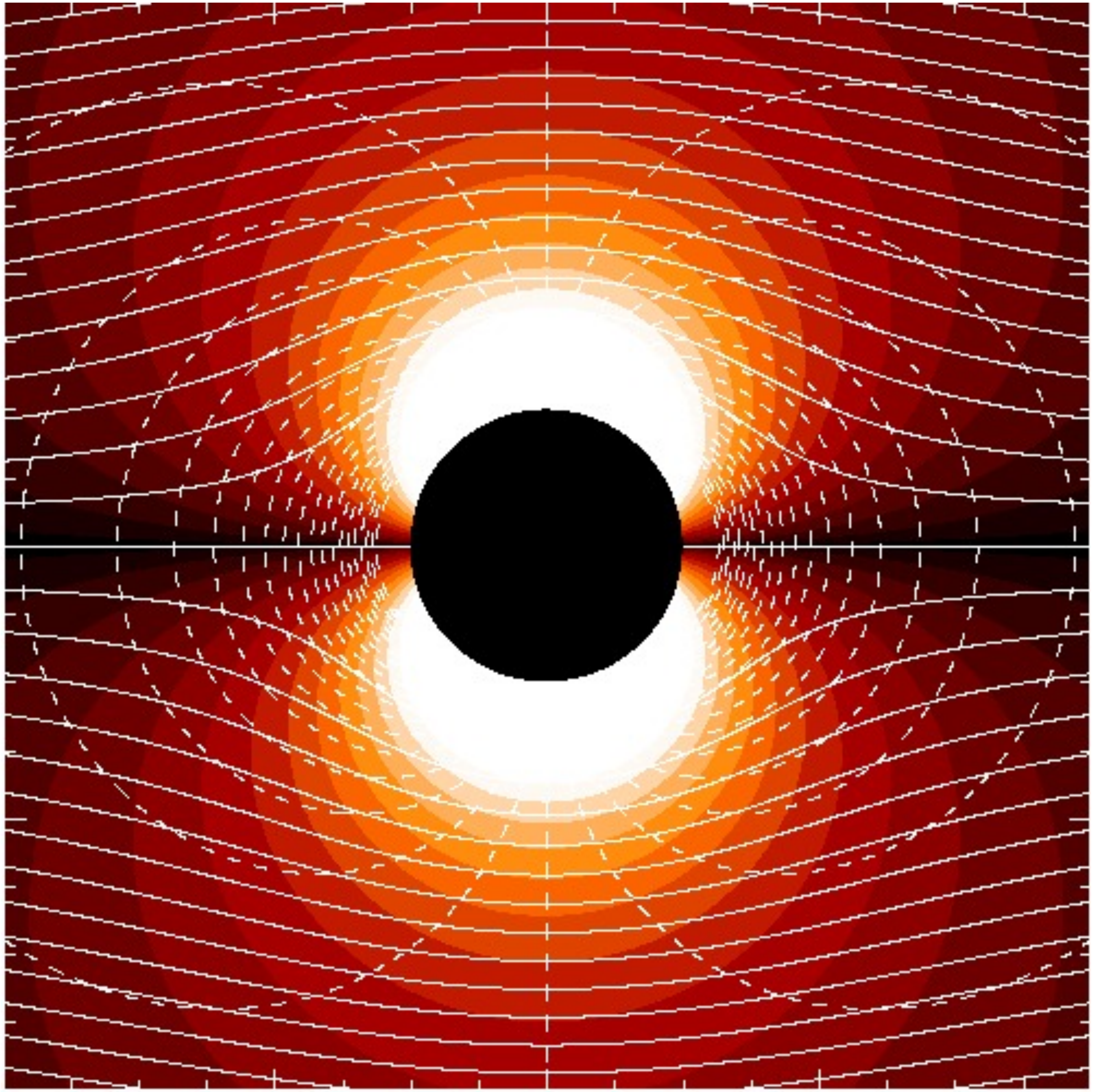
Finalmente

$$F_z = 6\pi\mu a u_0$$



- Las líneas continuas son líneas de corriente ($\psi = cte$)
- Las punteadas son de $p = cte$.
- La paleta de colores muestra vorticidad ω_φ

