

Superconductividad I

Prof. Alberto Camjayi

Introducción

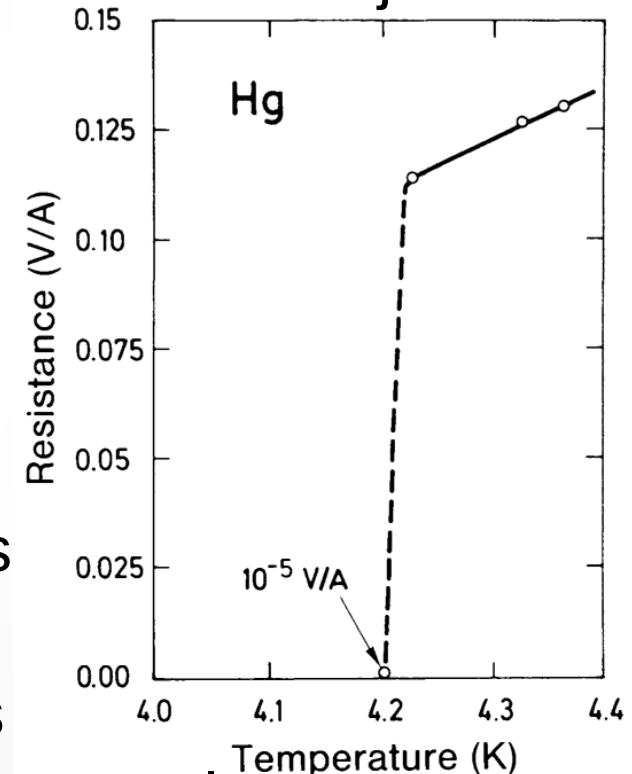
Nueva tecnología, nueva física

En 1908, en los laboratorios de la Universidad de Leiden, Kammerlingh Onnes, logró obtener helio líquido por primera vez. Esto inauguró una nueva área de la física, la física de las bajas temperaturas.

Tan solo tres años después, observó la caída a cero en la resistencia en una muestra de mercurio. La superconductividad había entrado en escena.

Más elementos se agregaron a la lista, cuyas temperaturas de transición van de unos pocos mK hasta algunas decenas de grados.

Las energías involucradas son varios órdenes de magnitud inferiores a las energías típicas en metales.

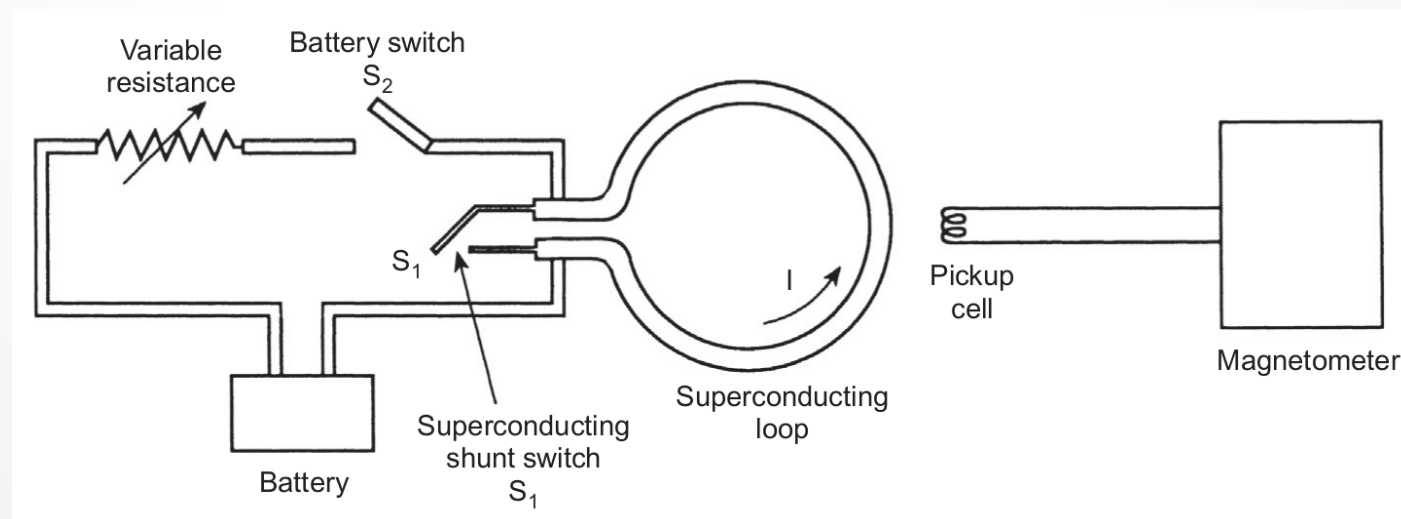


Introducción

Resistencia cero

Quizá la propiedad más conocida de los superconductores sea su nula resistencia eléctrica.

Esta propiedad, válida para corrientes menores que una “corriente crítica”, tiene como una de sus consecuencias la posibilidad de establecer “corrientes persistentes” (del orden de años) en anillos superconductores.



