

# Conducción en metales

Prof. Alberto Camjayi

# Introducción

## **Transporte en la aproximación semiclásica**

Con la dinámica establecida en la clase anterior, estamos en condiciones de obtener las propiedades de transporte en metales.

Las corrientes y los campos aplicados están relacionados linealmente y nuestro objetivo será obtener las constantes que los relacionan: los coeficientes de transporte.

Implícitas en nuestra discusión están las aproximaciones de campos débiles y sistemas cerca del equilibrio termodinámico.

# Introducción

## Función de distribución

Las ecuaciones de movimiento semiclásicas aplican a una partícula. Por supuesto, ahora estamos interesados en el sistema termodinámico, y por lo tanto consideraremos la función de distribución que da cuenta del número de electrones con un dado espín e índice de banda, en un volumen del espacio de fases a un cierto tiempo:

$$dN_{n\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = f_{n\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) \frac{d\mathbf{r}d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}.$$

A partir de ella podemos obtener distintas magnitudes físicas, como la corriente eléctrica por ejemplo.

# Introducción

## Ecuación de Boltzmann

Para evaluar la evolución de la función de distribución, utilizaremos la ecuación de Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{col}} \equiv \mathcal{I}_{\mathbf{k}}.$$

La misma da cuenta de la evolución de la función de distribución en términos de procesos difusivos y de colisiones. La última integral de colisiones, que da lugar a los efectos disipativos, en principio depende tanto de posición como de momento y tiempo. En nuestro caso, la variable más importante es el momento y, por lo tanto, haremos esa distinción explícita.

# Ecuación de Boltzmann

## Aproximación del tiempo de relajación

Un modelo sencillo de la integral de colisiones es la aproximación del tiempo de relajación,

$$\mathcal{I}_{\mathbf{k}} = -\frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) - f^0(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\tau(\varepsilon(\mathbf{k}))},$$

donde  $f^0$  es la función estática de equilibrio (local).

Por supuesto, otras alternativas más específicas o elaboradas son posibles.

A partir de ahora, descartamos los índices de banda (no hay transiciones) y espín (es un buen número cuántico, sin interacción espín-órbita).

# Ecuación de Boltzmann

## Equilibrio local

La distribución de Fermi es la solución estacionaria y uniforme de la ecuación de Boltzmann.

Dado que las colisiones son locales en el espacio y que las mismas actúan en escalas de tiempos cortos restableciendo el equilibrio local, pondremos:

$$f^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \left[ \exp \left( \frac{\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu(\mathbf{r})}{k_B T(\mathbf{r})} \right) + 1 \right]^{-1}$$

suponiendo que la distribución de equilibrio local es independiente del tiempo.

# Ecuación de Boltzmann

## Equilibrio local

Para obtener una solución de la ecuación de Boltzmann, podemos escribir a la función de distribución como

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = f^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$$

y resolver para  $\delta f$ .

Los otros ingredientes son las ecuaciones de movimiento semiclásicas y la aproximación del tiempo de relajación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{\hbar} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{k}} + \\ + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f^0}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{\hbar} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \cdot \frac{\partial f^0}{\partial \mathbf{k}} = - \frac{\delta f}{\tau_{\mathbf{k}}} \end{aligned}$$

# Ecuación de Boltzmann

## Equilibrio local

Faltan evaluar los gradientes de  $f^0$ :

$$\frac{\partial f^0}{\partial \mathbf{r}} = \frac{-e^{(\varepsilon - \mu)/k_B T}}{[e^{(\varepsilon - \mu)/k_B T} + 1]^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu(\mathbf{r})}{k_B T(\mathbf{r})} \right)$$

$$= \frac{e^{(\varepsilon - \mu)/k_B T}}{[e^{(\varepsilon - \mu)/k_B T} + 1]^2} \frac{1}{k_B T} \left( \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\varepsilon - \mu}{T} \frac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right)$$

$$= \left( -\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right) \left[ \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\varepsilon - \mu}{T} \frac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right]$$