$$\omega_\varphi = -\frac{3}{2}\,\frac{u_0 a \sin\theta}{r^2}$$

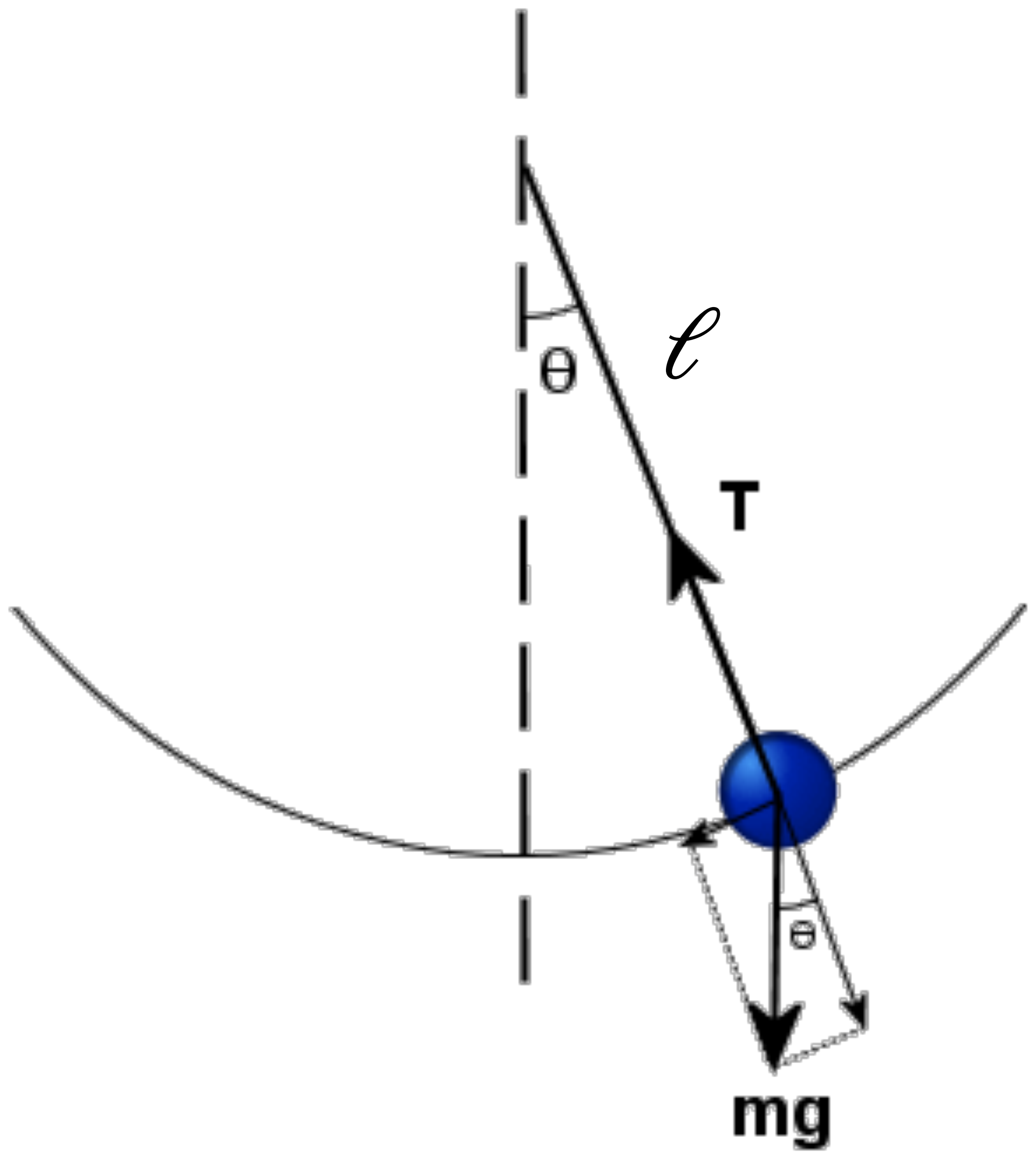


Análisis dimensional

El análisis dimensional se basa en que cualquier ecuación que exprese una ley física, debe satisfacerse independientemente del sistema de unidades empleado.

Cada sistema de unidades corresponde a una diferente elección de magnitudes primarias: L, T, M, ...

