

Superconductividad II

Prof. Alberto Camjayi

Introducción

Teoría de Ginzburg-Landau (1950)

En la teoría de London, la densidad de “electrones superconductores” es un parámetro que se fija externamente. Además se lo trata como una constante en el tiempo y espacio, algo que se espera falle en las interfases.

La teoría de Ginzburg-Landau iba a mejorar la descripción del problema en el marco de las teorías de transición de fase de Landau.

Dada su naturaleza fenomenológica, su importancia no fue reconocida al principio, especialmente en occidente.

Todo eso cambió en 1959, cuando Gor'kov demostró que la teoría de Ginzburg-Landau es un límite de las ecuaciones microscópicas (BCS) **válida cerca de la temperatura de transición.**

Introducción

Parámetro de orden

Haciendo una analogía con la física de los superfluidos, Ginzburg y Landau postularon que los electrones superconductores pueden ser descritos por una pseudo función de onda de una partícula, $\phi(\mathbf{r})$.

Eligieron la amplitud de esta “función de onda” como parámetro de orden, con

$$\phi(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})|e^{i\theta}$$

$$|\phi|^2 \propto n_S.$$

Introducción

Parámetro de orden

En la teoría de GL, se supone que en el estado superconductor la corriente es transportada por electrones superconductores con las siguientes propiedades:

$$m^* = 2m_{\text{ef.}}$$

$$e^* = 2e$$

La masa es el doble de la masa efectiva (Bloch) y la carga el doble de los portadores normales (electrón o agujero).

Teoría

Funcional de energía libre

La funcional toma la forma

$$G_S[\phi, \mathbf{A}] = G_n + \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2m^*} (-i\hbar\nabla + e^* \mathbf{A})\phi^* (i\hbar\nabla + e^* \mathbf{A})\phi + \frac{B^2(\mathbf{r})}{2\mu_0} - \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) + a\phi\phi^* + \frac{1}{2}b\phi\phi^*\phi\phi^* + \dots \right]$$

Los términos magnéticos dan cuenta de la energía de condensación y los parámetros a y b son funciones solo de la temperatura.

Teoría

Funcional de energía libre

La funcional toma la forma

$$G_S[\phi, \mathbf{A}] = G_n + \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2m^*} (-i\hbar\nabla + e^* \mathbf{A})\phi^* (i\hbar\nabla + e^* \mathbf{A})\phi + \frac{B^2(\mathbf{r})}{2\mu_0} - \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) + a\phi\phi^* + \frac{1}{2}b\phi\phi^*\phi\phi^* + \dots \right]$$

Cerca de transición

$$a \approx a_0 \left(\frac{T}{T_C} - 1 \right) \quad b \approx b_0$$

Teoría

Ecuaciones de Ginzburg-Landau

Para encontrar el parámetro de orden, debemos extremar la funcional respecto de ϕ^* (ó ϕ) y \mathbf{A} .

Primer ecuación (derivada respecto del parámetro de orden):

$$\frac{1}{2m^*} (i\hbar\nabla + e^* \mathbf{A})^2 \phi + a\phi + b|\phi|^2\phi = 0$$

En el gauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), se puede expandir el cuadrado:

$$\frac{1}{2m^*} (\hbar^2 \nabla^2 \phi - 2i\hbar e^* \mathbf{A} \cdot \nabla \phi - e^{*2} \mathbf{A}^2 \phi) - a\phi - b|\phi|^2\phi = 0$$

Teoría

Ecuaciones de Ginzburg-Landau

Para encontrar el parámetro de orden, debemos extremar la funcional respecto de ϕ^* (ó ϕ) y \mathbf{A} .

Segunda ecuación (derivada respecto del potencial vector, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$):

$$\nabla \times \nabla \times \frac{\mathbf{A}}{\mu_0} + \frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) + \frac{e^{*2}}{m^*} \mathbf{A} |\phi|^2 = 0$$

En el gauge de Coulomb y usando la relación de Maxwell

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ nos permite reescribir la segunda ecuación de GL en la siguiente forma:

Teoría

Ecuaciones de Ginzburg-Landau

Para encontrar el parámetro de orden, debemos extremar la funcional respecto de ϕ^* (ó ϕ) y \mathbf{A} .

