

Efecto Hall cuántico

Prof. Alberto Camjayi

Introducción

El efecto Hall

Los experimentos llevados a cabo sobre electrones confinados a dos dimensiones en presencia de un campo magnético, llevaron a descubrimientos sorprendentes. Estos fenómenos se conocen genéricamente como “efecto Hall cuántico”.

En 1980, en el grupo de von Klitzing, se descubrió el **efecto Hall cuántico entero** (IQHE), cuya conductividad Hall es

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \nu$$

y donde el número ν es un entero determinado con una precisión de ¡1 en 10^{-9} !

Introducción

El efecto Hall

Estamos acostumbrados a magnitudes cuantizadas en sistemas atómicos, pero esto es completamente distinto.

Es la cuantización de una propiedad emergente, en un sistema de muchas partículas y con desorden. Evidentemente nueva física es necesaria para entender estos fenómenos.

Dos años después del descubrimiento de IQHE, Tsui, Störmer y Gossard descubrieron que en muestras más limpias (pero aún con desorden), el número ν podía tomar ciertos valores fraccionarios

Introducción

El efecto Hall

Este efecto se denomina efecto Hall cuántico fraccionario (FQHE) y, a diferencia del caso entero, las interacciones entre electrones juegan un rol preponderante.

Las cuasipartículas que emergen en este caso llevan una carga que es ***¡una fracción de la carga del electrón!*** De hecho la estadística de estas cuasipartículas no es fermiónica, ***¡pero tampoco es bosónica!***

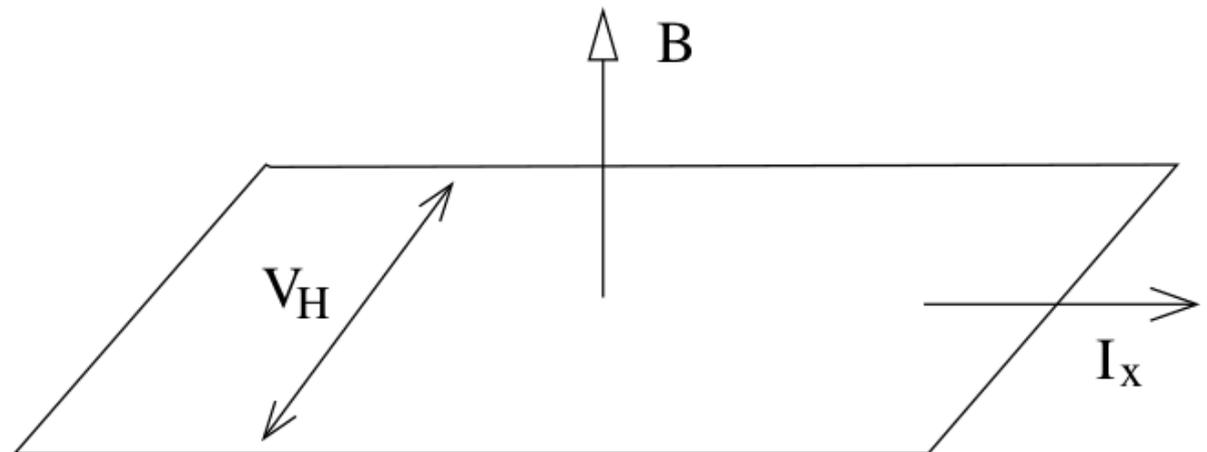
A estas nuevas cuasipartículas se las denomina aniones y su estadística va desde algo “intermedio” entre fermiones y bosones hasta estadísticas exóticas como la exhibida por los aniones no-Abelianos.

Efecto Hall clásico

Caso clásico, experimento

El experimento típico involucra electrones restringidos a moverse en el plano xy en presencia de un campo magnético uniforme en la dirección z .

Se hace correr una corriente constante en la dirección x . El *efecto Hall* es la aparición, inducida por la corriente en presencia del campo, de un voltaje en la dirección y .



Efecto Hall clásico

Caso clásico, cálculo de Drude

Revisemos lo que vimos al principio de la cursada. En la formulación de Drude, la ecuación de movimiento del electrón es

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{m\mathbf{v}}{\tau}$$

donde el tiempo de scattering τ representa el tiempo promedio entre colisiones. En equilibrio, cuando la derivada se anula, si definimos

$$\mathbf{J} = -ne\mathbf{v}$$

Efecto Hall clásico

Caso clásico, cálculo de Drude

Tenemos que

$$\mathbf{J} + \frac{eB}{m}\tau\mathbf{J} \times \hat{z} = \frac{e^2n\tau}{m}\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_B\tau \\ -\omega_B\tau & 1 \end{pmatrix} \mathbf{J}$$

con $\omega_B = \frac{eB}{m}$.

Invirtiendo la matriz, obtenemos la ley de Ohm $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, de donde podemos leer la forma del tensor conductividad

$$\sigma = \frac{\sigma_{DC}}{1 + \omega_B^2\tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_B\tau \\ \omega_B\tau & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \sigma_{DC} = \frac{ne^2\tau}{m}.$$

Efecto Hall clásico

Resistividad y resistencia (caso 2D)

La resistividad se define como la inversa de la conductividad

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{yy} \end{pmatrix} = \sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{DC}} \begin{pmatrix} 1 & \omega_B \tau \\ -\omega_B \tau & 1 \end{pmatrix}.$$

Las componentes extradiagonales, $\rho_{xy} = \omega_B \tau / \sigma_{DC} = B / ne$, tienen algunas características destacadas:

- Son independientes del tiempo de scattering. Esto implica que nos dicen algo acerca del material propiamente dicho en vez del desorden (que introduce el scattering).
- La otra característica importante es que es lo que medimos.

Efecto Hall clásico

Resistividad y resistencia (caso 2D)

Experimentalmente se mide la resistencia, que esta relacionada con la resistividad por factores geométricos. Pero en este caso, 2D, la relación para los términos extradiagonales es *independiente de la geometría*.