Veamos un ejemplo sencillo: **Cual es el período del péndulo?**



Supongamos que el período debe depender de

$$\tau \;=\; \tau\,(m, \ell, g)$$

Aquí es clave decidir de cuales parámetros depende el período τ , sin olvidar ninguno relevante. La forma funcional en la cual τ depende de los parámetros m, ℓ y g , debe ser tal que el resultado tenga unidades de tiempo. Es decir:

$$\tau \;\simeq m^{\alpha} \ell^{\beta} g^{\gamma}$$

Si prestamos atención a las unidades de cada cantidad:

$$T \;=\; M^{\alpha} L^{\beta} (\frac{L}{T^2})^{\gamma}$$

Si igualamos los exponentes de M, L y T de cada lado:

$$\alpha = 0$$

$$\beta + \gamma = 0$$

$$1 = -2\gamma$$

Es decir que: $\tau \simeq \sqrt{\ell / g}$

El resultado exacto (al resolver el problema) es: $\boxed{\tau = 2\pi\sqrt{\ell / g}}$

Teorema Pi de Buckingham

Sea $a = f(a_1, \dots, a_n)$ y $(a, a_1, \dots, a_n)$ expresados en términos de k $(k \leq n)$ unidades primarias.

Entonces, es posible formar $(n+1-k)$ cantidades adimensionales $(\pi, \pi_1, \dots, \pi_{n-k})$ tales que

$$\pi = F(\pi_1, \dots, \pi_{n-k})$$

Dem

Sin perder generalidad, elegimos como independientes a $(a_1, \dots, a_k)$, es decir

$$[a_1] = A_1 \quad , \dots , \quad [a_k] = A_k$$

Por hipótesis, las restantes pueden expresarse como combinación de estas:

$$[a] = A_1^{\alpha_1} \cdots A_k^{\alpha_k} \quad \dots \quad [a_{k+1}] = A_1^{\beta_1} \cdots A_k^{\beta_k} \quad \dots \quad [a_n] = A_1^{\varepsilon_1} \cdots A_k^{\varepsilon_k}$$

Si ahora reescalamos las k magnitudes independientes (pasamos de m a cm, por ejemplo)

$$\left.\begin{aligned} a_1' &= b_1 a_1 \\ &\vdots \\ a_k' &= b_k a_k \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} a' &= b_1^{\alpha_1} \cdots b_k^{\alpha_k} a \\ a_{k+1}' &= b_1^{\beta_1} \cdots b_k^{\beta_k} a_{k+1} \\ &\vdots \\ a_n' &= b_1^{\varepsilon_1} \cdots b_k^{\varepsilon_k} a_n \end{aligned}$$

Desde luego: $a' = f(a_1' \dots a_n')$, es decir que

$$b_1^{\alpha_1} \cdots b_k^{\alpha_k} a = f(b_1 a_1, \dots, b_k a_k, b_1^{\beta_1} \cdots b_k^{\beta_k} a_{k+1}, \dots, b_1^{\varepsilon_1} \cdots b_k^{\varepsilon_k} a_n)$$