Segunda ecuación (derivada respecto del potencial vector $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$):

$$\nabla \times \nabla \times \frac{\mathbf{A}}{\mu_0} + \frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) + \frac{e^{*2}}{m^*} \mathbf{A} |\phi|^2 = 0$$

En el gauge de Coulomb y usando la relación de Maxwell:

$$\mathbf{J} = -\frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*} \mathbf{A} |\phi|^2$$

Teoría

Ecuaciones de Ginzburg-Landau

Así, extremar la funcional de energía libre, nos deja con dos ecuaciones diferenciales acopladas,

$$\frac{1}{2m^*} (\hbar^2 \nabla^2 \phi - 2i\hbar e^* \mathbf{A} \cdot \nabla \phi - e^{*2} \mathbf{A}^2 \phi) - a\phi - b|\phi|^2 \phi = 0$$

$$\mathbf{J} = -\frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*} \mathbf{A} |\phi|^2$$

Para la mayoría de las aplicaciones, las mismas deben ser resueltas numéricamente.

Veamos algunos casos simples, para entender sus propiedades fundamentales.

Ejemplos

Campo nulo, solución dentro del SC

Para comenzar a entender como se comporta el parámetro de orden, empecemos por el caso sencillo donde el campo es nulo, $\mathbf{A} = 0$, y bien adentro del SC, lejos de las interfases, $\nabla\phi = 0$. Como $\nabla^2\phi = 0$, en este caso la funcional puede integrarse directamente:

$$G_S = G_n + a|\phi|^2 + \frac{1}{2}b|\phi|^4$$

y solo una de las ecuaciones de GL es relevante, la otra es idénticamente nula,

$$a|\phi| + b|\phi|^2\phi = 0.$$

Ejemplos

Campo nulo, solución dentro del SC

Reemplazando la dependencia con la temperatura de los parámetros, obtenemos

$$|\phi|^2 = -\frac{a}{b} = -\frac{a_0}{b_0} \left(1 - \frac{T}{T_C}\right)$$

$$G_S = G_n - \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} = G_n - \frac{1}{2} \frac{a_0^2}{b_0} \left(1 - \frac{T}{T_C}\right)^2$$

Aquí podemos identificar la energía de condensación

$$\frac{1}{2} \frac{a^2}{b} = \frac{\mu_0}{2} H_C^2$$

Ejemplos

Campo nulo, solución en la frontera

Ahora, si bien los campos siguen siendo nulos, no se pueden despreciar los gradientes.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \phi + a\phi + b|\phi|^2 \phi = 0 \\ \phi^* \nabla \phi = \phi \nabla \phi^* \xrightarrow[\phi = |\phi| \exp(i\theta)]{} \theta = \text{cte} \Rightarrow \phi \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

La primera ecuación la podemos resolver en el caso sencillo 1D, donde el semi-espacio en $x < 0$ es normal (o vacío) y para $x > 0$ tenemos un SC.

Ejemplos

Campo nulo, solución en la frontera

Ahora, si bien los campos siguen siendo nulos, no se pueden despreciar los gradientes.

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\phi}{dx^2} + a\phi + b|\phi|^2\phi = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$\phi = \sqrt{\frac{|a|}{b}} \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2\xi}}\right).$$

Como podemos ver

$$\phi \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \qquad \phi \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \phi_\infty \equiv \sqrt{\frac{|a|}{b}}.$$

Ejemplos

Campo nulo, solución en la frontera

Ahora, si bien los campos siguen siendo nulos, no se pueden despreciar los gradientes.

