Estructura de la Materia 2

Primer Cuatrimestre de 2021

Guía 2: Electrones Libres. Electrones en Presencia de un campo magnético.

1. TEORIA CLASICA DE UN GAS DE ELECTRONES (MODELO DE DRUDE).
   Tomemos un metal típico, el potasio, como ejemplo.

   a) Calcule cuál es la densidad de electrones de conducción, suponiendo $Z = 1$.
   b) Encuentre cuál es el valor de r_S (compare con la distancia a primeros vecinos 4,53Å).
   c) Encuentre como varía el tiempo de relajación en función de T, sabiendo que $\rho(77\text{K}) = 1{,}38\text{m}\Omega$ cm y $\rho(273\text{K}) = 6{,}1\text{m}\Omega$ cm.
   d) A partir de la relación $1/2mv_o^2 = 3/2k_BT$, calcule el camino libre medio electrónico en este modelo.
   e) Calcule la constante Hall y compare con el valor experimental ($R_H = -4{,}964 \times 10^{-24}$CGS).
      Densidad del potasio: 0,91g cm^{-3}. $N_A = 6{,}02217 \times 10^{23}\text{mol}^{-1}$. $A = 39$.

2. ELECTRONES LIBRES

   a) Demuestre que la energía cinética de un gas tridimensional de N electrones libres a $T = 0$K es $E_0 = \frac{3}{5}NE_F$, donde E_F es la energía de Fermi del sistema.
   b) Derive la relación que conecta la presión y el volumen para un gas de electrones a 0K. Note que puede ser escrita como $p = (2/3)(E_o/V)$.
   c) Muestre que el módulo de bulk de un gas de electrones a 0K es $B = 5p/3 = 10E_o/9V$

3. Estime la temperatura de Fermi de:

   a) ^3He líquido (densidad 81kg m^{-3}).
   b) Los neutrones en una estrella de neutrones (densidad 10^{17}kg m^{-3}).

4. DENSIDAD DE NIVELES Y DE ESTADOS
   Para un gas de electrones libres, calcule la densidad de niveles en el espacio $\mathbf{k}$ y la densidad de estados en función de la energía para los siguientes casos (tenga en cuenta el espín):

   a) Una caja unidimensional de longitud L.
   b) Una caja bidimensional cuadrada de lado L.
   c) Una caja tridimensional cúbica de arista L.

5. GAS DE ELECTRONES BIDIMENSIONAL
   Sea un gas de electrones libres bidimensional:

a) ¿Cuál es la relación entre n y k_F?.

b) Utilizando la densidad de estados calculada en el punto b) del item anterior, encuentre que

$$\mu + k_B T \ln(1 + e^{-\mu/k_B T}) = E_F$$

c) Repita el cálculo a partir de la expansión de Sommerfeld. Explique que sucede.

6. SUSCEPTIBILIDAD DE PAULI
Considere la interacción de Zeeman para los electrones de conducción de un metal

$$\hat{H} = \sum_{l,\sigma} \frac{\hat{p}_{l,\sigma}^2}{2m} + \mu_B \sum_l \hat{\sigma}_{z,l},$$

siendo $\hat{\sigma}_z$ la matriz z de Pauli y μ_B el magneton de Bohr.

a) Encontrar una expresión para la susceptibilidad magnética

$$\chi_z = \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial B}|_{N,B=0},$$

como función de la temperatura y la densidad de estados del metal.

b) Mostrar que el efecto del campo magnético puede representarse en términos de potenciales químicos diferentes $\mu_\uparrow$ y $\mu_\downarrow$ para los electrones con spin $\uparrow$ y $\downarrow$, respectivamente.

c) Encontrar el comportamiento de χ_z a temperaturas bajas ($T \ll T_F$) y altas ($T \gg T_F$). Mostrar que para un gas de N electrones en un volumen $V = L^3$

$$\chi_z \simeq \begin{cases} \frac{1}{V}\frac{3\mu_B^2}{2E_F} & T \ll T_F \\ \frac{1}{V}\frac{\mu_B^2}{k_B T} & T \gg T_F. \end{cases}$$

d) Teniendo en cuenta densidades de electrones típicas para electrones en metales, discutir cuál de los dos comportamientos es realista a temperatura ambiente.

7. CALOR ESPECIFICO DE METALES

a) Demuestre que el calor específico de un gas de electrones libres depende linealmente de la temperatura.

b) Calcule la contribución de los electrones de conducción a la energía libre de Helmholtz y al coeficiente de expansión térmica de un metal.

8. Considerar un gas bidimensional de electrones en el plano xy, en presencia de un campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Si la densidad de electrones es tal que están ocupados los p niveles de Landau de más baja energía y una fracción λ del nivel $p+1$.

a) Encontrar la energía por unidad de área del estado fundamental de este sistema.

b) Encontrar el cambio en la energía por unidad de área

$$\frac{\Delta E}{A} = \frac{E_0(B) - E_0(0)}{A}$$

como función del campo magnético, considerarndo fija la densidad de electrones n. Discutir cómo se espera que cambie la energía de Fermi y las propiedades físicas que dependen de este parámetro como función de B.

9. Para poder observar efectos como el de de Haas van Alphen o el efecto Hall cuántico, es necesario bajar la temperatura para que los efectos térmicos no enmascaren la estructura de niveles de Landau. ¿Cuánto hay que bajar la temperatura para que se cumplan las condiciones adecuadas para la observación de estos efectos, si se aplica a un material un campo magnético de 10T?

10. Calcular la densidad de estados para cada especie de spin para los electrones de un metal, modelado como un gas de N electrones en un cubo de lado L en presencia de un campo magnético externo. Discutir el efecto de despreciar la interacción de Zeeman. Comparar con la densidad de estados de un gas sin campo magnético externo.

11. Considerar un metal a $T = 0$. Mostrar que los términos de Pauli y de Landau de la susceptibilidad magnética satisfacen

$$\chi_{Landau} = -\frac{1}{3}\chi_{Pauli}$$

de manera que la susceptibilidad total de los electrones de conducción en los metales es siempre paramagnética, $\chi_{tot} = \frac{2}{3}\chi_{Pauli}$.