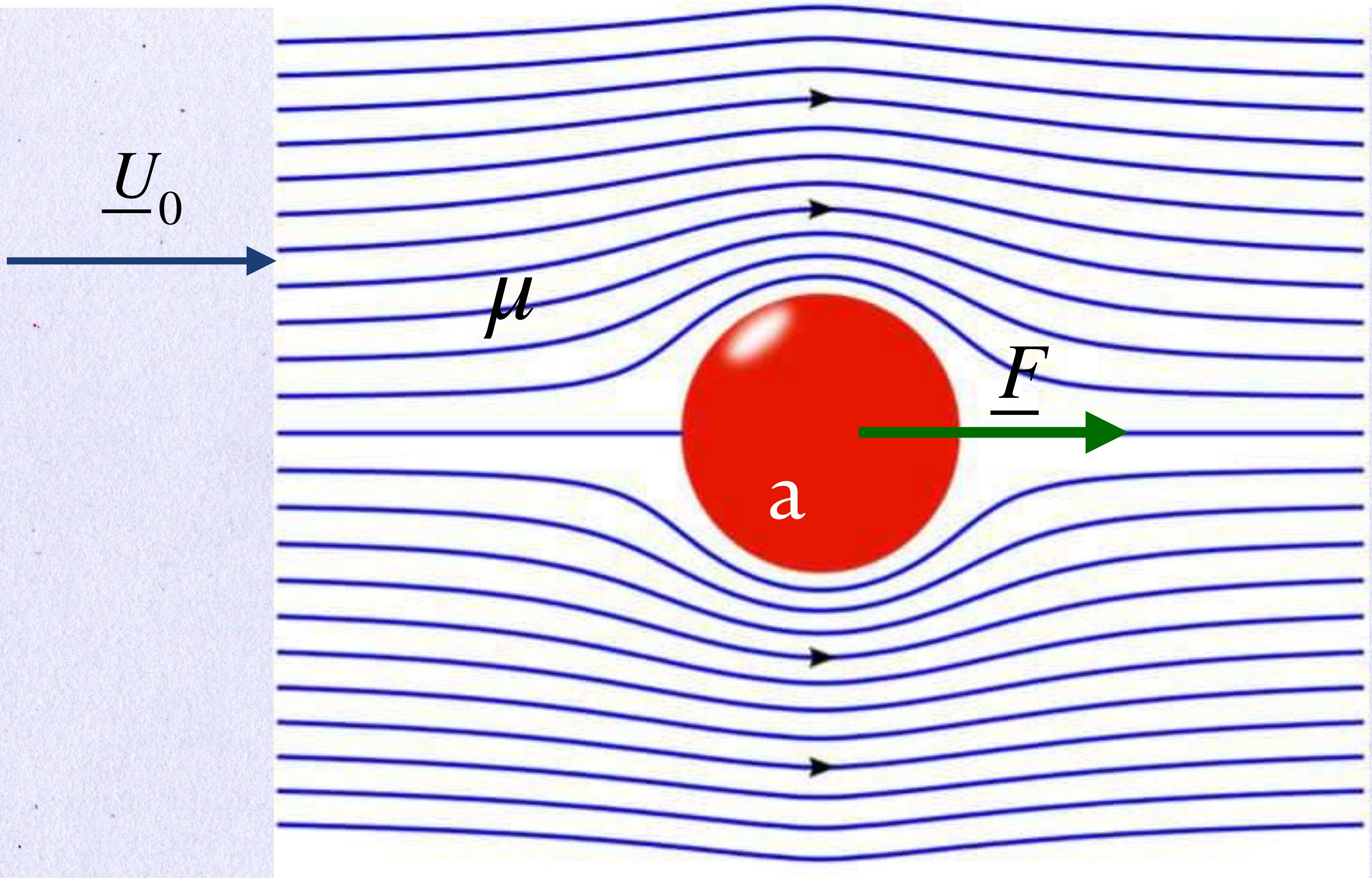
Elegimos un reescalamiento que deje a las cantidades primarias como unidades patrón:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1} \\ &\vdots \\ b_k &= \frac{1}{a_k} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \frac{a}{a_1^{\alpha_1} \cdots a_k^{\alpha_k}} = f\left(1, \dots, 1, \frac{a_{k+1}}{a_1^{\beta_1} \cdots a_k^{\beta_k}}, \dots, \frac{a_n}{a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_k^{\varepsilon_k}}\right)$$

Definimos: $\pi = \dfrac{a}{a_1^{\alpha_1} \cdots a_k^{\alpha_k}} \quad \dots \quad \pi_1 = \dfrac{a_{k+1}}{a_1^{\beta_1} \cdots a_k^{\beta_k}} \quad \dots \quad \pi_{n-k} = \dfrac{a_n}{a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_k^{\varepsilon_k}}$

y $F(\underbrace{* \dots *}_{n-k}) = f(\underbrace{1 \dots 1}_{k}, \underbrace{* \dots *}_{n-k}) \longrightarrow \pi = F(\pi_1, \dots, \pi_{n-k})$

Ejemplo 1: Ley de Stokes



Cuánto vale F ?

Supongamos que $F = F(\mu, a, U_0)$

- El teorema π no me dice de que parámetros depende la incógnita.
- Me dice cuantos numeros Pi, pero no dice cuales son.

En este caso:

$$\left.\begin{array}{l} n = 3 \\ k = 3 \ (M, L, T) \end{array}\right\} \rightarrow n - k + 1 = 1 \longrightarrow \pi = cte$$

$$\left.\begin{array}{l} [\mu] = \frac{M}{LT} \\ [a] = L \\ [U_0] = \frac{L}{T} \\ [F] = \frac{ML}{T^2} \end{array}\right\} \rightarrow F \simeq \mu^\alpha a^\beta U_0^\gamma \quad \therefore \frac{ML}{T^2} = \left(\frac{M}{LT}\right)^\alpha L^\beta \left(\frac{L}{T}\right)^\gamma$$

$$\left.\begin{array}{ll} M & 1 = \alpha \\ L & 1 = -\alpha + \beta + \gamma \\ T & 2 = \alpha + \gamma \end{array}\right\} \xrightarrow[\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1]{} F \simeq \mu a U_0$$

- La clase pasada obtuvimos la expresión exacta:

