

Rol de las interacciones 2

Prof. Alberto Camjaji

Introducción

La teoría de los líquidos de Fermi

A fines de los años 50, Landau introdujo la idea de “*líquidos de Fermi*” para describir las propiedades observadas del ^3He . La teoría fue extendida y refinada, hasta abarcar la descripción de electrones en sólidos, materia nuclear e ¡incluso estrellas de neutrones!

La conclusión de la teoría es que un gas de partículas que interactúan entre sí (un líquido), puede ser descrito por un sistema de “cuasipartículas” casi sin interacción.

Introducción

La teoría de los líquidos de Fermi

La teoría de Landau es conceptualmente muy importante, porque explica porqué sistemas sumamente complicados, como los electrones en un metal, pueden ser descriptos como un gas de partículas independientes.

Una de las propiedades más asombrosas en metales es que, pese a que la distancia media entre electrones es $\sim 2 \text{ \AA}$, el camino libre medio es mayor a 10^4 \AA a temperatura ambiente y más de 10 cm a 1 K.

Introducción

La teoría de los líquidos de Fermi

La teoría de Landau es conceptualmente muy importante, porque explica porqué sistemas sumamente complicados, como los electrones en un metal, pueden ser descriptos como un gas de partículas independientes.

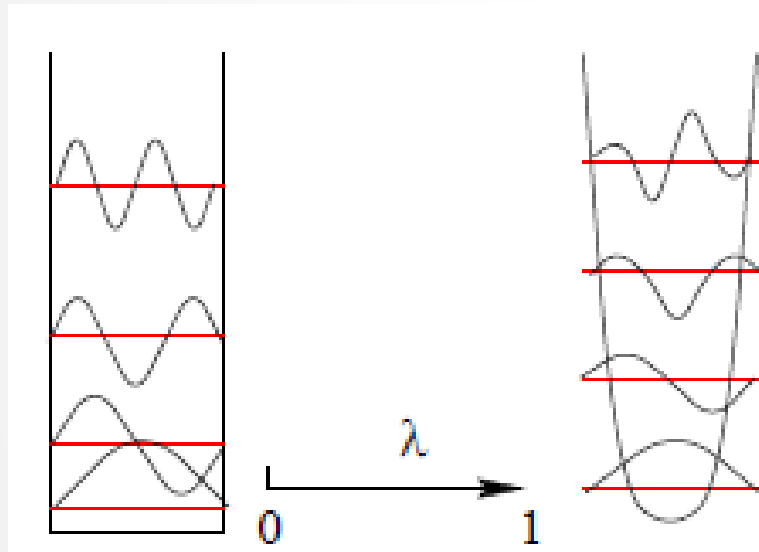
Además el concepto de cuasipartícula brinda el fundamento teórico de la descripción semi-clásica que vimos anteriormente.

La formulación de la teoría esta basada fuertemente en la idea de “*continuidad adiabática*”. Esta idea nos permite vincular, hacer una correspondencia uno-a-uno, entre las excitaciones del sistema con y sin interacciones.

Continuidad adiabática

Continuidad adiabática: idea física

Imaginemos un sistema donde algún parámetro modifica el hamiltoniano del mismo y al cual variamos “lentamente” en el tiempo.



Si el cambio es lento, se puede aproximar la solución de la ecuación de Schrödinger