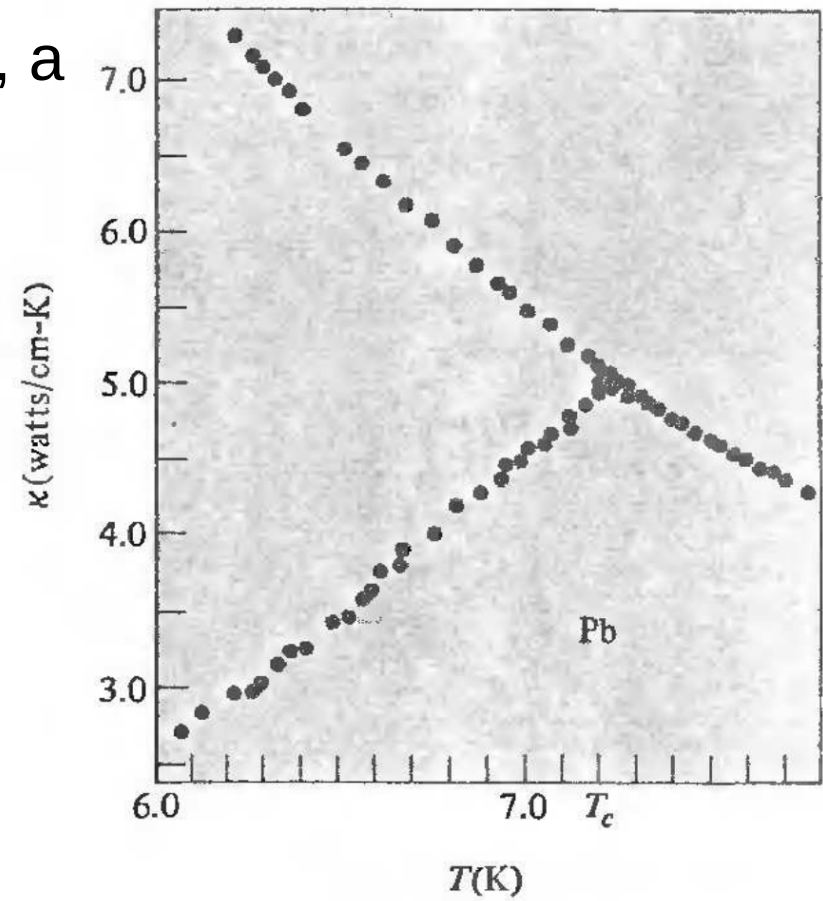
Introducción

Termoelectricidad

A diferencia de los metales normales, donde un buen conductor de la electricidad también lo es del calor, los superconductores son malos conductores del calor.

El coeficiente de Peltier es cero. O sea, a temperatura constante, una corriente eléctrica no está acompañada de una corriente de calor.

Esto indica que los electrones que participan de la corriente no transportan entropía.



Introducción

Efecto Meissner-Ochsenfeld

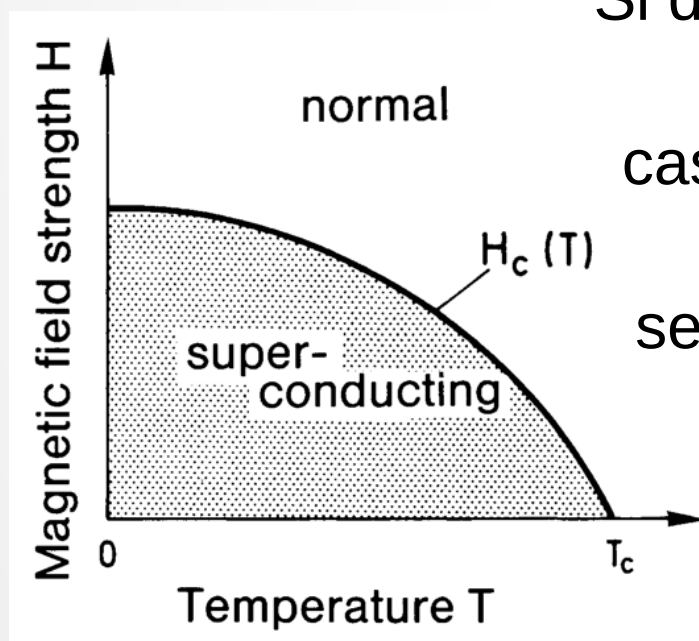
En 1933 se descubrió el efecto Meissner-Ochsenfeld. Los superconductores no se definen por ser metales perfectos (resistencia cero), si no por presentar ***diamagnetismo perfecto***.

$$\text{SC} \Rightarrow \begin{cases} \rho & = 0 \\ \chi & = -1 \end{cases}$$

Introducción

Campo magnético crítico

Si el campo magnético aplicado aumenta en intensidad, eventualmente es energéticamente más favorable para la muestra dejar la fase superconductora, volver al metal normal, y permitir la entrada del campo.



Si dejamos de lado los detalles geométricos de la muestra y nos concentramos en el caso más sencillo (cilindro orientado con el campo aplicado), experimentalmente se observan dos tipos de comportamiento.

Introducción

Campo magnético crítico

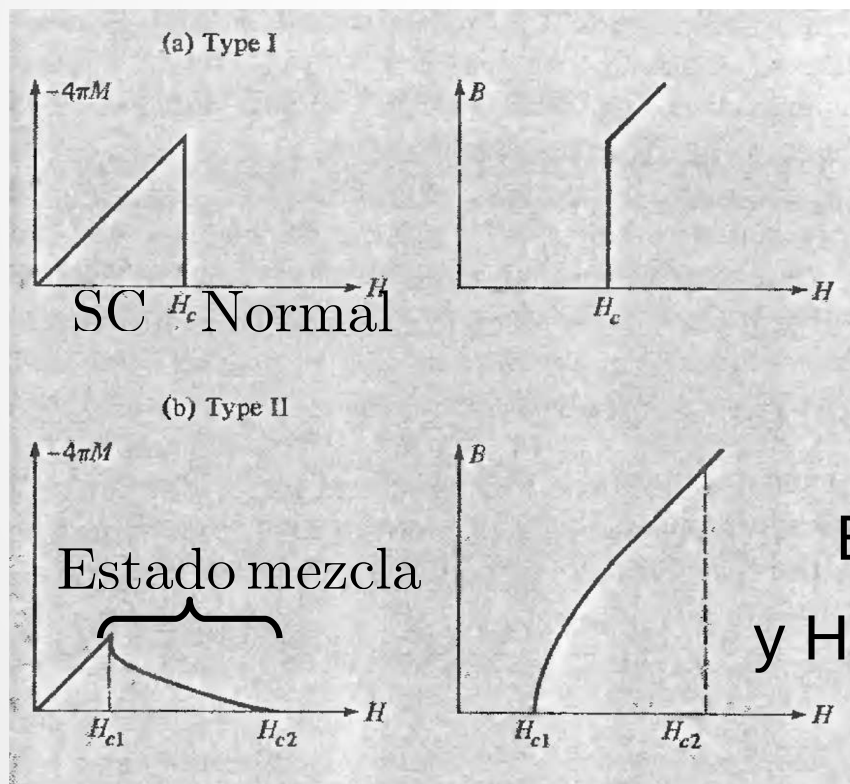
Si el campo magnético aplicado aumenta en intensidad, eventualmente es energéticamente más favorable para la muestra dejar la fase superconductora, volver al metal normal, y permitir la entrada del campo.