# Ecuación de Boltzmann

## Equilibrio local

Faltan evaluar los gradientes de  $f^0$ :

$$\frac{\partial f^0}{\partial \mathbf{k}} = \frac{-e^{(\varepsilon - \mu)/k_B T}}{[e^{(\varepsilon - \mu)/k_B T} + 1]^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \left( \frac{\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu(\mathbf{r})}{k_B T(\mathbf{r})} \right)$$

$$= \frac{-e^{(\varepsilon - \mu)/k_B T}}{[e^{(\varepsilon - \mu)/k_B T} + 1]^2} \frac{1}{k_B T} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}$$

$$= \left( \frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \left( \frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right) \hbar \mathbf{v}$$

# Ecuación de Boltzmann

## Boltzmann en aproximación semiclásica

Juntando los resultados obtenemos la ecuación de Boltzmann en la aproximación semiclásica y de tiempo de relajación:

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{\hbar} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{k}} +$$
$$+ \mathbf{v} \cdot \left[ e\mathbf{E} + \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\varepsilon - \mu}{T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right] \left( \frac{-\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right) = -\frac{\delta f}{\tau_{\mathbf{k}}}$$

# Ecuación de Boltzmann

## Linealización

Como el campo eléctrico es pequeño y el sistema está cerca del equilibrio el término,  $\mathcal{O}(\delta f) \sim \mathcal{O}(E)$ :

$$-\frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{k}} \sim \mathcal{O}(2)$$

Por otra parte, el gradiente de espacial también es de segundo orden, porque las variaciones espaciales son lentas:

$$\frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} \sim \mathcal{O}(2)$$

# Ecuación de Boltzmann

## Boltzmann linealizada

Así arribamos al resultado buscado:

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} - \frac{e}{c\hbar} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{k}} + \mathbf{v} \cdot \left[ e\mathbf{E} + \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\varepsilon - \mu}{T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right] \left( \frac{-\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right) = -\frac{\delta f}{\tau_{\mathbf{k}}}$$

# Conductividad metálica

## Conductividad ac

Analicemos el caso donde  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla T = 0$ ,  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(\omega)e^{-i\omega t}$ . Como el campo eléctrico es uniforme, lo mismo esperamos de la función de distribución.

La ecuación de Boltzmann en este caso es:

$$\frac{\partial \delta f(\mathbf{k}, t)}{\partial t} - e\mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}(\omega)e^{-i\omega t} \frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} = -\frac{\delta f(\mathbf{k}, t)}{\tau_{\mathbf{k}}},$$

y la solución

$$\delta f(\mathbf{k}, t) = \frac{e\mathbf{E}(\omega) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k})\tau_{\mathbf{k}}}{1 - i\omega\tau_{\mathbf{k}}} \frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} e^{-i\omega t}.$$

# Conductividad metálica

## Conductividad ac

Analicemos el caso donde  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla T = 0$ ,  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(\omega)e^{-i\omega t}$ .  
La densidad de corriente está dada por la expresión:

$$\mathbf{j} = -2e \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (f^0 + \delta f) \mathbf{v} = -e \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \delta f \mathbf{v}.$$

En la integral, de la función de distribución, solo  $\delta f$  contribuye ya que  $f^0(\mathbf{k}) = f^0(-\mathbf{k})$ .

Reemplazando...

# Conductividad metálica

## Conductividad ac

Analicemos el caso donde  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla T = 0$ ,  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(\omega)e^{-i\omega t}$ .  
La densidad de corriente es:

$$j^\alpha(t) = -e \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \delta f v^\alpha$$

$$= e^{-i\omega t} e^2 E^\beta \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \frac{\tau_{\mathbf{k}} v^\alpha(\mathbf{k}) v^\beta(\mathbf{k})}{1 - i\omega\tau_{\mathbf{k}}} \left( -\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right),$$

donde los índices griegos corren en las coordenadas cartesianas y usamos la convención de Einstein.

# Conductividad metálica

## Conductividad ac

Analizamos el caso donde  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla T = 0$ ,  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(\omega)e^{-i\omega t}$ .  
La densidad de corriente es:

$$j^\alpha(t) = -e \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \delta f v^\alpha \quad j^\alpha(\omega)$$

$$= e^{-i\omega t} e^2 E^\beta \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \frac{\tau_{\mathbf{k}} v^\alpha(\mathbf{k}) v^\beta(\mathbf{k})}{1 - i\omega\tau_{\mathbf{k}}} \left( -\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right),$$

donde los índices griegos corren en las coordenadas cartesianas y usamos la convención de Einstein.