Tomemos una muestra de largo L en la dirección y . Apliquemos una diferencia de potencial V_y en la misma dirección y midamos la corriente resultante en la dirección x :

$$R_{xy} = \frac{V_y}{I_x} = \frac{LE_y}{LJ_x} = \frac{E_y}{J_x} = -\rho_{xy}.$$

Efecto Hall clásico

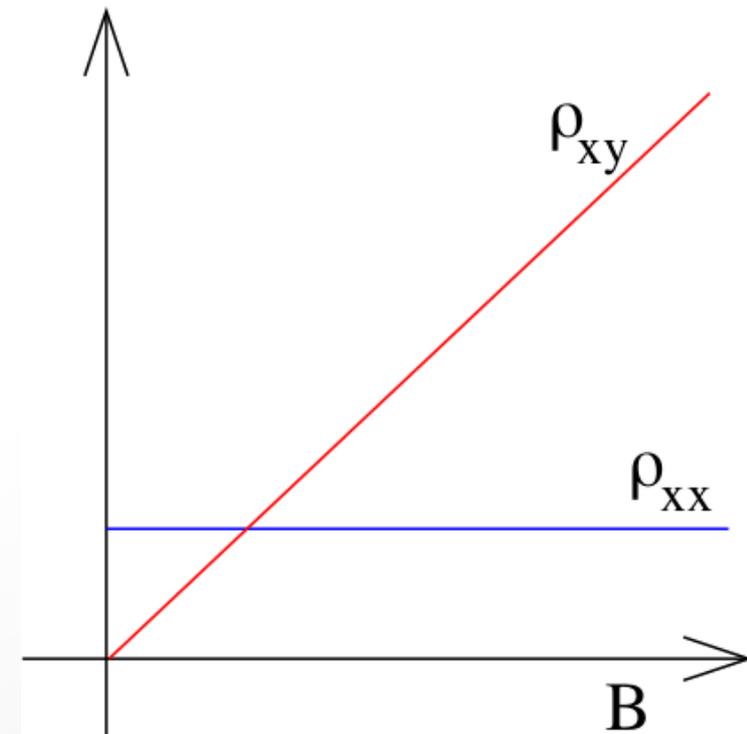
Coeficiente Hall

Por último, definamos el coeficiente Hall

$$R_H = -\frac{E_y}{J_x B} = \frac{\rho_{xy}}{B} \xrightarrow{\text{en Drude}} R_H = \frac{1}{ne}$$

Y las predicciones del modelo clásico

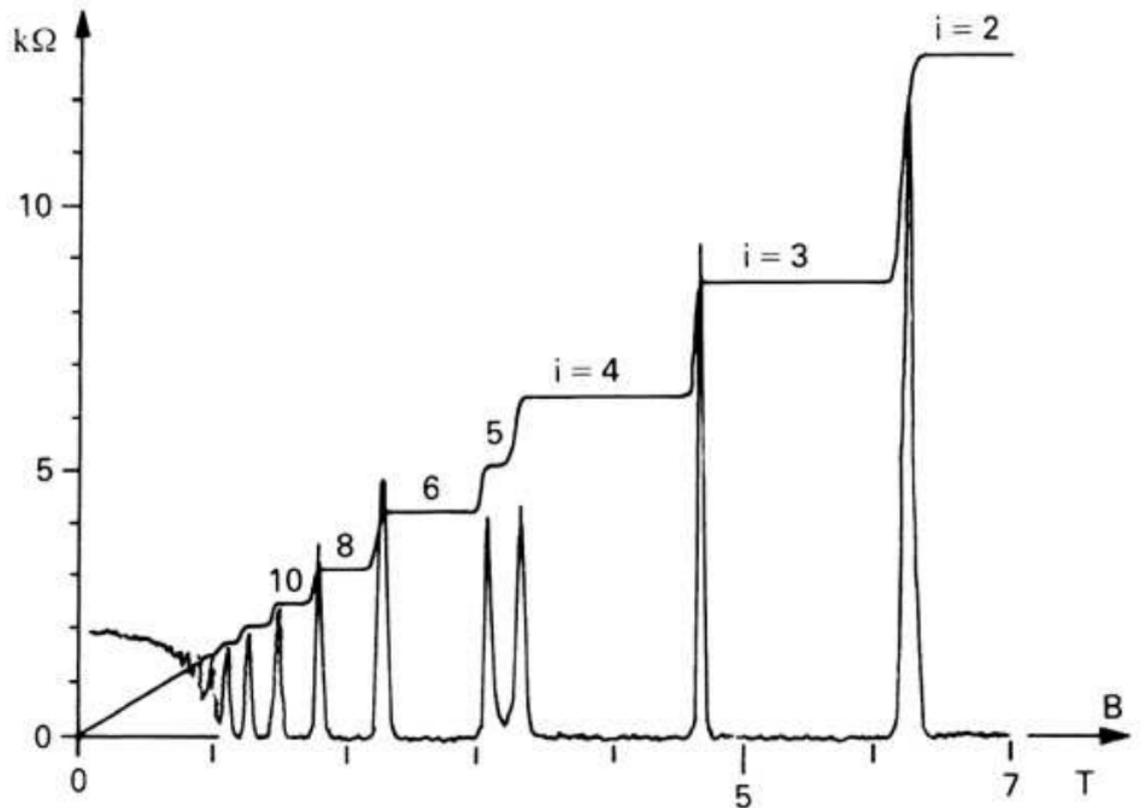
$$\rho_{xx} = \frac{m}{ne^2\tau} \text{ y } \rho_{xy} = \frac{B}{ne}$$



IQHE

Efecto Hall cuántico entero

En 1980, von Klitzing midió la resistividad de un gas de electrones 2D en Si-MOSFET, y obtuvo:



IQHE

Resultados experimentales

En 1980, von Klitzing midió la resistividad de un gas de electrones 2D en Si-MOSFET, y obtuvo:

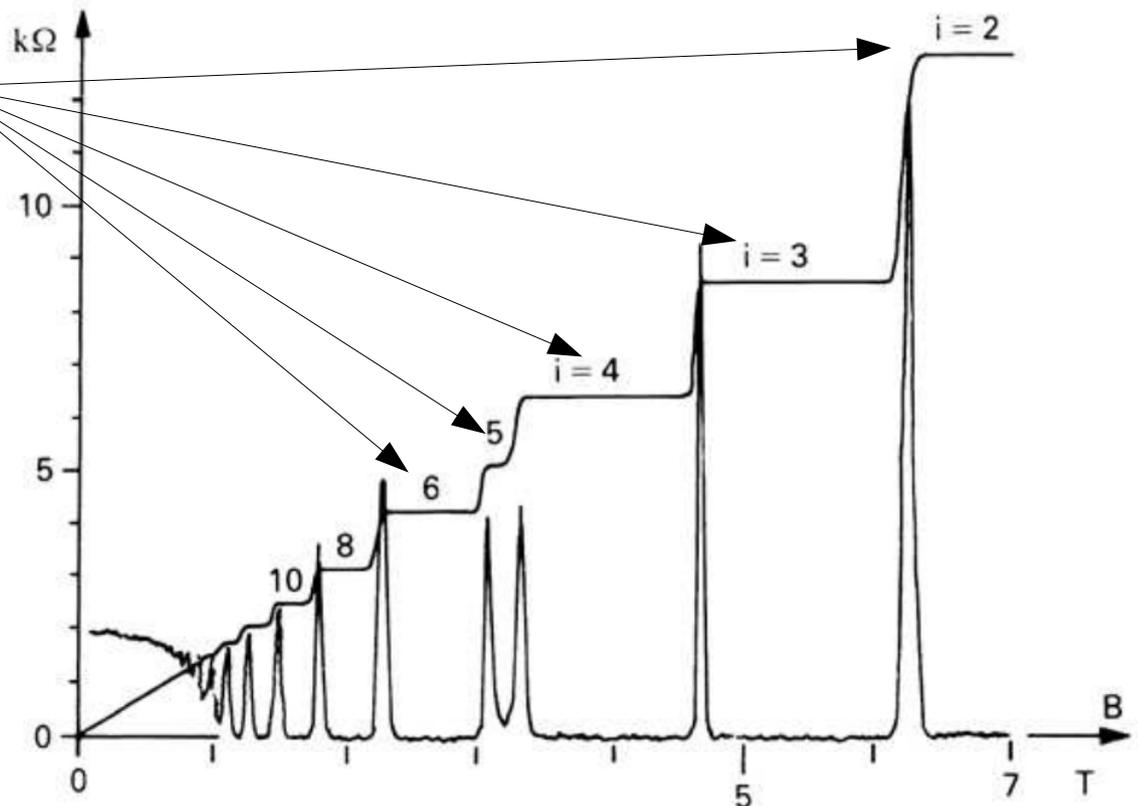
$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{Z}$$