SC Tipo I

El campo ingresa en la muestra luego de la transición a la fase normal.

SC Tipo II

En un régimen intermedio entre H_{c1} y H_{c2} el campo ingresa en partes de la muestra, formándose vórtices SC.



Introducción

Calor específico

En un metal normal, el calor específico va como

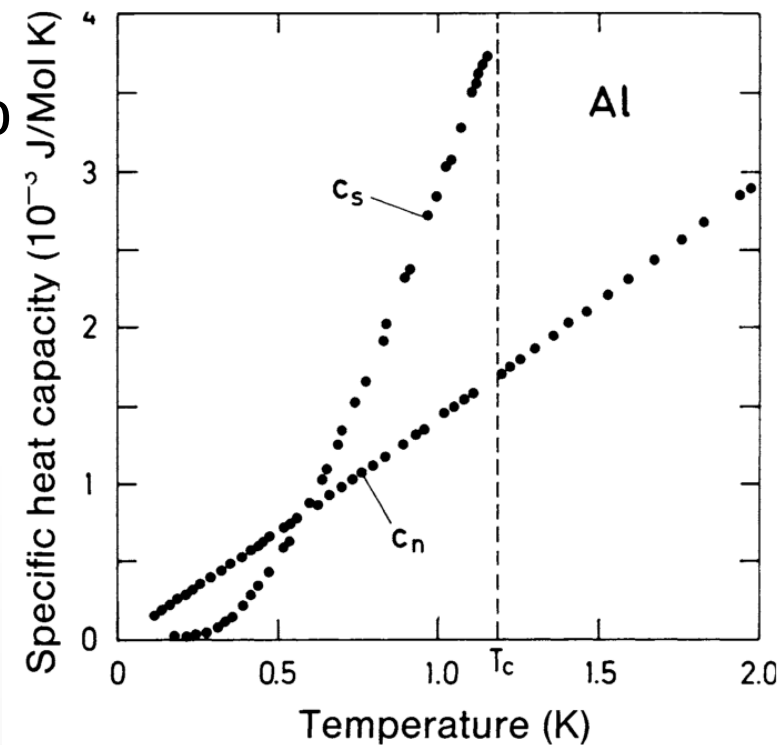
$$c_V \sim AT + BT^3$$

donde el término lineal es el aporte electrónico y el cúbico el debido a los fonones.

En un superconductor, el calor específico salta a un valor mayor cuando $T = T_C$, para luego descender a cero.

Si sustraemos el aporte fonónico, se encuentra que el término electrónico va como

$$c_V^{\text{elec.}} \propto e^{-\Delta/k_B T} \text{ con } \Delta \sim (k_B T_C).$$



Termodinámica

Energía libre de Gibbs

Experimentalmente, el campo bajo control es campo magnético \mathbf{H} .

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Bajo estas condiciones, la energía libre pertinente es la energía libre de Gibbs,

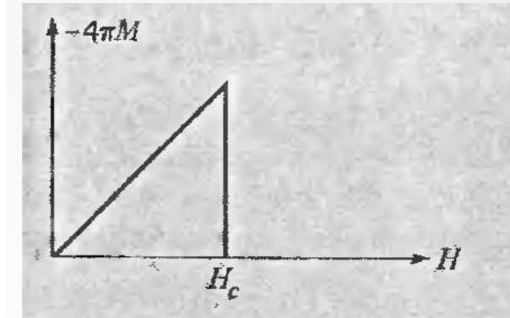
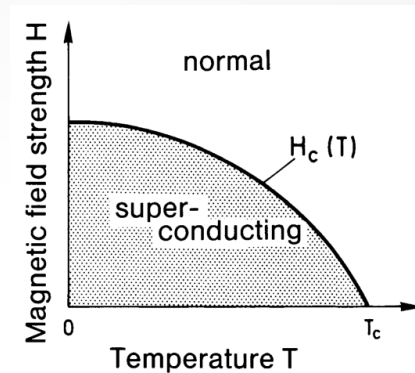
$$dG = -SdT - \mu_0 V \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H}.$$

Estudiemos el orden de la transición.

Termodinámica

Energía libre de Gibbs

A temperatura constante tenemos:



$$G_S(T, H_C) - G_S(T, 0) = -\mu_0 V \int_0^{H_C} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H} = \frac{\mu_0 V}{2} H_C^2.$$

\uparrow
 SC : $\mathbf{M} = -\mathbf{H}$

En coexistencia $G_S(T, H_C) = G_n(T, H_C)$.

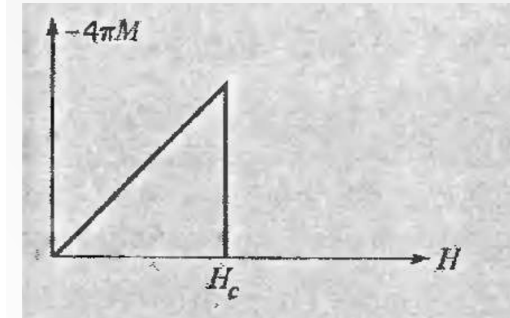
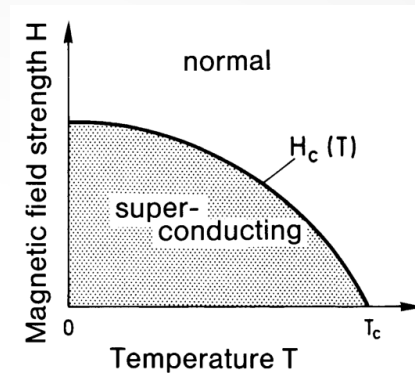
$$G_n(T, H_C) - G_n(T, 0) = -\mu_0 V \int_0^{H_C} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H} \approx 0.$$

\uparrow
 Normal : $\mathbf{M} \approx 0$; $\mathbf{B} \approx \mu_0 \mathbf{H}$

Termodinámica

Energía libre de Gibbs

A temperatura constante tenemos:



$$G_S(T, H_C) - G_S(T, 0) = -\mu_0 V \int_0^{H_C} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H} = \frac{\mu_0 V}{2} H_C^2.$$

\uparrow
 SC : $\mathbf{M} = -\mathbf{H}$

En coexistencia $G_S(T, H_C) = G_n(T, H_C)$.

$$\implies G_n(T, H_C) = G_n(T, 0) = G_S(T, H_C)$$

Reemplazando.....