# Conductividad metálica

## Conductividad ac

Analicemos el caso donde  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla T = 0$ ,  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(\omega)e^{-i\omega t}$ .

Como el campo y la corriente se relacionan linealmente,

$j^\alpha(\omega) = \sigma_{\alpha\beta}(\omega)E^\beta(\omega)$  podemos leer la expresión del tensor conductividad eléctrica:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega) = e^2 \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \frac{\tau_{\mathbf{k}} v^\alpha(\mathbf{k}) v^\beta(\mathbf{k})}{1 - i\omega\tau_{\mathbf{k}}} \left( -\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right)$$

# Conductividad metálica

## Conductividad ac

### Observaciones

Como no consideramos transiciones interbanda, cada banda parcialmente ocupada contribuye a la conductancia total.

$$\sigma_{\text{tot}} = \sum_n \sigma_n$$

# Conductividad metálica

## Conductividad ac

### Observaciones

Debido a la presencia de la derivada de la función de Fermi, es evidente que la conductividad es una propiedad de la superficie de Fermi.

Para  $k_B T \ll \varepsilon_F$ ,  $-\partial f^0 / \partial \varepsilon \approx \delta(\varepsilon_F - \varepsilon(\mathbf{k}))$  y la integral puede pasarse a una de superficie usando

$$d\mathbf{k} = \frac{d\varepsilon dS_\varepsilon}{|\partial \varepsilon / \partial \mathbf{k}|} = \frac{d\varepsilon dS_\varepsilon}{\hbar |\mathbf{v}|}$$

donde el diferencial de superficie recorre la superficie de energía constante  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_F$ .

# Conductividad metálica

## Conductividad ac

### Observaciones

Debido a la presencia de la derivada de la función de Fermi, es evidente que la conductividad es una propiedad de la superficie de Fermi,

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{e^2}{4\pi^3\hbar} \frac{\tau(\varepsilon_F)}{1 - i\omega\tau(\varepsilon_F)} \int dS_F \frac{v^\alpha(\mathbf{k})v^\beta(\mathbf{k})}{|\mathbf{v}_\mathbf{k}|}. \quad (T \ll T_F)$$

# Conductividad metálica

## Conductividad ac

### Observaciones

El resultado de Drude puede derivarse como un caso particular de este formalismo. Si consideramos bandas parabólicas

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m^*} \rightarrow v^\alpha(\mathbf{k}) = \frac{\hbar k^\alpha}{m^*} \text{ y } \tau = \text{cte.}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega) = \delta_{\alpha\beta} \frac{e^2 \tau}{1 - i\omega\tau} 2 \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\hbar k^\alpha \hbar k^\beta}{m^{*2}} \left( -\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right)$$

$$= \delta_{\alpha\beta} \frac{2}{3m^*} \frac{e^2 \tau}{1 - i\omega\tau} \int d\varepsilon g(\varepsilon) \varepsilon \left( -\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right).$$

# Conductividad metálica

## Conductividad ac

### Observaciones

El resultado de Drude puede derivarse como un caso particular de este formalismo. Reemplazando la densidad de estados de una banda parabólica (libre en 3D, es una raíz cuadrada), podemos integrar. Esquemáticamente:

$$\begin{aligned} \int d\varepsilon g(\varepsilon) \varepsilon \left( -\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right) &= \int d\varepsilon f^0(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\varepsilon g(\varepsilon)) \\ &= \frac{3}{2} \int d\varepsilon f^0(\varepsilon) g(\varepsilon) = \frac{3}{2} n \end{aligned}$$

# Conductividad metálica

## Conductividad ac

### Observaciones

El resultado de Drude puede derivarse como un caso particular de este formalismo. Finalmente, evaluando la integral, llegamos a:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\text{Drude}} = \frac{ne^2\tau}{m^*} \frac{\delta_{\alpha\beta}}{1 - i\omega\tau}$$

# Conductividad metálica

## Conductividad ac

### Observaciones

Corriente por agujeros. La corriente, como vimos anteriormente, puede ponerse en función de los estados desocupados de una banda, los agujeros.