El centro de los plateaux ocurre cuando

$$B = \frac{2\pi\hbar n}{\nu e} = \frac{n}{\nu} \Phi_0$$

Donde definimos el “cuanto de flujo”

$$\Phi_0 = 2\pi\hbar/e.$$



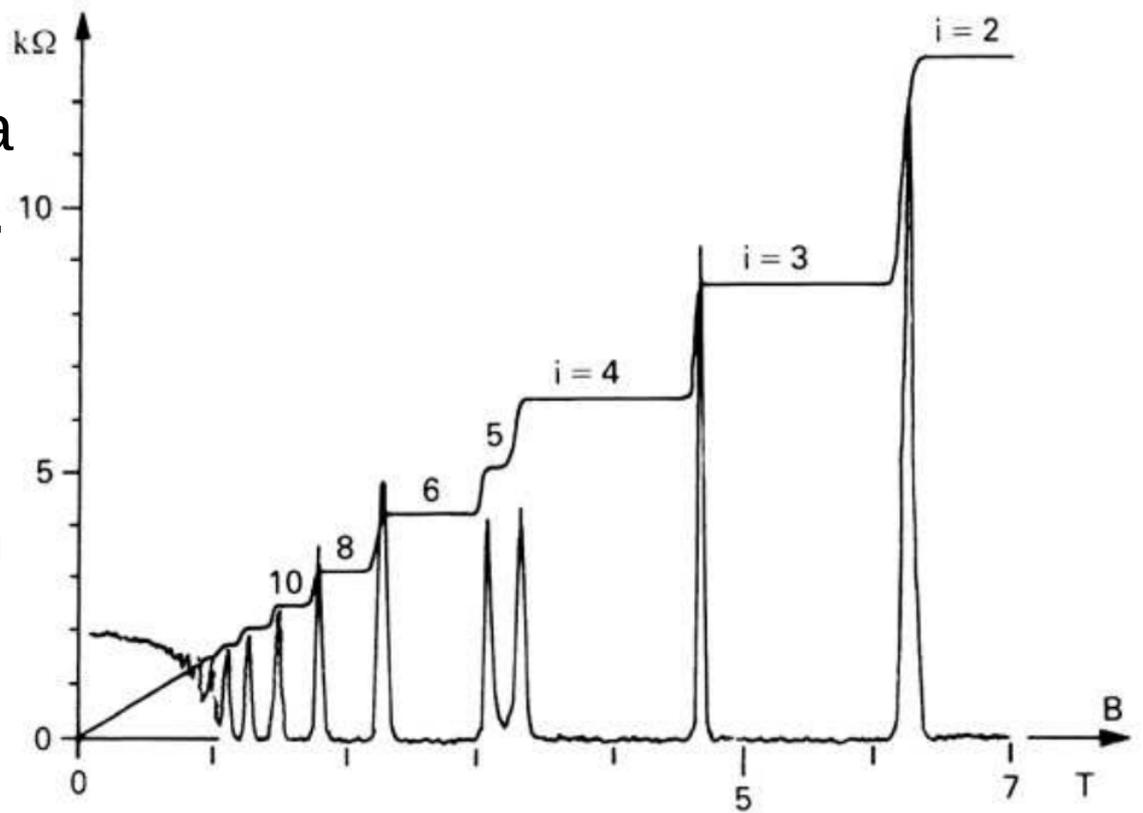
IQHE

Resultados experimentales

En 1980, von Klitzing midió la resistividad de un gas de electrones 2D en Si-MOSFET, y obtuvo:

Los plateaux se vuelven más prominentes a medida ***aumentamos*** el desorden.

De hecho, en ausencia de desorden se espera que los plateaux desaparezcan por completo.