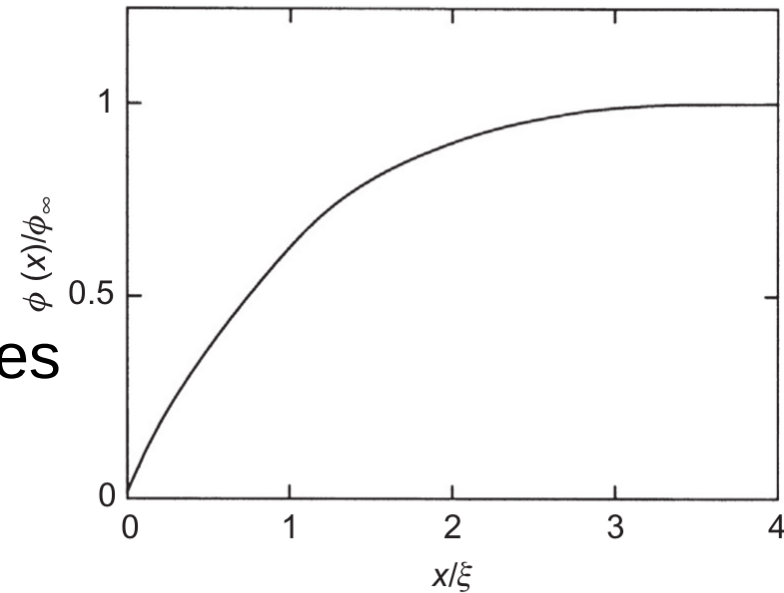
$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\phi}{dx^2} + a\phi + b|\phi|^2\phi = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$\phi = \sqrt{\frac{|a|}{b}} \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right).$$

Además, la longitud de coherencia nos define la región del espacio donde el parámetro de orden cambia apreciablemente.

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*|a|}$$



Ejemplos

Cuantización del flujo magnético

En la clase pasada comentamos que el flujo de campo magnético en el estado mixto de los SC tipo II está cuantizado. Veamos como surge este resultado.

Si escribimos

$$\phi(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})|e^{i\theta}$$

y reemplazamos en la ecuación de la corriente (2^{da} ecuación de GL), encontramos que

$$\nabla\phi = i\phi\nabla\theta + e^{i\theta}\nabla|\phi|$$

$$\Rightarrow \mathbf{J} = \frac{\hbar e^*}{m^*} |\phi|^2 \nabla\theta - \frac{e^{*2}}{m^*} |\phi|^2 \mathbf{A}$$

Ejemplos

Cuantización del flujo magnético

En la clase pasada comentamos que el flujo de campo magnético en el estado mixto de los SC tipo II está cuantizado. Veamos como surge este resultado.

Dividiendo por $e^{*2}|\phi|^2/m^*$ y tomando una integral de línea en un circuito cerrado:

$$\frac{m^*}{e^{*2}} \oint \frac{\mathbf{J}}{|\phi|^2} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{e^*} \oint \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} - \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

Como el parámetro de orden tiene que ser univaluado, debe ser

$$\frac{\hbar}{e^*} \oint \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos

Cuantización del flujo magnético

En la clase pasada comentamos que el flujo de campo magnético en el estado mixto de los SC tipo II está cuantizado. Veamos como surge este resultado.

Por lo tanto,

$$\frac{m^*}{e^{*2}} \oint \frac{\mathbf{J}}{|\phi|^2} \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = n\Phi_0$$

donde $\Phi_0 = \frac{h}{e^*}$ es el “cuanto de flujo”. Podemos ir más lejos.

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi$$

Ejemplos

Cuantización del flujo magnético

En la clase pasada comentamos que el flujo de campo magnético en el estado mixto de los SC tipo II está cuantizado. Veamos como surge este resultado.

Por lo tanto,

$$\frac{m^*}{e^{*2}} \oint \frac{\mathbf{J}}{|\phi|^2} \cdot d\mathbf{l} + \Phi = n\Phi_0$$

Este resultado, válido para todos los SC, nos dice que la suma del flujo magnético más la integral de línea que involucra la corriente está cuantizada, como se observa en los experimentos.