$$i\partial_t\psi(x, t) = \hat{H}(t)\psi(x, t)$$

por la solución estática o instantánea de la ecuación

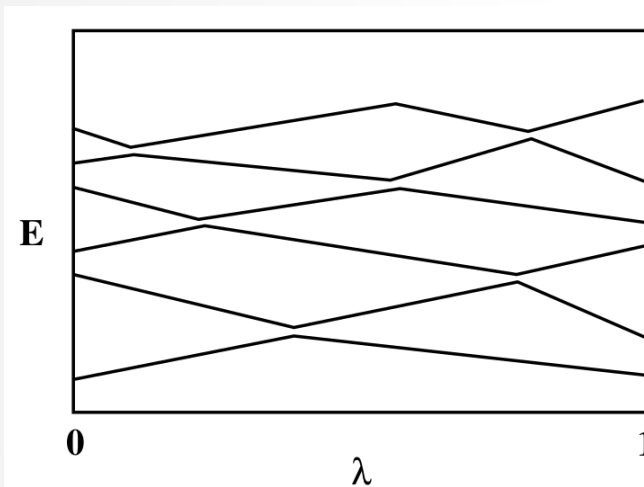
$$\hat{H}(t)\psi_{\lambda(t)}(x) = E_{\lambda(t)}\psi_{\lambda(t)}(x).$$

Más adelante veremos esto en detalle.

Continuidad adiabática

Continuidad adiabática: idea física

Imaginemos un sistema donde algún parámetro modifica el hamiltoniano del mismo y al cual variamos “lentamente” en el tiempo.



Esquemáticamente, podemos visualizar la evolución de las autoenergías como se esquematiza en la figura, con una serie de “cruces evitados” (avoided crossings) que nos permite seguir adiabáticamente el n-ésimo excitado del sistema con $\lambda = 0$ hasta el nivel correspondiente con $\lambda = 1$.

Si los niveles se cruzan, la simetría del fundamental cambia y por tanto identificamos este hecho con una transición de fase.

Continuidad adiabática

Cuasipartículas

El principio de continuidad adiabática se utiliza para vincular las excitaciones del sistema con interacciones con las excitaciones del sistema sin las mismas, facilitando los cálculos. Así podemos obtener conocimiento acerca del sistema físico. Cuando calculamos funciones de respuesta o densidades, debemos evaluar elementos de matriz entre diferentes estados. Dado que nos concentraremos con las bajas energías, consideremos estados con una o dos partículas agregadas al fundamental.

$$|\mathbf{k}\sigma\rangle = \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger |EF\rangle \quad |\mathbf{k}\sigma; (\mathbf{k}'\sigma')_h\rangle = \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}'\sigma'} |EF\rangle$$

Continuidad adiabática

Cuasipartículas

Imaginemos ahora que, con el paso del tiempo, el hamiltoniano evoluciona de manera tal que la interacción se apaga lentamente

$$\hat{H}_\zeta = H_0 + H_{\text{int.}} e^{-\zeta t}, \quad t > 0.$$

Los estados evolucionan bajo la acción del operador de evolución temporal:

$$|\mathbf{k}\sigma\rangle(t) = \hat{U}_\zeta(t, 0)|\mathbf{k}\sigma\rangle$$

Bajo las condiciones de continuidad adiabática, tenemos que

$$\langle \mathbf{k}'\sigma' | \mathbf{k}\sigma \rangle(t) = \langle \mathbf{k}'\sigma' | \hat{U}_\zeta^\dagger(t, 0) \hat{U}_\zeta(t, 0) | \mathbf{k}\sigma \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \langle \mathbf{k}'\sigma' | \mathbf{k}\sigma \rangle_0.$$

Continuidad adiabática

Cuasipartículas

Por lo tanto, a tiempos largos, los elementos de matriz son idénticos al caso sin interacciones.

Además los estados inicial y final, $|\mathbf{k}\sigma\rangle$ y $\hat{U}_\zeta(\infty, 0)|\mathbf{k}\sigma\rangle$, tienen propiedades en común, producto de las conservaciones:

- 1) Tienen un exceso de carga e , comparado con el fundamental.
- 2) Llevan una corriente $-e\hbar\mathbf{k}/m$, y
- 3) Un exceso de espín σ .

Todas estas cantidades son producto de las conservaciones de espín, corriente y carga.

Continuidad adiabática

Cuasipartículas

Por lo tanto, a tiempos largos, los elementos de matriz son idénticos al caso sin interacciones.