$$\mathbf{j} = +2e \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (1 - f) \mathbf{v} \equiv +2e \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \bar{f} \mathbf{v}$$

Si reescribimos las ecuaciones de Boltzmann en términos de  $\bar{f}$ , obtendremos exactamente las mismas expresiones que para los electrones, con la distribución complementaria:

$$\bar{f}^0 = (1 - f^0) = \left[ \exp \left( \frac{\mu(\mathbf{r}) - \varepsilon(\mathbf{k})}{k_B T(\mathbf{r})} \right) + 1 \right]^{-1}$$



# Conductividad metálica

## Conductividad dc

El caso independiente del tiempo se obtiene simplemente removiendo la dependencia temporal  $e^{-i\omega t}$ :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\text{dc}} = e^2 \int_{\text{1BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \tau_{\mathbf{k}} v^{\alpha}(\mathbf{k}) v^{\beta}(\mathbf{k}) \left( -\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right)$$

# Conductividad metálica

## Efecto Hall en campos intensos

Si tomamos la configuración normal del efecto Hall  $\mathbf{E} = E\hat{y}$  y  $\mathbf{B} = B\hat{z}$  y suponemos que el campo magnético es lo suficientemente intenso como para ignorar la integral de colisiones (el electrón puede completar varias órbitas antes de chocar), la ecuación de Boltzmann es:

$$-e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \frac{f^0}{\partial\varepsilon} - \frac{e}{c\hbar} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \cdot \frac{\partial\delta f}{\partial\mathbf{k}} = 0$$

$$\implies \delta f = \frac{c\hbar E}{H} k_x \frac{\partial f^0}{\partial\varepsilon}$$

(Este resultado vale si la órbita es cerrada en la 1BZ).

# Conductividad metálica

## Efecto Hall en campos intensos

La corriente se obtiene de

$$j_x = 2ec \frac{E}{H} \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_x} \frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon}$$
$$= 2ec \frac{E}{H} \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_x \frac{\partial f^0}{\partial k_x}$$

Integrando por partes y tomando como cero a la función de Fermi en el borde de la 1BZ.

# Conductividad metálica

## Efecto Hall en campos intensos

Integrando por partes y tomando como cero a la función de Fermi en el borde de la 1BZ.

$$j_x = -2ec \frac{E}{H} \int_{1BZ} \frac{dk}{(2\pi)^3} f^0 = -\frac{nec}{H} E$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\frac{nec}{H}$$

independiente de la estructura de bandas particular.

# Conductividad metálica

## Efecto Hall en campos intensos

Para agujeros el resultado cambia de signo y la densidad es ahora de agujeros:

$$\sigma_{xy}^h = -\sigma_{yx}^h = +\frac{n^h ec}{H}$$

Por lo tanto,

$$R_H = \frac{E_y}{j_x H_z} = -\frac{1}{nec}.$$

# Conducción del calor

## Corriente térmica electrónica

Vamos a analizar ahora la conducción del calor por los electrones (los fonones aportan otra contribución).

Si tomamos un volumen fijo dentro del sólido cuya temperatura es constante, la tasa de cambio de calor es proporcional al cambio de entropía

$$dQ = TdS.$$

Esto asume que los cambio de entropía se dan por el cambio en el número de electrones y no por procesos disipativos (scattering, efecto Joule, etc.).

Sin embargo, esos efectos son de segundo orden en los campos aplicados y, por lo tanto, pueden ignorarse en una teoría lineal.

# Conducción del calor

## Corriente térmica electrónica

Como el volumen es fijo  $TdS = dU - \mu dN$ . En función de las corrientes resulta

$$\dot{\mathbf{j}}_q = T\dot{\mathbf{j}}_S = \dot{\mathbf{j}}_\varepsilon - \mu\dot{\mathbf{j}}_n,$$

donde

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{j}}_\varepsilon \\ \dot{\mathbf{j}}_n \end{Bmatrix} = \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \begin{Bmatrix} \varepsilon(\mathbf{k}) \\ 1 \end{Bmatrix} \mathbf{v}(\mathbf{k}) f(\mathbf{k})$$

La corriente eléctrica y de partículas son proporcionales  $\dot{\mathbf{j}} = -e\dot{\mathbf{j}}_n$ .