Ejemplos

Longitud de penetración, λ_L

Revisemos ahora el caso con campo externo y veamos si recuperamos el resultado de London. Supondremos en este cálculo que $\lambda_L \ll \xi$, como sucede en los SC tipo I.

Para simplificar las cuentas, repetamos la geometría sencilla de un semi-espacio normal en $x < 0$ y SC en $x > 0$.

Tomemos un campo externo constante de modo que, en el gauge de Coulomb,

$$\mathbf{A} = A_y(x)\hat{y}$$

En 1D el parámetro de orden se puede hacer real. Veámoslo explícitamente.

Ejemplos

Longitud de penetración, λ_L

Tomemos un camino de integración dentro del SC y evaluemos

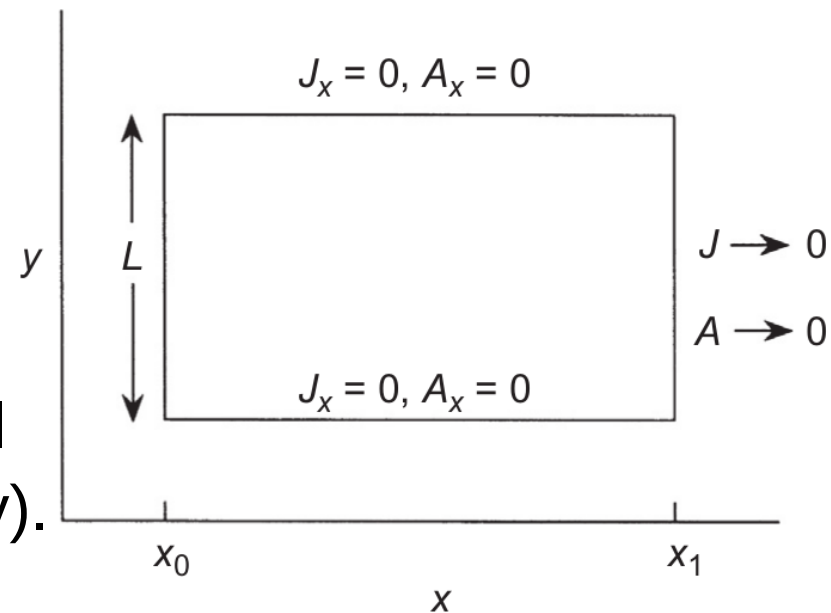
$$\frac{m^*}{e^{*2}} \oint \frac{\mathbf{J}}{|\phi|^2} \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = n\Phi_0$$

Muy dentro del SC, tanto la corriente como el potencial son nulos.

En los tramos horizontales, el potencial no contribuye (solo tiene componente y).

Como la corriente no entra en el SC, esta tampoco tiene componente x.

Finalmente, solo la integral en x_0 (cerca de la interfase) contribuye.



Ejemplos

Longitud de penetración, λ_L

Tomemos un camino de integración dentro del SC y evaluemos

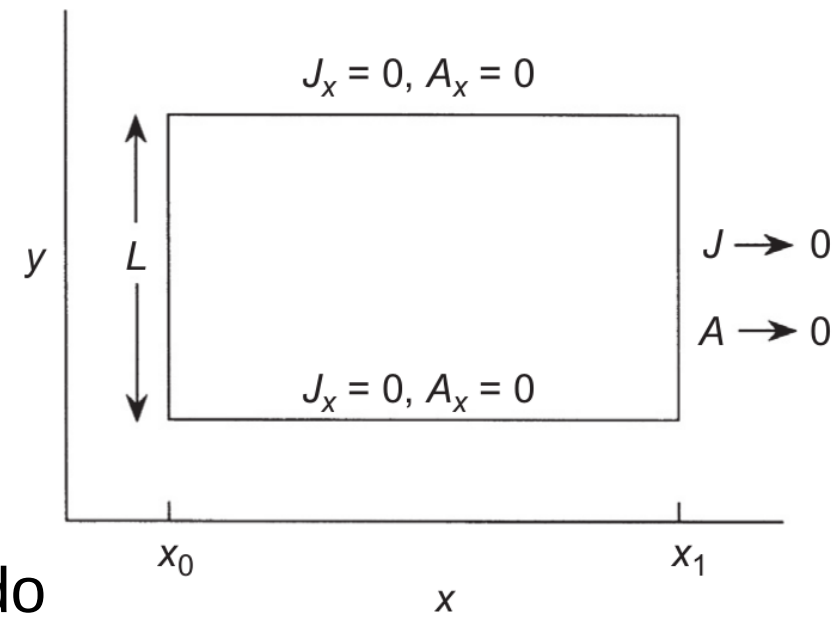
$$\frac{m^*}{e^{*2}} \oint \frac{\mathbf{J}}{|\phi|^2} \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = n\Phi_0$$