Termodinámica

Energía libre de Gibbs

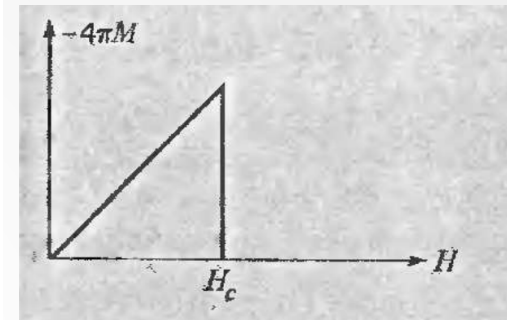
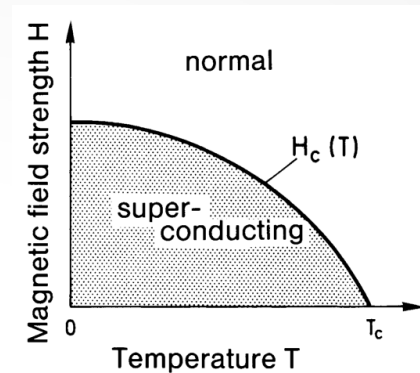
A temperatura constante tenemos:

$$G_n(T, 0) - G_S(T, 0) = \frac{\mu_0 V}{2} H_C^2$$

ó

$$g_n(T, 0) - g_S(T, 0) = \frac{\mu_0}{2} H_C^2$$

Esta “energía de condensación” es típica de transiciones de primer orden.

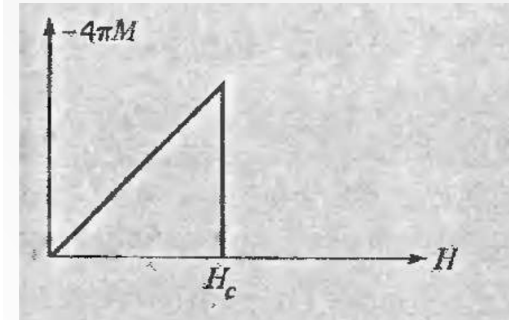
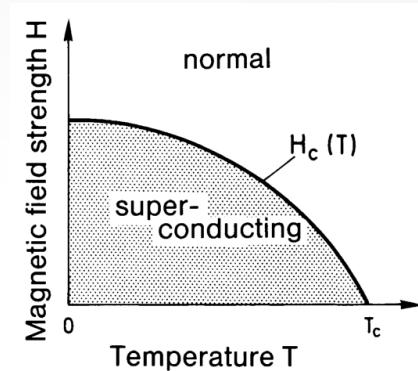


Termodinámica

Energía libre de Gibbs

Sobre la curva de coexistencia

$H_c(T)$, $g_n = g_S$:



$$-s_n dT - \mu_0 \mathbf{M}_n \cdot d\mathbf{H} \approx 0 = -s_S dT - \mu_0 \mathbf{M}_S \cdot d\mathbf{H} = -H$$

Calor latente:

$$s_n - s_S = -\mu_0 H_C \left. \frac{dH}{dT} \right|_{\text{coex.}} \quad \text{Clausius-Clapeyron}$$

Termodinámica

Energía libre de Gibbs

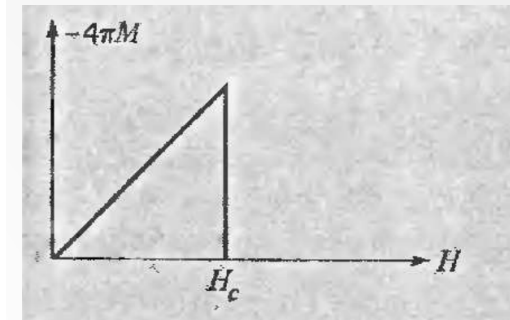
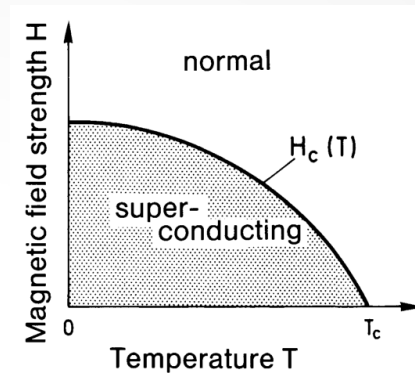
Sobre la curva de coexistencia el salto en el calor específico es, por lo tanto:

$$\Delta c|_{\text{coex.}} = T \frac{\partial}{\partial T} (s_n - s_S).$$

Experimentalmente, se observa

$$H_C(T) = H_C^0 \left(1 - \frac{T^2}{T_C^2} \right)$$

Reemplazando...



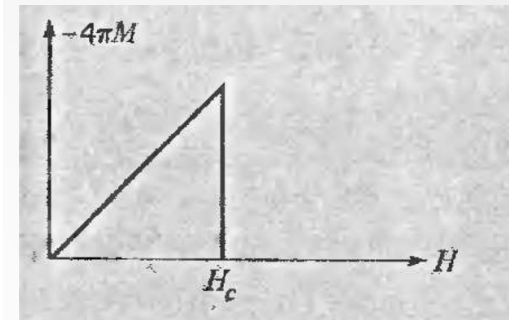
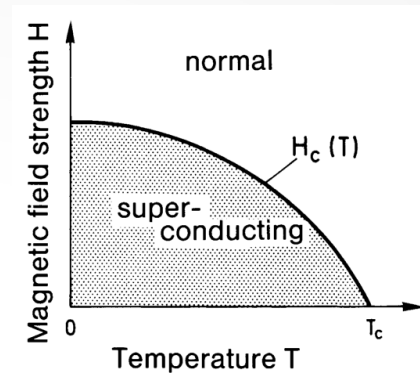
Termodinámica

Energía libre de Gibbs

Sobre la curva de coexistencia el salto en el calor específico es, por lo tanto:

$$\Delta c|_{\text{coex.}} = 2\mu_0 \frac{(H_C^0)^2}{T_C} \left(\frac{T}{T_C} - \frac{T^3}{T_C^3} \right)$$