# Conducción del calor

## Corriente térmica electrónica

Haciendo uso de las definiciones, la densidad de corriente térmica es

$$\mathbf{j}_q = \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} [\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu] \mathbf{v}(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}).$$

Si consideramos el caso donde tenemos un gradiente térmico estacionario en las ecuaciones de Boltzmann (y un campo eléctrico uniforme y estático), podemos calcular la función de distribución y la corriente térmica.



# Conducción del calor

## Corriente térmica electrónica

Si consideramos el caso donde tenemos un gradiente térmico estacionario en las ecuaciones de Boltzmann (y un campo eléctrico uniforme y estático), podemos calcular la función de distribución.

$$\delta f = -\tau(\varepsilon) \mathbf{v} \cdot \left( e\mathcal{E} + \frac{\varepsilon - \mu}{T} \nabla T \right) \left( \frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right)$$

donde introducimos  $\mathcal{E} = \mathbf{E} + \frac{\nabla \mu}{e}$ .

# Conducción del calor

## Corriente térmica electrónica

Escribiendo explícitamente las densidades de corriente eléctrica y térmica, se obtiene:

$$\mathbf{j} = \mathbf{L}^{11} \mathcal{E} + \mathbf{L}^{12} (-\nabla T)$$

$$\mathbf{j}_q = \mathbf{L}^{21} \mathcal{E} + \mathbf{L}^{22} (-\nabla T)$$

donde los coeficientes de transporte son matrices definidas en términos de

$$\mathcal{L}^{(\alpha)} = e^2 \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \tau_{\mathbf{k}} \mathbf{v}(\mathbf{k}) \mathbf{v}(\mathbf{k}) [\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu] \left( -\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \right)$$

# Conducción del calor

## Corriente térmica electrónica

Escribiendo explícitamente las densidades de corriente eléctrica y térmica, se obtiene:

$$\mathbf{j} = \mathbf{L}^{11} \mathcal{E} + \mathbf{L}^{12} (-\nabla T)$$

$$\mathbf{j}_q = \mathbf{L}^{21} \mathcal{E} + \mathbf{L}^{22} (-\nabla T)$$

donde los coeficientes de transporte son matrices definidas como

$$\mathbf{L}^{11} = \mathcal{L}^{(0)} \quad \mathbf{L}^{21} = T \mathbf{L}^{12} = -\frac{1}{e} \mathcal{L}^{(1)} \quad \mathbf{L}^{22} = \frac{1}{e^2 T} \mathcal{L}^{(2)}$$

# Conducción del calor

## Corriente térmica electrónica

Las ecuaciones para las corrientes se suelen reescribir de esta manera:

$$\mathcal{E} = \rho \mathbf{j} + Q \nabla T$$

$$\mathbf{j}_q = \Pi \mathbf{j} - \kappa \nabla T$$

donde las matrices están definidas como

$$\rho = (\mathbf{L}^{11})^{-1} \quad Q = (\mathbf{L}^{11})^{-1} \mathbf{L}^{12}$$

$$\Pi = \mathbf{L}^{21} (\mathbf{L}^{11})^{-1} \quad \kappa = \mathbf{L}^{22} - \mathbf{L}^{21} (\mathbf{L}^{11})^{-1} \mathbf{L}^{12}$$

# Conducción del calor

## Corriente térmica electrónica

Los nombres e interpretaciones de estos cuatro coeficientes de transporte son:

- $\rho$  es la resistividad:  $\mathcal{E} = \rho \mathbf{j}$  bajo la condición de cero gradiente térmico.
- $Q$  es la “*termopotencia*” (*thermopower*):  $\mathcal{E} = Q \nabla T$  en el caso que no hay corriente eléctrica. Este coeficiente también se conoce como *coeficiente Seebeck*.
- $\Pi$  es el *coeficiente Peltier*:  $\mathbf{j}_q = \Pi \mathbf{j}$  cuando no hay gradiente térmico.
- $\kappa$  es la conductividad térmica:  $\mathbf{j}_q = -\kappa \nabla T$  cuando no hay corriente eléctrica.