Por lo tanto:

$$L \left[\frac{m^* J_y(x_0)}{e^{*2} |\phi|^2} + A_y(x_0) \right] = n\Phi_0$$

Como L es arbitrario y n está cuantizado

$$n = 0 \implies \oint \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} = 0$$



La fase es una constante que elegimos nula.

Ejemplos

Longitud de penetración, λ_L

Finalmente, como x_0 es arbitrario

$$J_y(x) = \frac{e^{*2} |\phi|^2}{m^*} A_y(x) \quad \text{¡London!}$$

Como el parámetro de orden es real, la segunda ecuación de GL se puede escribir como

$$\frac{d^2}{dx^2} A_y(x) = \frac{\mu_0 e^{*2} |\phi(x)|^2}{m^*} A_y(x)$$

Si la longitud de coherencia es pequeña comparada con la variación espacial del potencial vector, podemos aproximar

$$\phi(x) \approx \phi_\infty$$

Ejemplos

Longitud de penetración, λ_L

En ese caso, podemos definir

$$\lambda_L^2 = \frac{m^*}{\mu_0 e^{*2} |\phi_\infty|^2} \quad \text{Longitud de penetración de London}$$

Con esta aproximación recuperamos la solución de London

$$\frac{d^2}{dx^2} A_y(x) = \frac{A_y(x)}{\lambda_L^2} \implies A_y(x) = A_0 e^{-\frac{x}{\lambda_L}}, \quad x > 0.$$

Más allá de las correcciones de superficie, ignoradas en la aproximación $\phi(x) \approx \phi_\infty$, este es el comportamiento observado en SC del tipo I.

Bonus

Mecanismo de Higgs-Anderson

Hasta ahora hemos considerado únicamente el estado $\phi = \phi_0$, que minimiza la energía libre. Esto es equivalente a un **estado de campo medio**, porque el parámetro es una **constante** que minimiza la energía libre.

¿Qué sucede si incluimos fluctuaciones en el parámetro de orden?

Para mantener los cálculos sencillos, veamos nuevamente el caso sin campo externo.

Bonus

Mecanismo de Higgs-Anderson

¿Qué sucede si incluimos fluctuaciones en el parámetro de orden?

$$G_S[\phi] = G_n +$$

$$+ \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2m^*} (-i\hbar\nabla)\phi^* (i\hbar\nabla)\phi + a\phi\phi^* + \frac{b}{2} (\phi\phi^*)^2 \right]$$