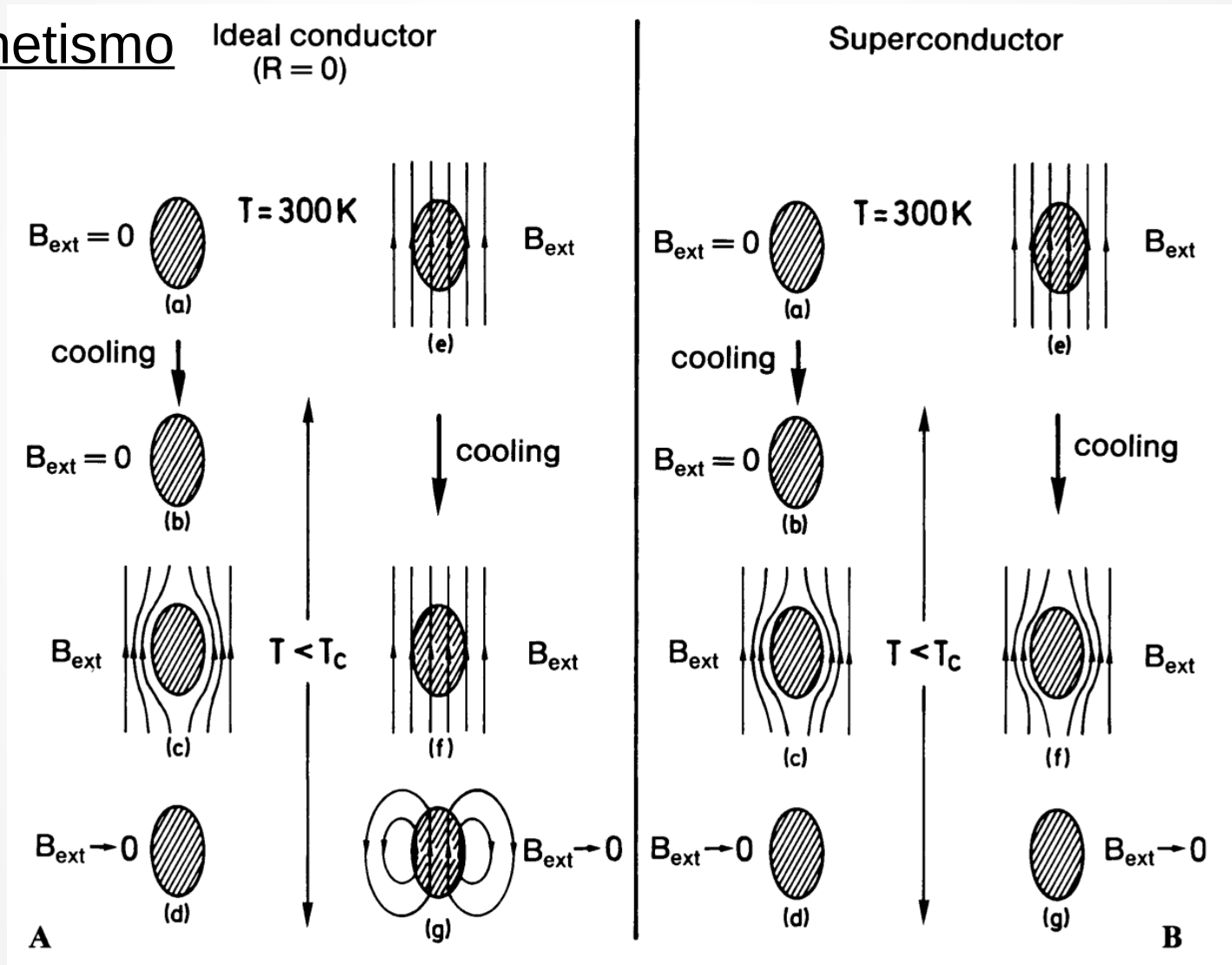
A temperatura cero, la transición es de 2^{do} orden (punto crítico).



Termodinámica

Efecto Meissner-Ochsenfeld (1933)

Diamagnetismo
perfecto



Ecuaciones de London

Primera descripción fenomenológica (1935)

¿Qué es más fundamental, ser un conductor perfecto o el diamagnetismo perfecto?

En un conductor perfecto,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E} \xrightarrow{\mathbf{J} = -en\dot{\mathbf{r}}} \dot{\mathbf{j}} = \frac{ne^2}{m}\mathbf{E}.$$

Tomando el rotor

$$\nabla \times \dot{\mathbf{j}} = -\frac{ne^2}{m}\dot{\mathbf{B}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \mathbf{J} + \frac{ne^2}{m}\mathbf{B} \right) = 0$$

más la ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}.$$

Ecuaciones de London

Primera descripción fenomenológica (1935)

¿Qué es más fundamental, ser un conductor perfecto o el diamagnetismo perfecto?

En un conductor perfecto,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E} \xrightarrow{\mathbf{J} = -en\dot{\mathbf{r}}} \dot{\mathbf{j}} = \frac{ne^2}{m}\mathbf{E}.$$

Se obtiene

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 ne^2}{m} \dot{\mathbf{B}} \equiv \lambda^{-2} \dot{\mathbf{B}}.$$

El problema con esta ecuación es que no describe correctamente el efecto Meissner.