Además los estados inicial y final, $|\mathbf{k}\sigma\rangle$ y $\hat{U}_\zeta(\infty, 0)|\mathbf{k}\sigma\rangle$, tienen propiedades en común, producto de las conservaciones:

- 1) Tienen un exceso de carga e , comparado con el fundamental.
- 2) Llevan una corriente $-e\hbar\mathbf{k}/m$, y
- 3) Un exceso de espín σ .

Muy importante, como

$$\langle \hat{c}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}\sigma} \rangle = \langle \mathbf{k}'\sigma' | \mathbf{k}\sigma \rangle \rightarrow \langle \mathbf{k}'\sigma' | \mathbf{k}\sigma \rangle_0$$

Continuidad adiabática

Cuasipartículas

Por lo tanto, a tiempos largos, los elementos de matriz son idénticos al caso sin interacciones.

Además los estados inicial y final, $|\mathbf{k}\sigma\rangle$ y $\hat{U}_\zeta(\infty, 0)|\mathbf{k}\sigma\rangle$, tienen propiedades en común, producto de las conservaciones:

- 1) Tienen un exceso de carga e , comparado con el fundamental.
- 2) Llevan una corriente $-e\hbar\mathbf{k}/m$, y
- 3) Un exceso de espín σ .
- 4) Obedecen la distribución de Fermi-Dirac.

Cuasipartículas

Cuasipartículas

Las quasipartículas son **excitaciones** del sistema con interacciones (partícula-agujero, por ejemplo).

Pueden ser identificadas por los **mismos números cuánticos** que en el sistema independiente. Llevan la misma carga, espín y momento.

Las quasipartículas **son fermiones** y, por lo tanto, su distribución es la de Fermi-Dirac.

Sin embargo, no podemos asegurar que sean autoestados (por eso el **cuasipartículas**). ¿Cuán bien definido está el concepto? ¿Son estables?

Cuasipartículas

Cuasipartículas, vida media

Para estimar la estabilidad de las cuasipartículas, calculemos su vida media haciendo uso de la Regla de Oro de Fermi:

$$\frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}} = 2 \frac{2\pi}{V^2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{q}} \left| \frac{V(\mathbf{q})}{\epsilon(\mathbf{q}, 0)} \right|^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})$$
$$\times [n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} (1 - n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) (1 - n_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})$$
$$- (1 - n_{\mathbf{k}}) (1 - n_{\mathbf{k}'}) n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} n_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}]$$

Cuasipartículas

Cuasipartículas, vida media

Para estimar la estabilidad de las cuasipartículas, calculemos su vida media haciendo uso de la Regla de Oro de Fermi:

$$\frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}} = 2 \frac{2\pi}{V^2} \sum_{\mathbf{k}' \mathbf{q}} \left| \frac{V(\mathbf{q})}{\epsilon(\mathbf{q}, 0)} \right|^2 \underbrace{\delta(\epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})}_{\text{conservación}} \times \underbrace{[n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} (1 - n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) (1 - n_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}})]}_{\text{scattering desde el estado } \mathbf{k}} - \underbrace{[(1 - n_{\mathbf{k}}) (1 - n_{\mathbf{k}'}) n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} n_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}]}_{\text{scattering hacia el estado } \mathbf{k}}$$