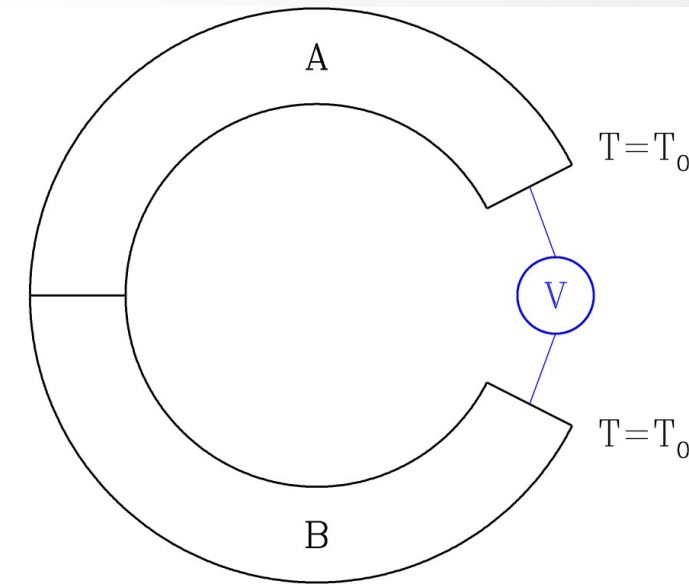
# Ejemplos

## Termocupla

Si formamos una juntura entre dos metales distintos y mantenemos la misma a temperatura  $T_1$ , mientras los extremos están a  $T_0$ , podemos medir una diferencia de voltaje

$$V_A - V_B = (Q_B - Q_A)(T_1 - T_0).$$

Este fenómeno se conoce como efecto Seebeck y el dispositivo como “termocupla”.



$$V = (Q_B - Q_A)(T_1 - T_0)$$

# Ejemplos

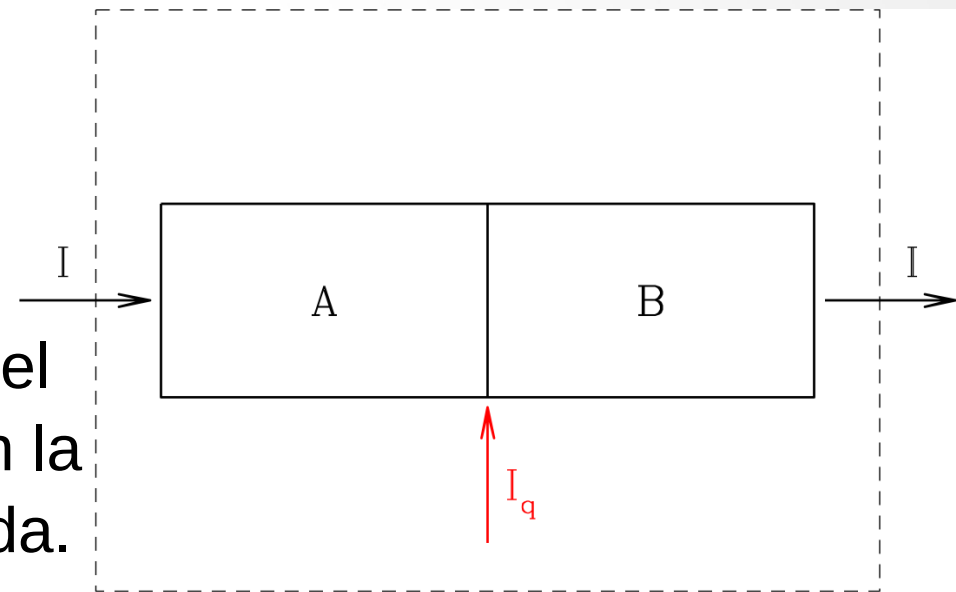
## Efecto Peltier

Si pasamos una corriente por una juntura entre dos metales diferentes, debido a la diferencia entre sus coeficientes de Peltier, habrá un flujo neto de calor hacia la juntura:

$$W = (\Pi_A - \Pi_B)I.$$

Notar que es lineal en la corriente.

Agregando una segunda juntura en el esquema ABA, el calor absorbido en la primer juntura se libera en la segunda. Esto representa un mecanismo de refrigeración.



$$I_q = (\Pi_B - \Pi_A) \cdot I$$

Fin de la clase

**¡Muchas gracias!**