Niveles de Landau

22 de abril de 2022

1. Ejercicio 8

En este ejercicio queremos estudiar un gas de electrones bidimensional, que se encuentra en el plano xy, en presencia de un campo magnético $\vec{B} = B\,\hat{z}$. Nos dicen también que el sistema tiene los primeros p niveles completamente ocupados y una fracción λ del nivel $p+1$ ocupada. De esto último podemos inferir que el sistema se encuentra en el estado fundamental.

Sabemos que la solución clásica nos da órbitas circulares en el plano. En el caso cuántico obtenemos lo mismo, pero ahora las órbitas se encuentran cuantizadas, y por lo tanto la energía se discretiza y obtenemos una solución análoga a la del oscilador armónico (ver, por ejemplo, Landau Lifshitz vol. 3 Quantum Mechanics non relativistic theory, cap 15/ Cohen-Tannoudji cap. 6):

$$E_j = \frac{\hbar\,e\,B}{m}\left(j + \frac{1}{2}\right).$$

Queremos calcular la densidad de estados del sistema. Para eso consideramos primero la densidad de estados en el caso en el que no hay campo magnético. Esto nos da la densidad de estados para el gas de electrones libres en dos dimensiones:

$$g(\epsilon) = \frac{m}{\pi\hbar^2}.$$

Ahora tenemos en cuenta que al prender el campo magnético, tenemos una concentración de todos los estados del continuo en los estados discretos, como se muestra en la Figura 1. Esto nos permite calcular la degeneración:

$$g_B(\epsilon) = \frac{m}{\pi\hbar^2}\,\frac{e\,\hbar\,B}{2m} = \frac{e\,B}{2\pi\hbar},$$

que es la cantidad de estados del continuo que van a parar a cada nivel discreto.

Nos interesa comparar las situaciones con y sin campo, para esto vamos a calcular algunas magnitudes en ambos escenarios. Comenzamos por la densidad en el caso en el que no hay campo magnético:

$$n = \int_0^{\epsilon_f} d\epsilon\, g(\epsilon) = \frac{m\,\epsilon_f}{\pi\hbar^2}.$$

De donde obtenemos que la energía de Fermi en ausencia de campo magnético es:

$$\epsilon_f = \frac{\hbar^2\,n\,\pi}{m}.$$

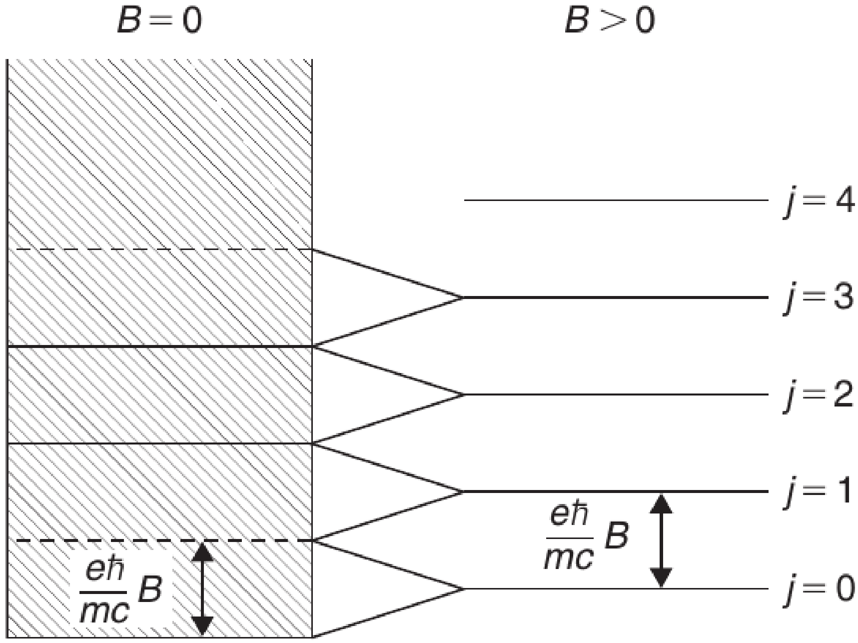

Figura 1: Niveles de energía del sistema sin campo magnético (izq) y con campo magnético (der)