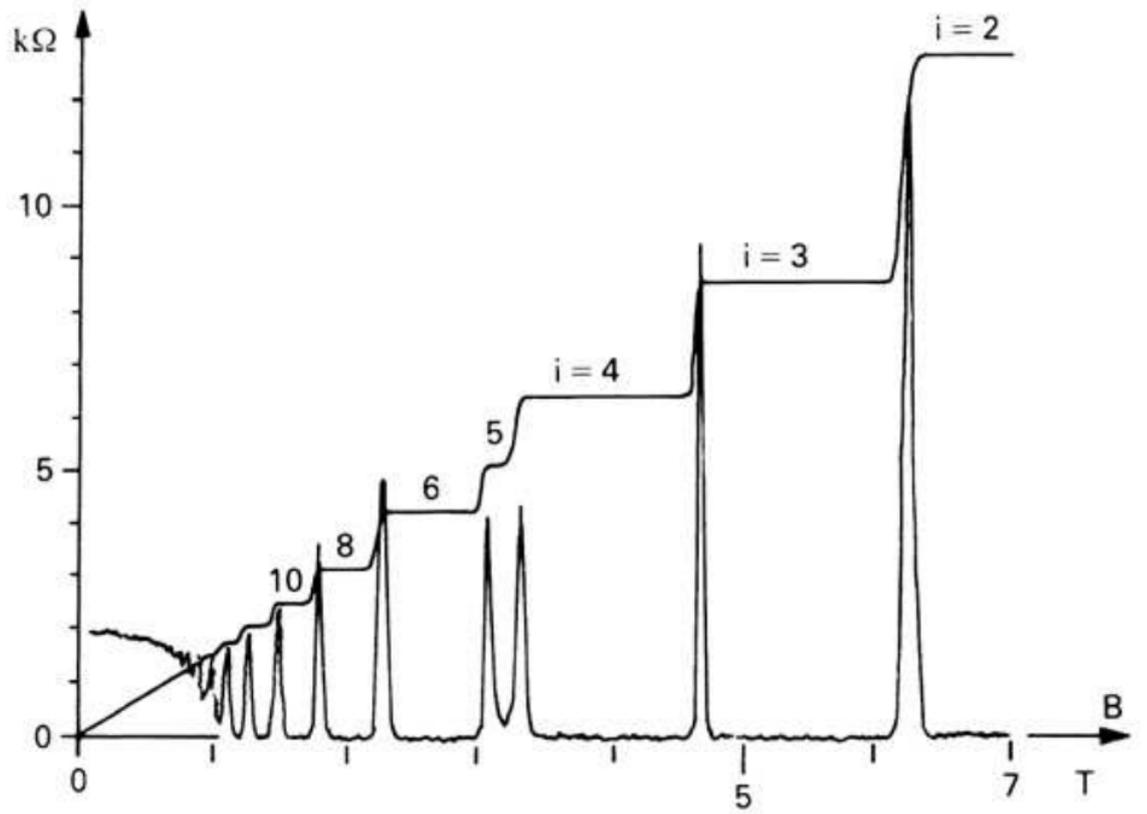


IQHE

Resultados experimentales

En 1980, von Klitzing midió la resistividad de un gas de electrones 2D en Si-MOSFET, y obtuvo:

La resistividad longitudinal ρ_{xx} también muestra un comportamiento inusual. Se anula en los plateaux de ρ_{xy} y desarrolla un pico cada vez que cambiamos de un plateau a otro.



IQHE

Resistividad y conductividad

El hecho que $\rho_{xx} = 0$ es un tanto extraño. Volvamos a la relación (matricial) entre conductividad y resistividad.

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \text{ y } \sigma_{xy} = \frac{-\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}.$$

Si $\rho_{xy} = 0 \implies \sigma_{xx} = 1/\rho_{xx}$, que es el resultado habitual.

Pero si $\rho_{xy} \neq 0$, entonces el resultado es más interesante:

$$\rho_{xx} = 0 \implies \sigma_{xx} = 0, (\rho_{xy} \neq 0).$$

¿Cómo puede ser conductor y aislador perfecto al mismo tiempo?

IQHE

Resistividad y conductividad

No hay un gran misterio, es más interpretación que otra cosa. De hecho, el resultado $\rho_{xx} = 0$ se obtiene en Drude en el límite del tiempo de scattering yendo a infinito.

En este caso, la corriente fluye perpendicular al campo eléctrico y, por lo tanto, el trabajo necesario para acelerar las cargas es nulo, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = 0$.

Por lo tanto:

- No hay corriente en la dirección longitudinal, $\sigma_{xx} = 0$.
- No hay disipación de la energía, $\rho_{xx} = 0$.

IQHE

Explicación teórica. Ingredientes.

Para explicar el IQHE no es necesario ir más allá de la descripción de electrón independiente. Por lo tanto, los niveles de energía son los correspondientes a electrones en un campo magnético externo: los niveles de Landau (ver clase 4).

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_B$$

$$g(n) = \frac{mL_x L_y \omega_D}{2\pi\hbar} = \frac{L_x L_y eB}{h} = \frac{AB}{\Phi_0}$$

$$\psi_{n,k_y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_y}} e^{ik_y y} \phi_n(x - x_0), \quad \text{con } x_0 = k_y \ell^2 = \frac{\hbar k_y}{eB}.$$

IQHE

Conductividad

Calculemos la conductividad en este sistema.

Si introducimos un campo eléctrico en la dirección x , el hamiltoniano de Landau incorpora un corrimiento en la misma dirección que se traslada a las funciones de onda.

La energía es ahora

$$\varepsilon_n(k_y) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_B + eE \left(k_y \ell^2 - \frac{eE}{m\omega_B^2} \right) + \frac{m}{2} \frac{E^2}{B^2}$$

Como vemos el campo eléctrico levantó la degeneración: ahora los estados dependen linealmente con el momento en y .

IQHE

Conductividad

Calculemos la conductividad en este sistema.

Si introducimos un campo eléctrico en la dirección x , el hamiltoniano de Landau incorpora un corrimiento en la misma dirección que se traslada a las funciones de onda.

Los autoestados

$$\psi(x, y) = \psi_{n, k_y}(x - mE/eB^2, y)$$

simplemente sufren un corrimiento en la dirección del campo eléctrico.

Además aparece una velocidad de arrastre en y :

$$v_y = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_n(k_y)}{\partial k_y} = e\hbar E \ell^2 = \frac{E}{B}.$$

IQHE

Conductividad, cálculo simple

Calculemos la conductividad en este sistema.

En el gauge de Landau, $\mathbf{A} = xB\hat{y}$, la corriente es

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= -\frac{e}{m} \sum_{\text{ocup.}} \langle \psi_{n,k_y} | m\mathbf{v} | \psi_{n,k_y} \rangle \\ &= -\frac{e}{m} \sum_{\text{ocup.}} \langle \psi_{n,k_y} | -i\hbar\nabla + e\mathbf{A} | \psi_{n,k_y} \rangle.\end{aligned}$$

Evaluemos por componente

$$I_x = -\frac{e}{m} \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{k_y} \langle \psi_{n,k_y} | -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} | \psi_{n,k_y} \rangle = 0$$

(valor de expectación del momento en el oscilador armónico).

IQHE

Conductividad, cálculo simple

Calculemos la conductividad en este sistema.

En el gauge de Landau, $\mathbf{A} = xB\hat{y}$, la corriente es

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= -\frac{e}{m} \sum_{\text{ocup.}} \langle \psi_{n,k_y} | m\mathbf{v} | \psi_{n,k_y} \rangle \\ &= -\frac{e}{m} \sum_{\text{ocup.}} \langle \psi_{n,k_y} | -i\hbar\nabla + e\mathbf{A} | \psi_{n,k_y} \rangle.\end{aligned}$$

Evaluemos por componente

$$I_y = -\frac{e}{m} \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{k_y} \langle \psi_{n,k_y} | -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eBx | \psi_{n,k_y} \rangle$$

IQHE

Conductividad, cálculo simple

Calculemos la conductividad en este sistema.

En el gauge de Landau, $\mathbf{A} = xB\hat{y}$, la corriente es

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= -\frac{e}{m} \sum_{\text{ocup.}} \langle \psi_{n,k_y} | m\mathbf{v} | \psi_{n,k_y} \rangle \\ &= -\frac{e}{m} \sum_{\text{ocup.}} \langle \psi_{n,k_y} | -i\hbar\nabla + e\mathbf{A} | \psi_{n,k_y} \rangle.\end{aligned}$$

Evaluemos por componente

$$I_y = -\frac{e}{m} \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{k_y} \langle \psi_{n,k_y} | \hbar k_y + eBx | \psi_{n,k_y} \rangle$$

El valor medio de x es $\langle \psi_{n,k_y} | x | \psi_{n,k_y} \rangle = -\hbar k_y + mE/eB^2$.