espín

elemento de matriz

Cuasipartículas

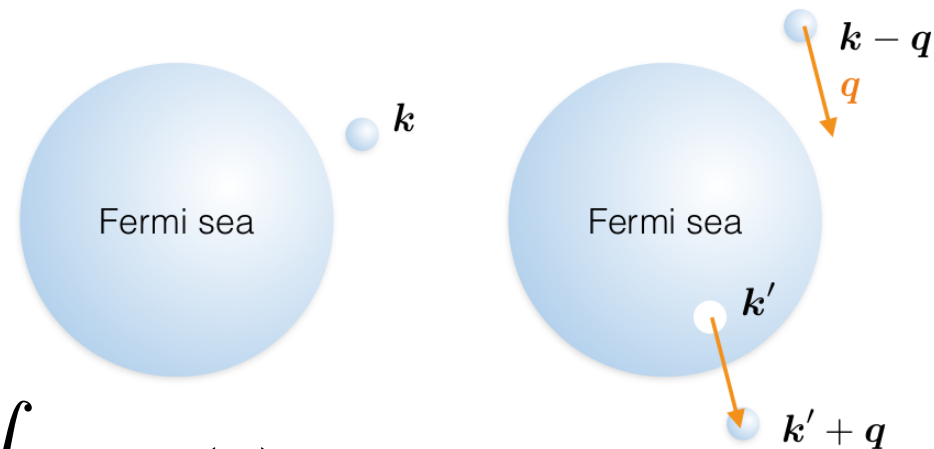
Cuasipartículas, vida media

Apliquemos esta fórmula al caso donde agregamos una única cuasipartícula de momento \mathbf{k} , justo sobre la energía de Fermi. El proceso principal de decaimiento es la interacción con un par electrón-agujero.

El resultado es

$$\frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{8\pi\hbar^3} \frac{D(\varepsilon_F)}{v_F^2} (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_F)^2 \int dq V(q)$$

$$\frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}} \propto (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_F)^2$$



Cuasipartículas

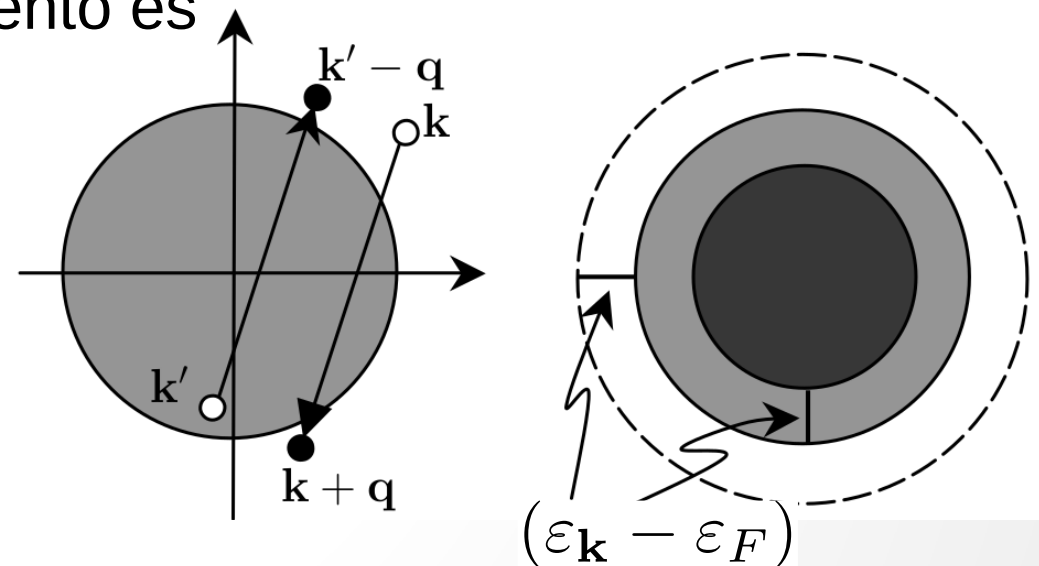
Cuasipartículas, vida media

Apliquemos esta fórmula al caso donde agregamos una única quasipartícula de momento \mathbf{k} , justo sobre la energía de Fermi. El proceso principal de decaimiento es la interacción con un par electrón-agujero.

Es consecuencia directa del principio de exclusión y la conservación de la energía.