Ecuaciones de London

Primera descripción fenomenológica (1935)

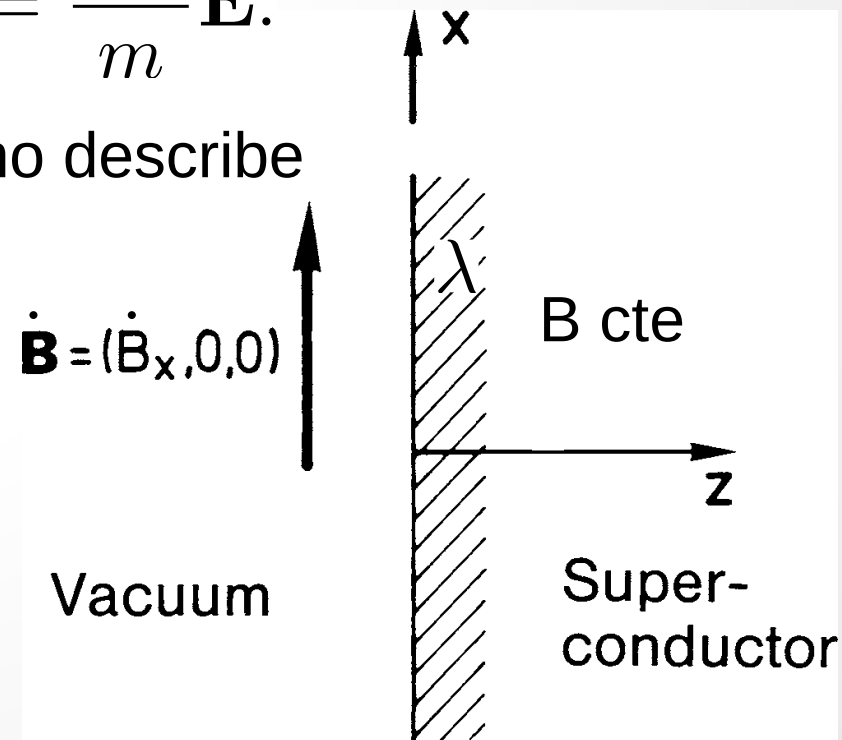
¿Qué es más fundamental, ser un conductor perfecto o el diamagnetismo perfecto?

En un conductor perfecto,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E} \xrightarrow{\mathbf{J} = -en\dot{\mathbf{r}}} \dot{\mathbf{j}} = \frac{ne^2}{m}\mathbf{E}.$$

El problema con esta ecuación es que no describe correctamente el efecto Meissner.

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 ne^2}{m} \dot{\mathbf{B}} \equiv \lambda^{-2} \dot{\mathbf{B}}.$$



Ecuaciones de London

Primera descripción fenomenológica (1935)

Propuesta de los hermanos London:

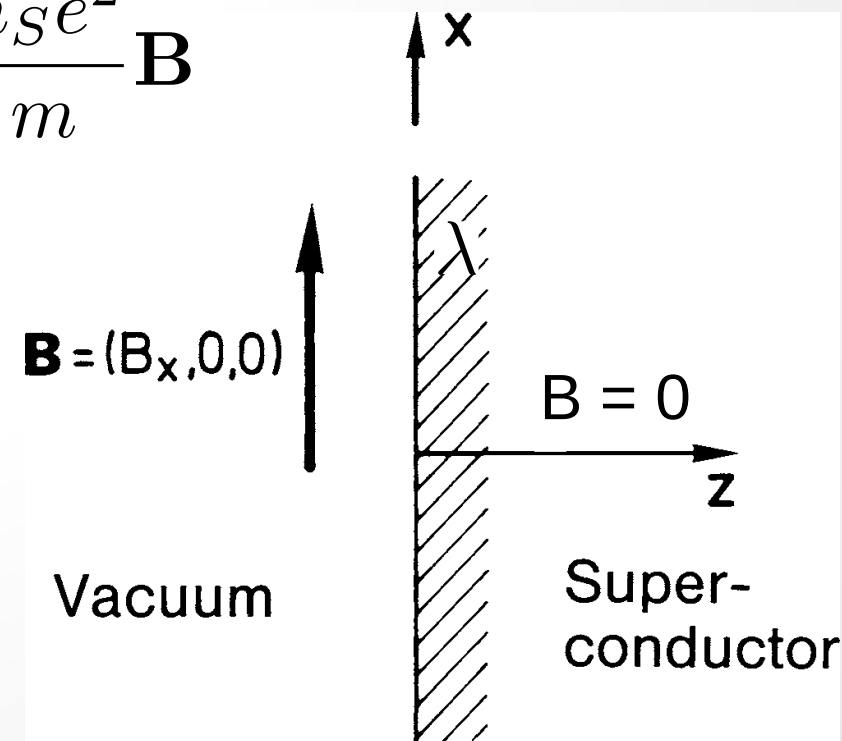
- Hay dos “fluidos” compuestos de electrones normales y superconductores.
- Los electrones superconductores cumplen

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \lambda_L^{-2} \mathbf{B} \iff \nabla \times \mathbf{J} = -\frac{n_s e^2}{m} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{j} = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E}$$

En el gauge de Coulomb

$$\mathbf{J} = -\frac{n_s e^2}{m} \mathbf{A}$$



Ecuaciones de London

Primera descripción fenomenológica (1935)

La teoría de los hermanos London captura la respuesta diamagnética de los superconductores.

La longitud de penetración del campo en su formulación es

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_S e^2}} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}.$$

Si bien cualitativamente la existencia de esta longitud característica es correcta, su valor numérico no concuerda con los datos experimentales. Pippard introdujo una corrección no local en la corriente, teniendo en cuenta que solo los electrones en un rango $\sim k_B T_C$ de la energía de Fermi participan.

Ecuaciones de London

Primera descripción fenomenológica (1935)

Rigidez de la función de onda.

Una interpretación alternativa del modelo fenomenológico fue presentado por uno de los hermanos London.

Unos años antes, Bloch había probado el siguiente teorema:
En un sistema puramente electrónico

$$\mathcal{H} = \sum_i \left(\frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} + U(\mathbf{r}_i) \right) + \sum_{i < j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

el valor medio del momento en el estado fundamental es nulo:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \Psi | \hat{\mathbf{p}} | \Psi \rangle = 0 \implies \mathbf{J} = -en \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m} = 0.$$

Ecuaciones de London

Primera descripción fenomenológica (1935)

Rigidez de la función de onda.

La demostración es por el absurdo. Supongamos que el valor medio del momento en el estado fundamental es distinto de cero

$$\langle \Psi | \hat{\mathbf{p}} | \Psi \rangle \neq 0$$

y consideremos la siguiente función de onda

$$\phi = \exp(i\delta\mathbf{p} \cdot \sum_i \mathbf{r}_i / \hbar) \Psi, \text{ con } \delta\mathbf{p} \text{ pequeño.}$$

En este nuevo estado, a cada electrón se le ha sumado un pequeño cambio en el momento. Por lo tanto el momento del fundamental cambia

$$\mathbf{p}_0 \rightarrow \mathbf{p}_0 + N\delta\mathbf{p}.$$

Ecuaciones de London

Primera descripción fenomenológica (1935)

Rigidez de la función de onda.