IQHE

Conductividad, cálculo simple

Calculemos la conductividad en este sistema.

En el gauge de Landau, $\mathbf{A} = xB\hat{y}$, la corriente es

$$\mathbf{I} = I_y \hat{y} \text{ con } I_y = -e \sum_{n=1}^{\nu} \sum_{k_y} \frac{E}{B} = -e\nu \frac{AB}{\Phi_0} \frac{E}{B}$$

Por lo tanto, la relación entre densidad de corriente y campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = E\hat{x} \implies \mathbf{J} = -e\nu E/\Phi_0 \hat{y}$$

De donde

$$\sigma_{xx} = 0 \text{ y } \sigma_{xy} = \frac{e\nu}{\Phi_0} \implies \rho_{xx} = 0 \text{ y } \rho_{xy} = -\frac{\Phi_0}{e\nu} = -\frac{2\pi\hbar}{e^2\nu}.$$

IQHE

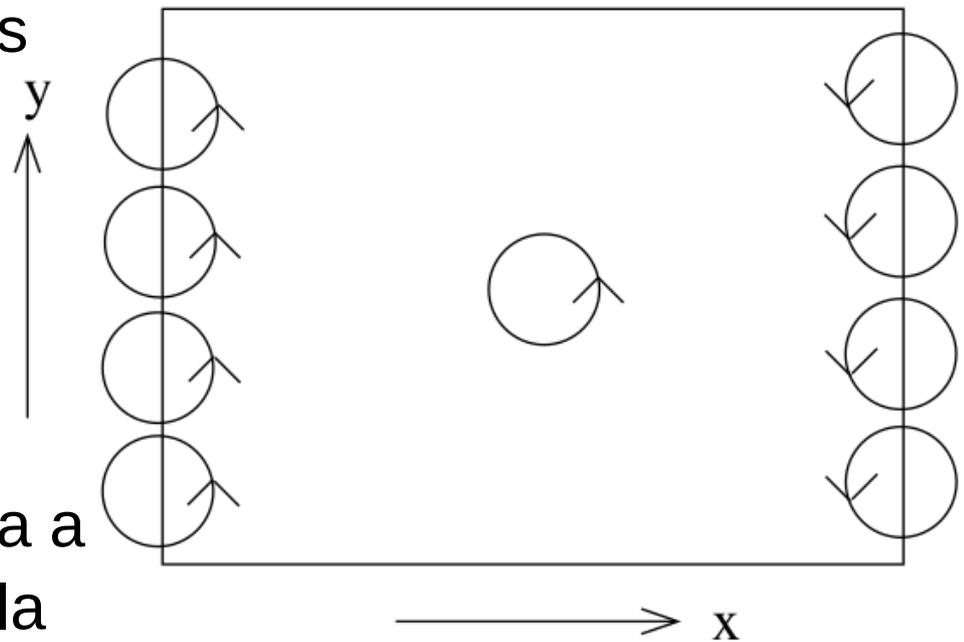
Estados de borde

Si las partículas describen órbitas en presencia del campo magnético. ¿Qué sucede en los bordes?

Al encontrar el borde, las partículas terminan generando una corriente en una dimensión a lo largo del borde y con un único sentido: una corriente quiral.

Una partícula quiral está restringida a moverse en una única dirección a lo largo de una recta.

A ambos lados de la muestra, la quiralidad es opuesta.



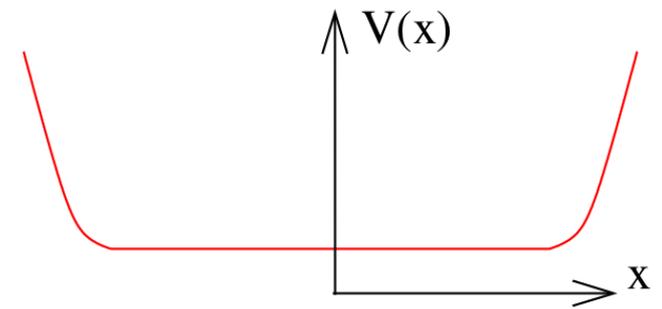
IQHE

Estados de borde

Podemos modelar los bordes por un potencial que crece rápidamente cerca de los mismos.

En el gauge de Landau y en una geometría rectangular con $V = V(x)$,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y + eBx)^2 \right) + V(x).$$



Si el potencial es suave en la distancia típica ℓ donde varía la función de onda, podemos desarrollar el potencial en Taylor y, a primer orden no trivial, resultará en un término lineal análogo al que aparece cuando se está en presencia de un campo eléctrico.

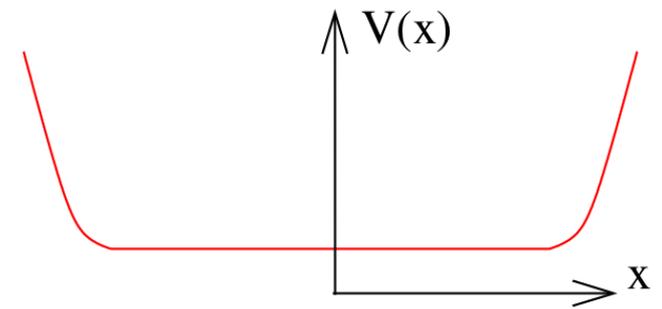
IQHE

Estados de borde

Podemos modelar los bordes por un potencial que crece rápidamente cerca de los mismos.

A primer orden, aparece una velocidad de arrastre

$$v_y = -\frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x}$$

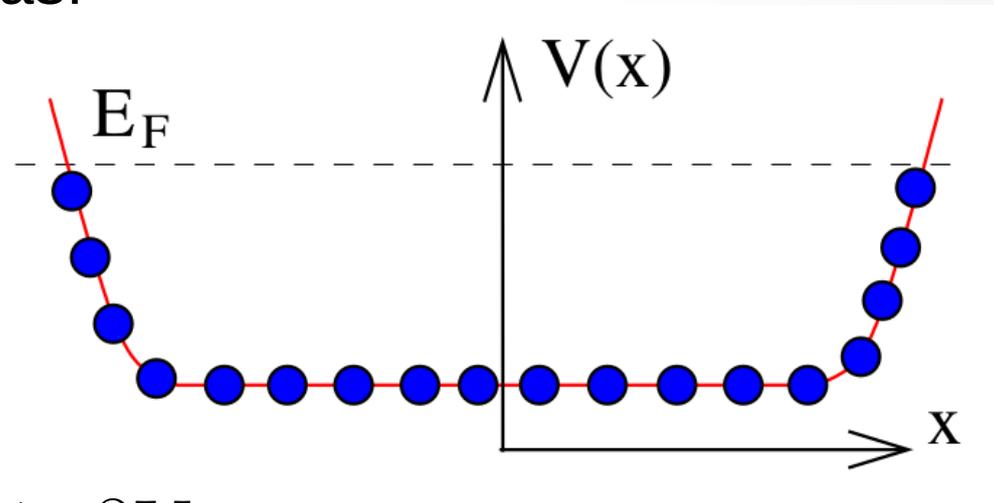


Cada función de onda, centrada en la posición $x_0 = -k_y \ell^2$, tiene una velocidad de arrastre distinta. En particular los modos en ambos bordes son quirales y viajan en direcciones opuestas.