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}'} = \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}$$

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} > \varepsilon_F \rightarrow \varepsilon_{\mathbf{k}'} < \varepsilon_F; \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} > \varepsilon_F; \varepsilon_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} > \varepsilon_F$$



¡El espacio de fase disponible es muy chico!

Cuasipartículas

Cuasipartículas, vida media

Si tenemos en cuenta la temperatura, las energías típicas de excitación son de orden $k_B T$. Así hay un rango de energías de ese ancho donde las energías pueden cumplir las conservaciones. Por lo tanto

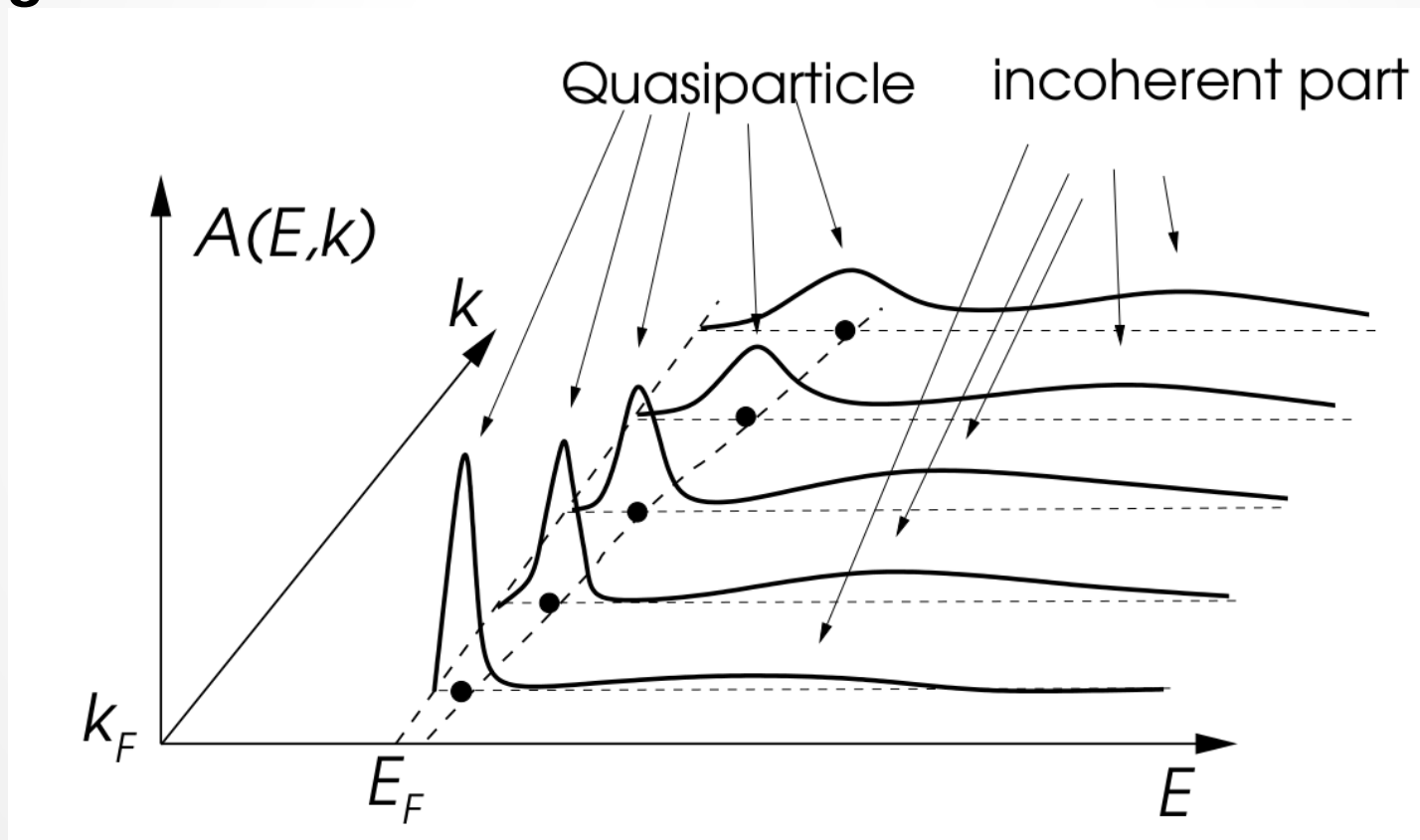
$$\frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}} = a(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_F)^2 + b(k_B T)^2$$