Ya vimos que esta energía libre se minimiza con $|\phi_0|^2 = -\frac{a}{b}$

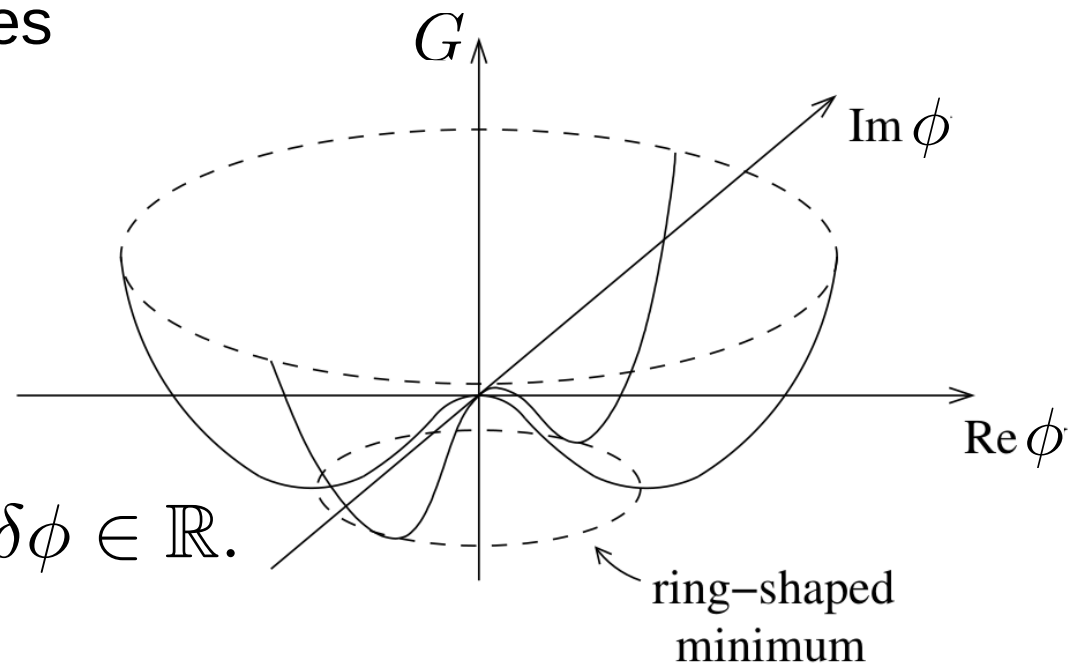
Bonus

Mecanismo de Higgs-Anderson

Todos los estados con amplitud $|\phi_0| = \sqrt{-a/b}$ son por lo tanto buenas soluciones de campo medio.

Permitamos ahora fluctuaciones en el parámetro de orden

$$\phi = (\phi_0 + \delta\phi)e^{i\theta}, \text{ con } \phi_0, \delta\phi \in \mathbb{R}.$$



Bonus

Mecanismo de Higgs-Anderson

La funcional es

$$G_S[\phi] - G_n = \int d\mathbf{r} \left[a(\phi_0 + \delta\phi)^2 + \frac{b}{2}(\phi_0 + \delta\phi)^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \frac{\hbar}{i}(\nabla\delta\phi)e^{i\theta} + \hbar(\phi_0 + \delta\phi)(\nabla\theta)e^{i\theta} \right|^2 \right]$$

Si nos quedamos solo hasta segundo orden y recordamos que los términos de primer orden se anulan por ser un desarrollo alrededor de un mínimo, tenemos:

$$G_S[\phi] = G[\phi_0] + G[\delta\phi, \theta]$$

Bonus

Mecanismo de Higgs-Anderson

Donde

$$G[\delta\phi, \theta] \simeq \int d\mathbf{r} \left[-2a\delta\phi^2 + \frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \delta\phi \right)^* \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \delta\phi \right) - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{a}{b} (\nabla \theta)^* \nabla \theta \right]$$

Si transformamos Fourier

$$\delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \delta\phi(\mathbf{k}) \text{ y análogamente para } \theta(\mathbf{r}).$$