IQHE

Estados de borde

Los estados están etiquetados por su momento en y , **que es igual que etiquetarlos por la posición** de la función de onda. Por lo tanto, si llenamos los estados hasta el nivel de Fermi, podemos representarlos así

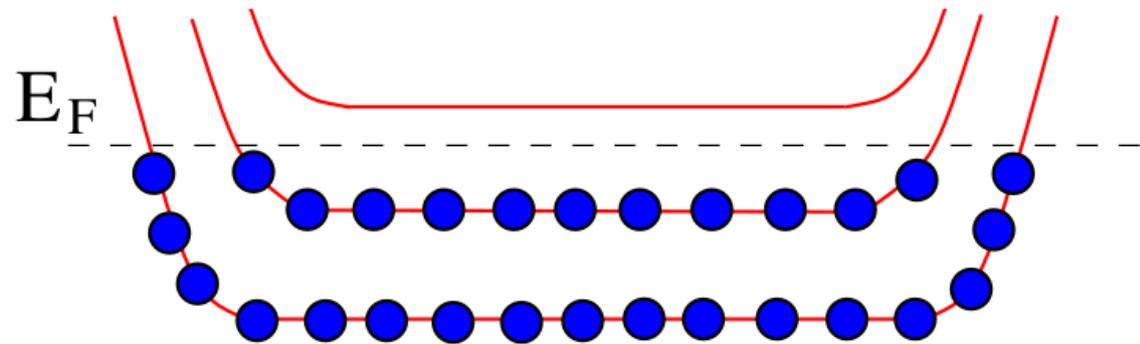


$$v_y = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_n(k_y)}{\partial k_y} = -\frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x}$$

IQHE

Estados de borde

Los estados están etiquetados por su momento en y , **que es igual que etiquetarlos por la posición** de la función de onda. Por lo tanto, si llenamos los estados hasta el nivel de Fermi, podemos representarlos así

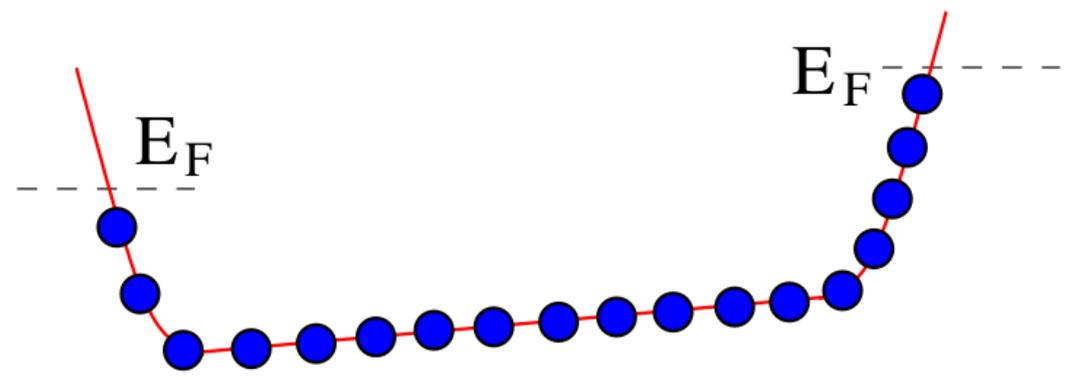


$$v_y = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_n(k_y)}{\partial k_y} = - \frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x}$$

IQHE

Estados de borde

Si introducimos una diferencia de potencial de potencial químico entre lo bordes, podemos calcular la corriente



$$I_y = -e \int \frac{dk_y}{2\pi} v_y(k_y) = \frac{e}{2\ell^2} \int dx \frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{e}{2\pi\hbar} \Delta\mu$$

$$v_y = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_n(k_y)}{\partial k_y} = -\frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x}$$

IQHE

Estados de borde

Si introducimos una diferencia de potencial de potencial químico entre lo bordes, podemos calcular la corriente.

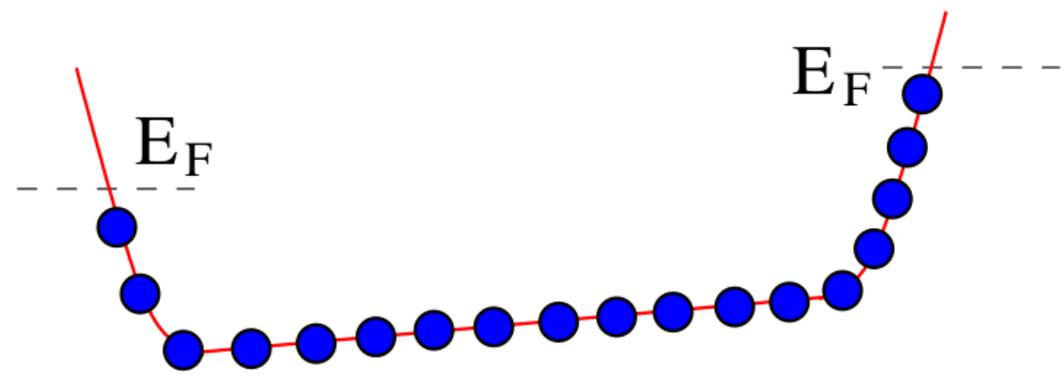
Como el voltaje Hall es

$eV_H = \Delta\mu$, la conductividad Hall es

$$\sigma_{xy} = \frac{I_y}{V_H} = \frac{e^2}{2\pi\hbar},$$

que es resultado esperado para un nivel de Landau.

Los estado quirales son los principales portadores de carga.



IQHE

Estado Hall

Hasta ahora, hemos visto que si un número entero ν de niveles de Landau están llenos, entonces las resistividades son las observadas en los experimentos.

Pero no explicamos porqué los plateaux existen ni los saltos entre plateaux.

Para un llenado arbitrario, con una densidad de electrones n , en general los niveles no estarán todos completos.

Sin embargo los experimentos muestran que el efecto Hall se observa en un rango amplio de campos magnéticos. ¿A qué se debe?

IQHE

Desorden

En general, el desorden introduce scattering. Esto impide que los electrones se muevan muy lejos tornando la muestra aislante.