Las quasipartículas tienen una vida media que diverge a bajas temperaturas, a medida que nos acercamos a la energía de Fermi.

Cuasipartículas

Cuasipartículas, vida media

Las cuasipartículas tienen una vida media que diverge a bajas temperaturas, a medida que nos acercamos a la energía de Fermi.



Fenomenología

Teoría fenomenológica

En el sistema sin interacciones, cada estado excitado puede ser identificado por la variación en los números de ocupación respecto de equilibrio:

$$\delta n_{\mathbf{k}\sigma} = n_{\mathbf{k}\sigma} - n_{\mathbf{k}\sigma}^0$$

con un costo de energía

$$\delta E^0[\{\delta n_{\mathbf{k}\sigma}\}] = \sum_{\mathbf{k}\sigma} (\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma}^0 - \mu) \delta n_{\mathbf{k}\sigma}$$

que es una funcional simple de los $\delta n_{\mathbf{k}\sigma}$.

Fenomenología

Teoría fenomenológica

Por continuidad adiabática, lo mismo es válido para las cuasipartículas

$$\delta E[\{\delta n_{\mathbf{k}\sigma}\}].$$

Landau propuso una expansión para la energía de la forma:

$$E[\delta n] = E_0 + \sum_{\mathbf{k}\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} \delta n_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{V} \sum_{\substack{\mathbf{k}\mathbf{k}' \\ \sigma\sigma'}} f_{\mathbf{k},\mathbf{k}';\sigma\sigma'} \delta n_{\mathbf{k}\sigma} \delta n_{\mathbf{k}'\sigma'} + \mathcal{O}(\delta n^3)$$

Aquí E_0 es la energía del fundamental, y $\varepsilon_{\mathbf{k}\sigma}$ y $f_{\mathbf{k},\mathbf{k}';\sigma\sigma'}$ son parámetros a determinar desde teoría microscópica o experimentalmente.

Fenomenología

Teoría fenomenológica

La derivada variacional respecto de δn nos da la relación de dispersión renormalizada de una cuasipartícula, debido a la interacción con el resto de las mismas:

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} = \varepsilon_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}'\sigma'} f_{\mathbf{k},\mathbf{k}';\sigma\sigma'} \delta n_{\mathbf{k}'\sigma'}$$

Normalmente, como los momentos son muy cercanos al momento de Fermi, se ignora la dependencia radial de los parámetros y solo se considera la dependencia en el ángulo que forman \mathbf{k} y \mathbf{k}' :

$$f_{\mathbf{k},\mathbf{k}';\sigma\sigma'} \approx f_{\theta;\sigma\sigma'}$$

Fenomenología

Parámetros de Landau

A esta altura, se introducen los parámetros definitivos de la teoría.

Expandiendo los términos de acoplamiento en polinomios de Legendre:

$$f_{\theta; \sigma \sigma'} = \sum_{l=0}^{\infty} (f_l^s + \sigma \sigma' f_l^a) P_l(\cos \theta)$$

La densidad de estados en el nivel de Fermi se define

$$g(\varepsilon_F) = \frac{2}{V} \sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_F) = \frac{m^* k_F}{\pi^2 \hbar^2}$$

usando

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$$

Fenomenología

Parámetros de Landau

A esta altura, se introducen los parámetros definitivos de la teoría.

Primer parámetro: masa efectiva m^* .