Bonus

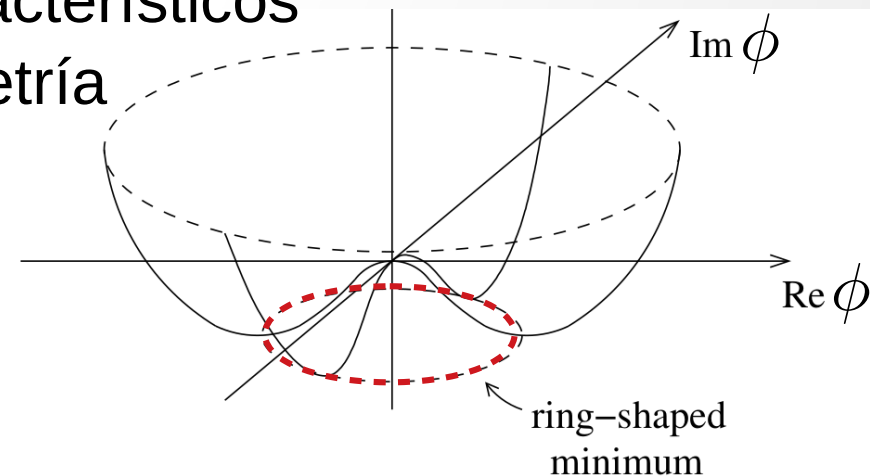
Mecanismo de Higgs-Anderson

Obtenemos

$$G[\delta\phi, \theta] \simeq \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(-2a + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \right) \delta\phi_{\mathbf{k}}^* \delta\phi_{\mathbf{k}} - \frac{a}{b} \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \theta_{\mathbf{k}}^* \theta_{\mathbf{k}} \right]$$

Las fluctuaciones en la fase, tienen un espectro sin gap (las energías arrancan en cero). Este tipo de modos, se conocen como *modos de Goldstone*, y son característicos en sistemas donde se rompe una simetría continua.

En nuestro caso la simetría global de fase.



Bonus

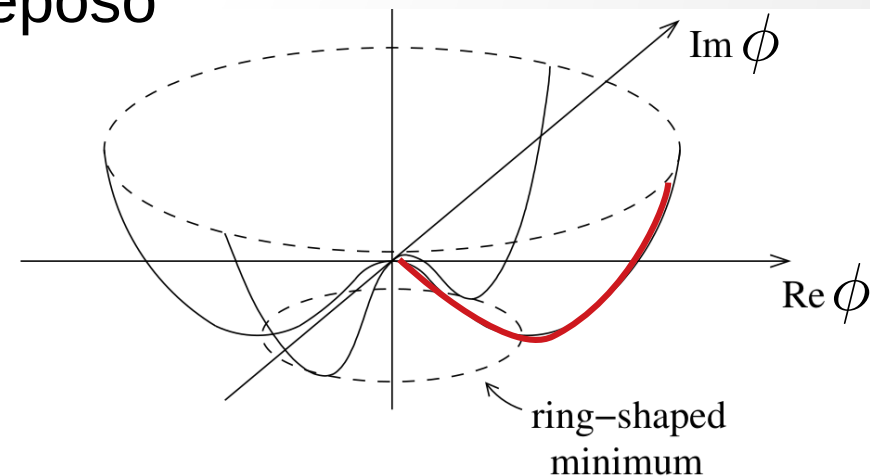
Mecanismo de Higgs-Anderson

Obtenemos

$$G[\delta\phi, \theta] \simeq \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(-2a + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \right) \delta\phi_{\mathbf{k}}^* \delta\phi_{\mathbf{k}} - \frac{a}{b} \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \theta_{\mathbf{k}}^* \theta_{\mathbf{k}} \right]$$

Las fluctuaciones en la amplitud, tienen un espectro con gap, las energías arrancan desde un valor mínimo.

Esta energía mínima es la “masa en reposo” del modo.



Bonus

Mecanismo de Higgs-Anderson

En el caso más interesante, donde hay campo externo aplicado, una análisis similar lleva a la siguiente conclusión:

- Las fluctuaciones de amplitud se llaman ahora modos de Higgs y están desacoplados de las fluctuaciones del potencial vector.
- Las fluctuaciones de fase terminan siendo “absorbidas” por el potencial vector, que desarrolla una componente longitudinal dentro del SC y además es “masivo”. El término de masa que aparece es lo que finalmente lleva al efecto Meissner.

Fin de la clase

¡Muchas gracias!