Los estados quirales, sin embargo, son resistentes al desorden. Como todos se mueven en la misma dirección, si se quiere dispersar un electrón, de manera que se invierta la dirección de propagación, el mismo tiene que cruzar toda la muestra. Eso es un proceso muy improbable y por lo tanto el scattering de los estados de borde esta suprimido.

Pese a esto, sin embargo, el rol del desorden es importante. **Es por el desorden que los plateaux pueden ser observados.**

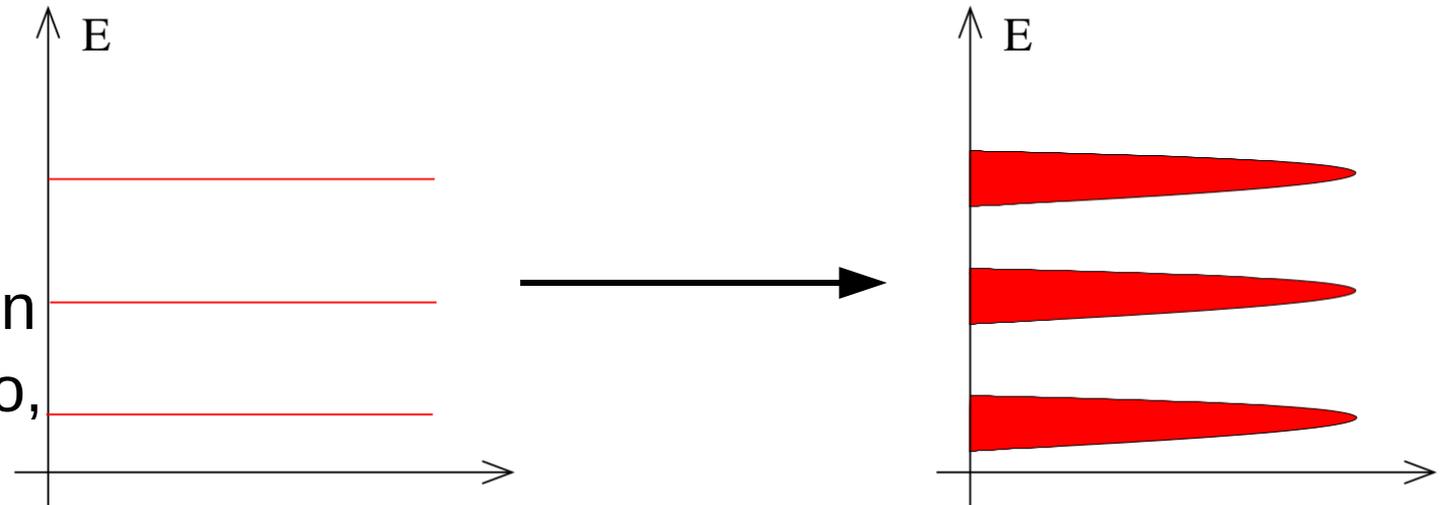
IQHE

Desorden

Si pensamos al desorden como un potencial aleatorio, podemos discutir algunas consecuencias del mismo.

En primer lugar, va a romper la degeneración de los niveles de Landau. Cualquier potencial genérico que no respete las simetrías del sistema hace eso.

Si pedimos que la intensidad del potencial aleatorio sea pequeño comparado con la separación de los niveles (necesitamos desorden, pero no tanto), la imagen de los niveles de Landau seguirá siendo válida, solo que ahora los mismos tendrán un ancho finito.



IQHE

Desorden

Hay otro efecto asociado al desorden: modifica los estados cambiándolos *de extendidos a localizados*.

Pidamos al potencial aleatorio que cambie apreciablemente en escalas espaciales mucho mayores que la longitud magnética

$$|\nabla V| \ll \frac{\hbar\omega_B}{\ell}$$

Bajo esta suposición, la órbita de ciclotrón se desarrolla en una región de potencial esencialmente constante. Por otra parte, el centro de la órbita se mueve siguiendo las equipotenciales.

IQHE

Desorden

Recordemos que podemos definir las variables del centro de la órbita y que ambas son constantes de movimiento

$$[\hat{X}, \hat{H}] = [\hat{Y}, \hat{H}] = 0$$

En presencia del potencial aleatorio

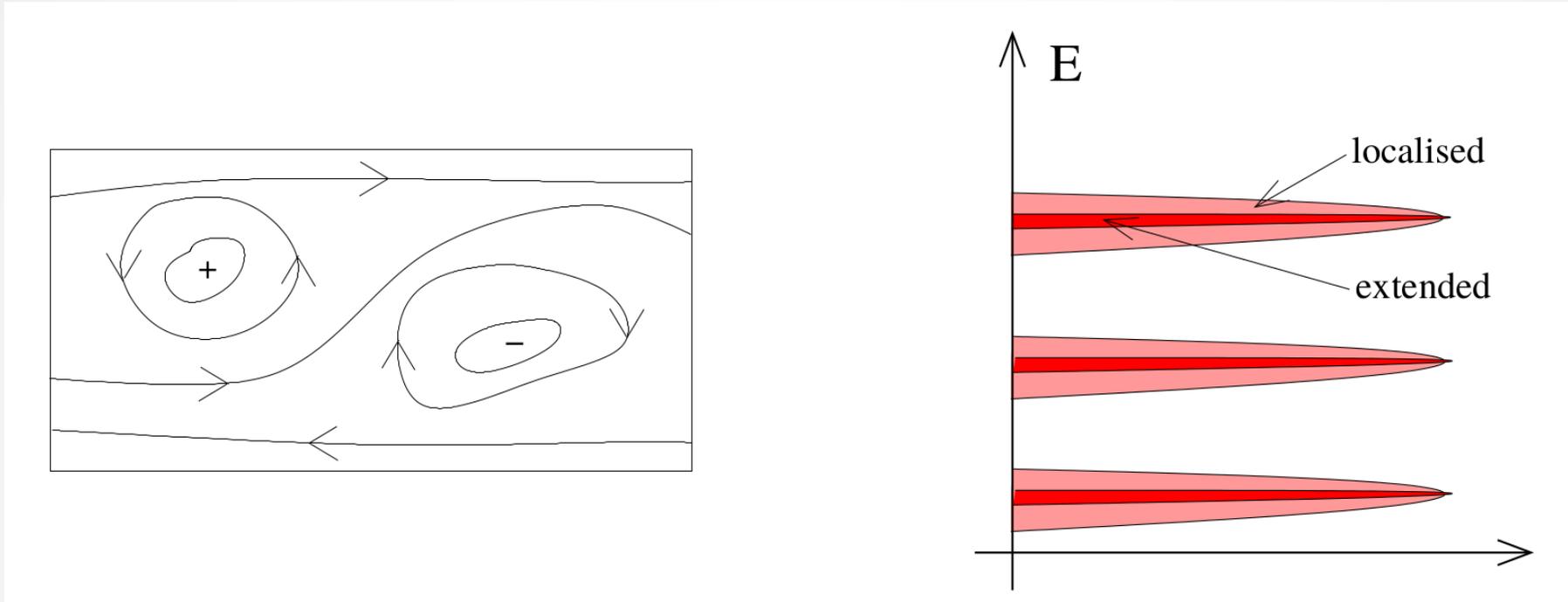
$$i\hbar\dot{\hat{X}} = [\hat{X}, \hat{H} + V] = [\hat{X}, V] \approx [\hat{X}, \hat{Y}] \frac{\partial V}{\partial Y} = i\ell^2 \frac{\partial V}{\partial Y}$$