El resto de los parámetros se conocen como “parámetros de Landau” y son:

$$F_l^s = g(\varepsilon_F) f_l^s$$

$$F_l^a = g(\varepsilon_F) f_l^a$$

Fenomenología

Calor específico

A partir de la funcional de energía y de sus parámetros pueden obtenerse resultados concretos acerca de observables experimentales.

Para el calor específico, a bajas temperaturas:

$$c_V(T) = \gamma T, \quad \text{con } \gamma = \frac{\pi^2 k_B^2 g(\varepsilon_F)}{3}.$$

Como $g(\varepsilon_F) = \frac{m^* k_F}{\pi^2 \hbar^2}$, midiendo el calor específico se puede

determinar la masa efectiva.

Fenomenología

Compresibilidad

Un gas de Fermi tiene una compresibilidad finita, debido al principio de exclusión.

La compresibilidad es

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T,N}$$

Para el líquido de Fermi:

$$\kappa = \frac{\kappa^{(0)}}{1 + F_0^s}, \quad \text{con} \quad \frac{1}{\kappa^{(0)}} = \frac{2}{3} n \varepsilon_F.$$

Fenomenología

Susceptibilidad magnética

En un gas de Fermi, el factor giromagnético se renormaliza

$$\tilde{g} = \frac{g}{1 + F_0^a}$$

y la susceptibilidad magnética es

$$\chi = \frac{1}{V} \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{\mu_B g(\varepsilon_F)}{1 + F_0^a}$$

La misma esta renormalizada tanto por F_0^a como por la masa efectiva (a través de la densidad de estados).

Fenomenología

Masa efectiva

Hasta aquí la masa efectiva fue introducida “a mano”, sin embargo la consistencia lógica de la formulación de Landau requiere que la misma este conectada a uno de los parámetros de la teoría.

La conexión esta relacionada con la invariancia de Galileo de la teoría:

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{1}{3}F_1^s.$$

Fenomenología

Renormalizaciones

Si revisamos lo enunciado hasta aquí tenemos:

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{m^*}{m}$$

$$\frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{m^*}{m} \frac{1}{1 + F_0^s}$$

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{1}{3} F_1^s$$

$$\frac{\chi}{\chi_0} = \frac{m^*}{m} \frac{1}{1 + F_0^a}$$

donde

$$\gamma_0 = \frac{k_B m k_F}{3}$$

$$\kappa_0 = \frac{3m}{n k_F^2}$$

$$\chi_0 = \mu_B^2 \frac{m k_F}{\pi^2}$$

Fenomenología

Renormalizaciones

Si revisamos lo enunciado hasta aquí tenemos:

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{m^*}{m}$$

$$\frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{m^*}{m} \frac{1}{1 + F_0^s}$$

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{1}{3} F_1^s$$

$$\frac{\chi}{\chi_0} = \frac{m^*}{m} \frac{1}{1 + F_0^a}$$

Posibles inestabilidades

donde

$$\gamma_0 = \frac{k_B m k_F}{3}$$

$$\kappa_0 = \frac{3m}{n k_F^2}$$

$$\chi_0 = \mu_B^2 \frac{m k_F}{\pi^2}$$

Fenomenología

Renormalizaciones

Incluso sistemas de fermiones con interacciones muy intensas se comportan como líquidos de Fermi.

Los ejemplos más notables son el ^3He y los llamados “Fermiones pesados” (heavy fermions) que son compuestos de metales de transición y tierras raras. Ambos son líquidos de Fermi muy renormalizados.

En el ^3He , a medida que se aumenta la presión aplicada acercándose a la solidificación, la compresibilidad disminuye, la masa aumenta (~ 6) y la respuesta magnética se incrementa.

En los fermiones pesados, las masas efectivas están entre 100 y 1000 veces la masa del electrón, llevando a la localización de las cuasipartículas.

Fin de la clase

¡Muchas gracias!