La demostración es por el absurdo.

Calculemos la energía media del nuevo estado. Claramente el corrimiento en momento no afecta su energía potencial (es igual a la del fundamental), pero la energía cinética se modifica

$$\langle E_{\text{cin.}} \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \phi^* \nabla_i^2 \phi$$

$$= \langle E_{\text{cin.}}^0 \rangle + N \frac{\mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{p}}{m} + N \frac{(\delta p)^2}{m}$$

$$\approx \langle E_{\text{cin.}}^0 \rangle + N \frac{\mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{p}}{m}.$$

Ecuaciones de London

Primera descripción fenomenológica (1935)

Rigidez de la función de onda.

La demostración es por el absurdo.

Eligiendo

$$\delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_0 < 0 \quad (\text{antiparalelos})$$

resulta

$$\langle E_{\text{cin.}} \rangle = \langle E_{\text{cin.}}^0 \rangle - N \frac{p_0 \delta p}{m} \implies \langle E \rangle < \langle E^0 \rangle$$

lo que es absurdo porque supusimos que Ψ es el estado fundamental. Por lo tanto

$$\langle \Psi | \hat{\mathbf{p}} | \Psi \rangle = 0.$$

Ecuaciones de London

Primera descripción fenomenológica (1935)

Rigidez de la función de onda.

Conociendo este resultado, Fritz London propuso que la función de onda del estado superconductor era “rígida”.

En ausencia de campo aplicado,

$$\langle \Psi | \hat{\mathbf{p}} | \Psi \rangle = 0.$$

Cuando aplicamos el campo el momento cambia a

$$\mathbf{p} \rightarrow m\mathbf{v} - e\mathbf{A}$$

Si postulamos que la función de onda es “rígida” ante el campo externo, o sea que **preserva sus propiedades sin campo.**

Ecuaciones de London

Primera descripción fenomenológica (1935)

Rigidez de la función de onda.

Conociendo este resultado, Fritz London propuso que la función de onda del estado superconductor era “rígida”.

Con campo aplicado,

$$\langle \Psi | \hat{\mathbf{p}} | \Psi \rangle = 0 \implies \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{e}{m} \mathbf{A}.$$

Resulta que

$$\mathbf{J} = -en_S \langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{e^2 n_S}{m} \mathbf{A}.$$

Ecuaciones de London

Teoría de Ginzburg-Landau (1950)

Recién de quince años después de la propuesta de los London, y casi cuarenta años después del descubrimiento experimental, Ginzburg y Landau presentaron una teoría fenomenológica superadora.

Estaba basada en la teoría de transiciones de fase de Landau. En una transición continua, la pendiente de la energía libre cambia de manera suave en la transición y una simetría del sistema se rompe.

En estas transiciones un nuevo parámetro macroscópico aparece: el “parámetro de orden”.

Ecuaciones de London

Teoría de Ginzburg-Landau (1950)

El parámetro de orden puede ser un escalar, vector, tensor o una magnitud compleja. Su forma la determina el tipo de simetría que se rompe en la transición.

Por ejemplo, en la transición paramagnética – ferromagnética, la simetría esférica se rompe porque aparece una magnetización espontánea en una dada dirección espacial.

El parámetro de orden, la magnetización, es un vector.

La propuesta es que la energía libre cerca de la transición continua es una función analítica del parámetro de orden.

Ecuaciones de London

Teoría de Ginzburg-Landau (1950)

El parámetro de orden puede ser un escalar, vector, tensor o una magnitud compleja. Su forma la determina el tipo de simetría que se rompe en la transición.

Por ejemplo, en la transición paramagnética – ferromagnética, la simetría esférica se rompe porque aparece una magnetización espontánea en una dada dirección espacial.

El parámetro de orden, la magnetización, es un vector.

La propuesta es que la energía libre cerca de la transición continua es una función analítica del parámetro de orden.

Ecuaciones de London

Teoría de Ginzburg-Landau (1950)

En general, la energía libre será

$$f(T, Y) = f_0(T, Y) + \alpha_2(T, Y)\eta^2 + \alpha_3(T, Y)\eta^3 + \dots$$

donde Y es una “fuerza generalizada” como presión, campo eléctrico o magnético, etc.

$f_0(T, Y)$ es la parte de la energía libre que no está involucrada directamente en la transición.

η es el parámetro de orden y se determina extremando la energía libre.

Los términos que aparecen en la expansión son determinados por las simetrías del problema y por el hecho que la energía libre es un escalar.

Ecuaciones de London

Teoría de Ginzburg-Landau (1950)

Por ejemplo, en el caso magnético, el parámetro de orden es la magnetización. La magnetización, que es un vector, cambia de signo ante inversión temporal, pero la energía libre es invariante y por lo tanto los términos de potencias impares no pueden aparecer.

$$f(T) = f_0(T) + \alpha m^2 + \frac{1}{2} \beta m^4$$

Para hallar una solución estable deben ser $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Ecuaciones de London

Teoría de Ginzburg-Landau (1950)