$$i\hbar\dot{\hat{Y}} = [\hat{Y}, \hat{H} + V] = [\hat{Y}, V] \approx [\hat{Y}, \hat{X}] \frac{\partial V}{\partial X} = -i\ell^2 \frac{\partial V}{\partial X}$$

$$\implies (\dot{\hat{X}}, \dot{\hat{Y}}) \perp \nabla V.$$

IQHE

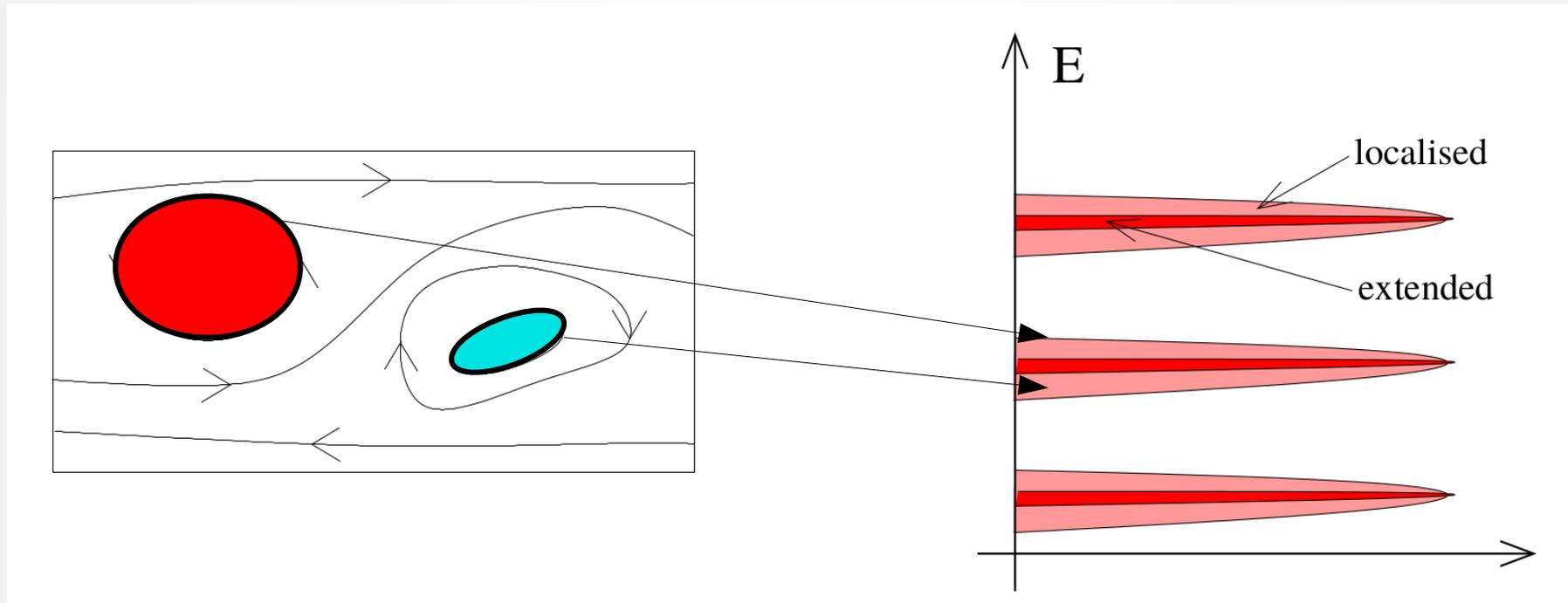
Desorden



Los estados intermedios en energía son extendidos, mientras que los extremos, sea alta o baja energía, son localizados.

IQHE

Desorden



Los estados intermedios en energía son extendidos, mientras que los extremos, sea alta o baja energía, son localizados.

IQHE

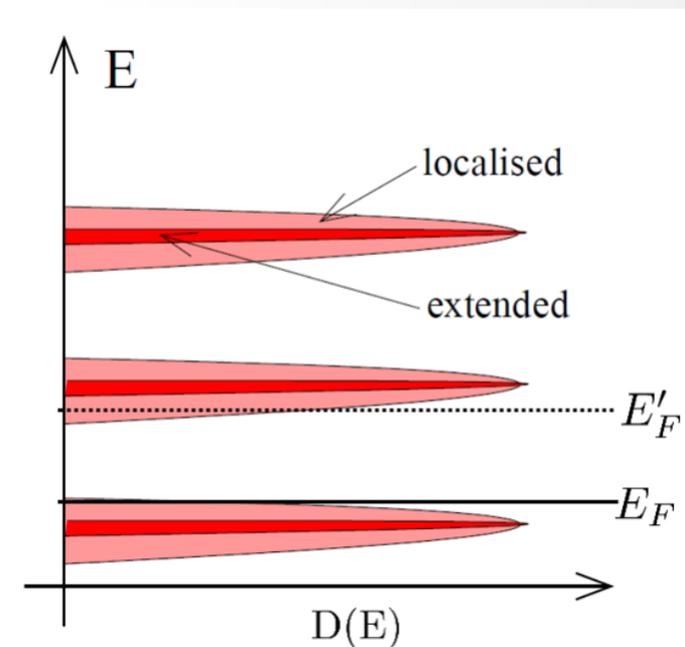
Desorden

La localización tiene consecuencias en la conductividad.

Supongamos que llenamos todos los estados extendidos de un nivel de Landau y comenzamos a disminuir el campo \mathbf{B} a densidad electrónica constante.

Cada nivel de Landau puede acomodar menos electrones y por lo tanto la energía de Fermi aumenta.

Primero comienza a poblar los estados localizados del siguiente nivel. Como estos estados no contribuyen a la conducción, la conductividad no cambia, lo que lleva a la aparición de los plateaux.



IQHE

Para la próxima

Cuando calculamos las conductividades y resistividades, supusimos que todos los estado contribuían. Ahora sabemos que por el desorden hay estados localizados que no lo hacen.

¿La resistividad cambiará?

La respuesta es no....

Fin de la clase

¡Muchas gracias!