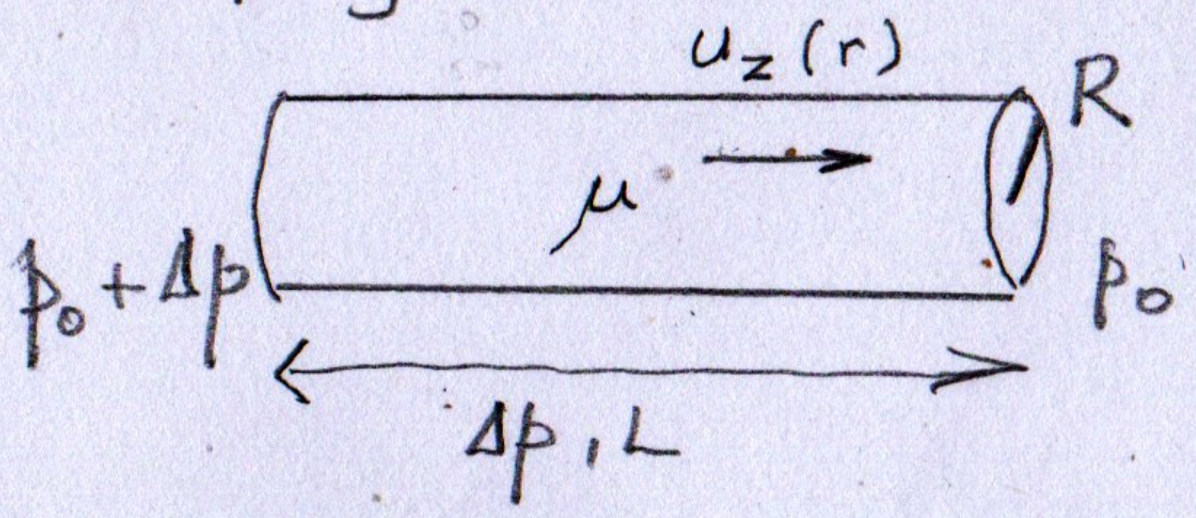
$$\boxed{\underline{F} = 6\pi \mu a \underline{U}_0.}$$

- Noten que si en vez de una esfera fuera una piedra de tamaño lineal a, solo cambiará el factor adimensional 6π según sea la forma de la piedra.

Ejemplo 2: Flujo de Poiseuille

Un flujo viscoso a través de un cilindro es un problema muy relevante (acueducto, oleoducto, flujo sanguineo, etc), conocido como flujo de Poiseuille.

En el caso incompresible, estacionario y a bajo Reynolds ($Re \ll 1$) es



$$\rho\left[\underbrace{\cancel{\partial_t \underline{u}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{(\underline{u}\cdot\underline{\nabla})\underline{u}}}_{=0}\right] = -\underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{u}$$

Noten que no depende de ρ.

Cuanto vale el caudal volumétrico Q ?

$$Q = Q\left(\frac{\Delta p}{L}, R, \mu\right)$$

$[Q] = \frac{L^3}{T}$ $\qquad$ $n=3,\ k=3 \rightarrow n-k+1 = 1$

$\left[\frac{\Delta p}{L}\right] = \frac{M}{L^2T^2}$

$$Q = \left(\frac{\Delta p}{L}\right)^{\alpha} R^{\beta} \mu^{\gamma}$$

$$\therefore \frac{L^3}{T} = \left(\frac{M}{L^2T^2}\right)^{\alpha} L^{\beta} \left(\frac{M}{LT}\right)^{\gamma}$$

$$\left.\begin{array}{ll} M & \alpha+\gamma = 0 \\ L & 3 = -2\alpha+\beta-\gamma \\ T & 1 = 2\alpha+\gamma \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l}\alpha = 1 \\ \beta = 4 \\ \gamma = -1\end{array} \qquad Q \simeq \frac{\Delta p}{\mu L} R^4$$

El caudal es proporcional al salto de presión $\frac{\Delta p}{L}$, inversamente prop. a μ y depende fuertemente del radio del tubo (como R^4).

Cuanto vale la velocidad $u_z(r)$?

$$u_z = u_z\left(r, R, \frac{\Delta p}{\mu L}\right) \qquad \left[\frac{\Delta p}{\mu L}\right] = \frac{1}{LT}$$

Ahora: $\left.\begin{array}{l} n=3 \\ k=2 \end{array}\right\} \rightarrow n-k+1 = 2 \rightarrow \Pi = F(\Pi_1)$

$$u_z \simeq \frac{\Delta p}{\mu L} R^2 F\left(\frac{r}{R}\right)$$

La condicion de contorno debe ser $u_z(r=R) = 0$

Si planteamos en cilíndricas:

$$\boxed{u_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}\left(R^2 - r^2\right)}$$