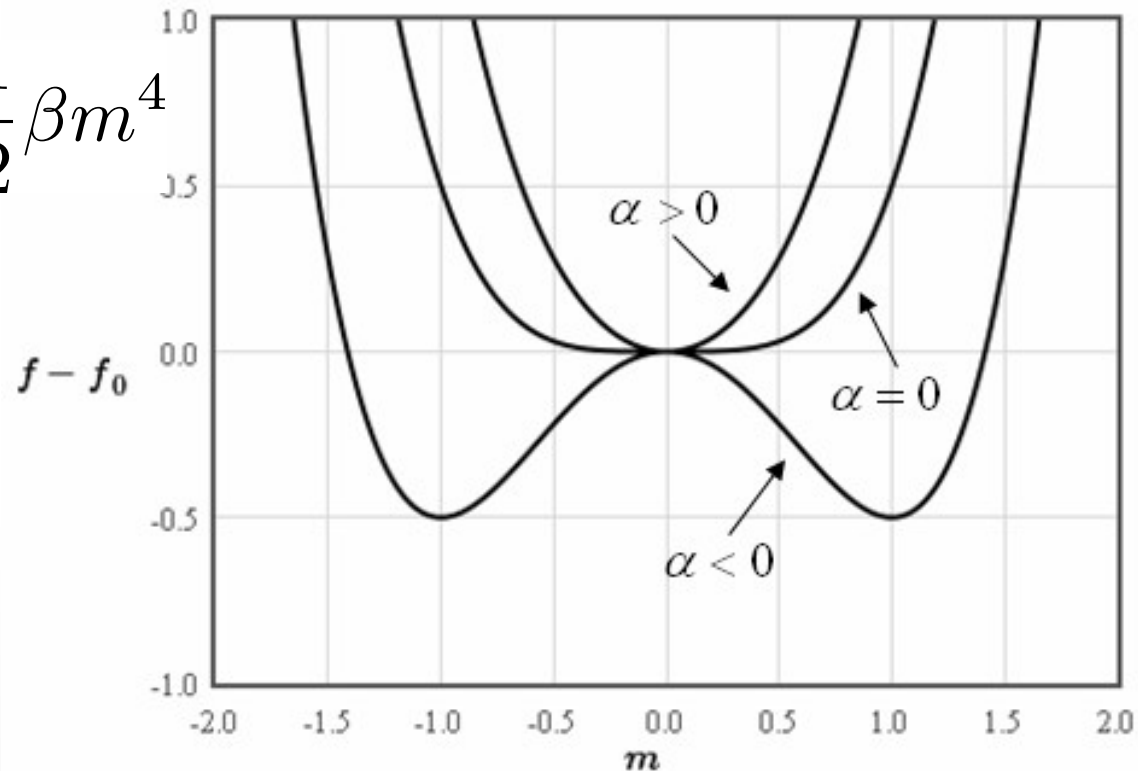
Por ejemplo, en el caso magnético, el parámetro de orden es la magnetización. La magnetización, que es un vector, cambia de signo ante inversión temporal, pero la energía libre es invariante y por lo tanto el término cúbico no puede aparecer.

$$f(T) = f_0(T) + \alpha m^2 + \frac{1}{2}\beta m^4$$

La transición de fase ocurre cuando $\alpha = 0$.

Cerca de la transición

$$\alpha \approx \alpha_0(T - T_C)$$



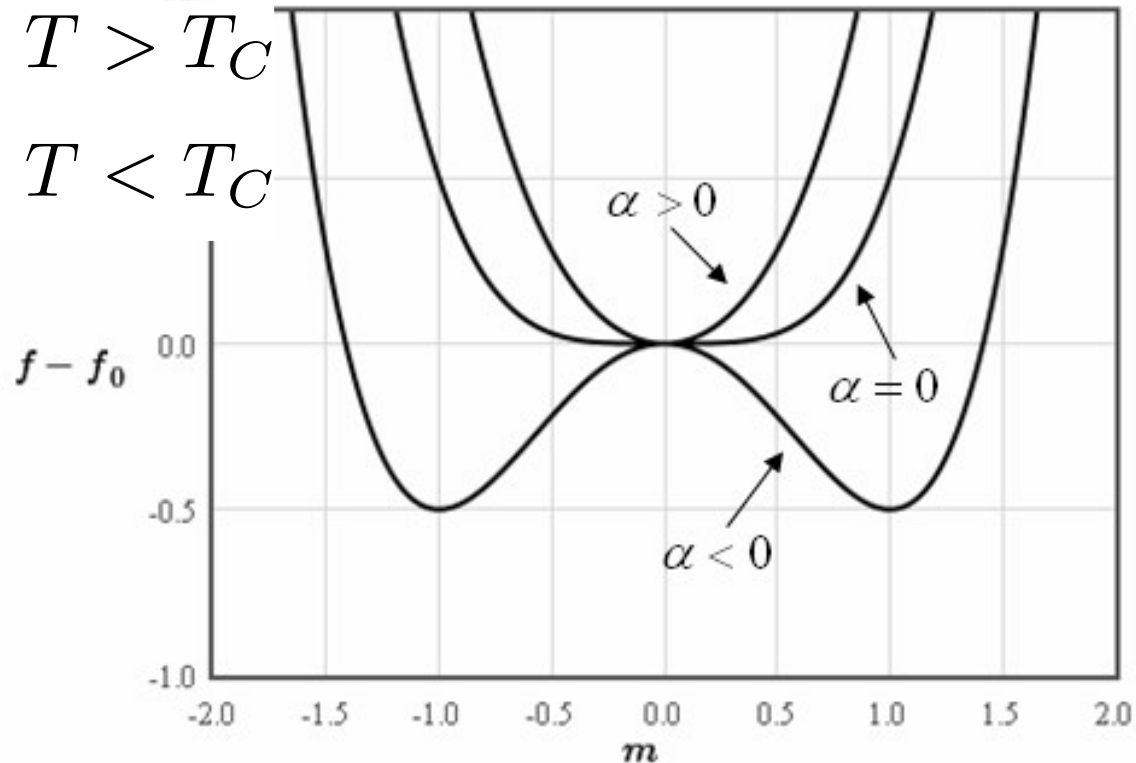
Ecuaciones de London

Teoría de Ginzburg-Landau (1950)

Extremando la energía libre

$$\frac{df}{dm} = 0 = 2\alpha_0(T - T_C)m + 2\beta m^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm \sqrt{\frac{\alpha_0(T - T_C)}{\beta}} \end{cases}$$



Ecuaciones de London

Teoría de Ginzburg-Landau (1950)

Reemplazando el valor del parámetro de orden, finalmente hallamos la energía libre del sistema:

$$f(T, m) = \begin{cases} f_0(T) & T > T_C \\ f_0(T) - \frac{\alpha_0^2 (T - T_C)^2}{\beta} & T < T_C \end{cases}$$

A partir de aquí se puede llevar a cabo el análisis termodinámico del problema. En este [enlace](#) pueden ver el ejemplo discutido. En la próxima clase veremos como Ginzburg y Landau aplicaron esta teoría al problema de la superconductividad.

Fin de la clase

¡Muchas gracias!