Calculemos lo mismo para el caso donde tenemos campo magnético.

$$n = 2\left(\sum_{0}^{p-1} g_B(E_i) + \lambda\, g(E_p)\right).$$

Donde sumamos sobre todos los niveles, considerando la degeneración correspondiente a cada uno, y considearmos que el último nivel está poblado con una fracción λ. Utilizando que la densidad de estados es constante, podemos obtener

$$n = \frac{e\,B}{\hbar\pi}\,(p + \lambda).$$

De esta expresión podemos obtener cuál es el último nivel poblado:

$$p = floor(\frac{n\,\pi\,\hbar}{e\,B})$$

donde $floor(\cdot)$ es la función piso, que redondea al número entero inferior. Para simplificar un poco, consideremos una situación donde el último nivel se encuentra completo ($\lambda = 0$). En ese caso $p = \frac{n\,\pi\,\hbar}{e\,B}$. Al tener niveles discretos, la energía de Fermi se corresponde con el último nivel ocupado, por lo que tenemos que evaluar la expresión de la energía para el nivel p:

$$\epsilon_f = \frac{\hbar\,e\,B}{m}\,(p + \frac{1}{2}).$$

Esto nos da:

$$\epsilon_f = \frac{\hbar^2\,\pi\,n}{m} + \frac{\hbar\,e\,B}{2m}.$$

El primer término se corresponde con la energía de Fermi para $B = 0$, mientras que el segundo término es la variación producida por el campo, que como vemos es lineal con la intensidad del mismo.

Queremos estudiar ahora cómo cambia la energía del sistema al prender el campo magético. Comenzamos calculando la energía sin campo:

$$E(0) \,=\, \int_0^{\epsilon_f} d\epsilon\, \epsilon\, g(\epsilon) \,=\, \frac{\epsilon_f^2\, m}{2\pi\, \hbar^2} \,=\, \frac{n^2\, \pi\, \hbar^2}{2m}.$$

Calculemos ahora para el caso con campo.

$$E(B) \,=\, 2\left(\sum_0^{p-1} g_B(E_i)\, \frac{\hbar\, e\, B}{m}\, \left(i\,+\,\frac{1}{2}\right) \,+\, \lambda\, g(E_p)\, \frac{\hbar\, e\, B}{m}\, \left(p\,+\,\frac{1}{2}\right)\right).$$

Trabajando un poco con esta expresión se obtiene

$$E(B) \,=\, \frac{e^2\, B^2}{m\pi}\, (p\,+\,1)\, (p\,+\,\lambda)\,.$$

Recordamos ahora que $n \,=\, \frac{e\, B}{\hbar\pi}\, (p+\lambda)$. Con esto en mente podemos reescribir la energía como:

$$E(B) \,=\, \frac{e^2\, B^2}{2\, m\, \pi}\, \left[\, (p\,+\,\lambda)^2 \,-\, (p\,+\,\lambda)(\lambda\,-\,1)\right],$$

que reemplazando n da:

$$E(B) \,=\, \underbrace{\frac{\hbar^2\, \pi\, n^2}{2m}}_{E(0)} \,-\, \underbrace{\frac{\hbar\, e\, B\, n}{2m}\, (\lambda - 1)}_{\Delta E}\,.$$

Encontramos entonces cómo varía la energía al prender el campo.

Para visualizar el resultado, utilizamos que por un lado $p + \lambda \,=\, \frac{n\pi\hbar}{eB}$, y además, $p \,=\, floor(\frac{n\,\pi\,\hbar}{e\,B})$. Combinando estos resultados podemos graficar ΔE en función del campo magnético, y podemos ver que crece de forma discontinua.

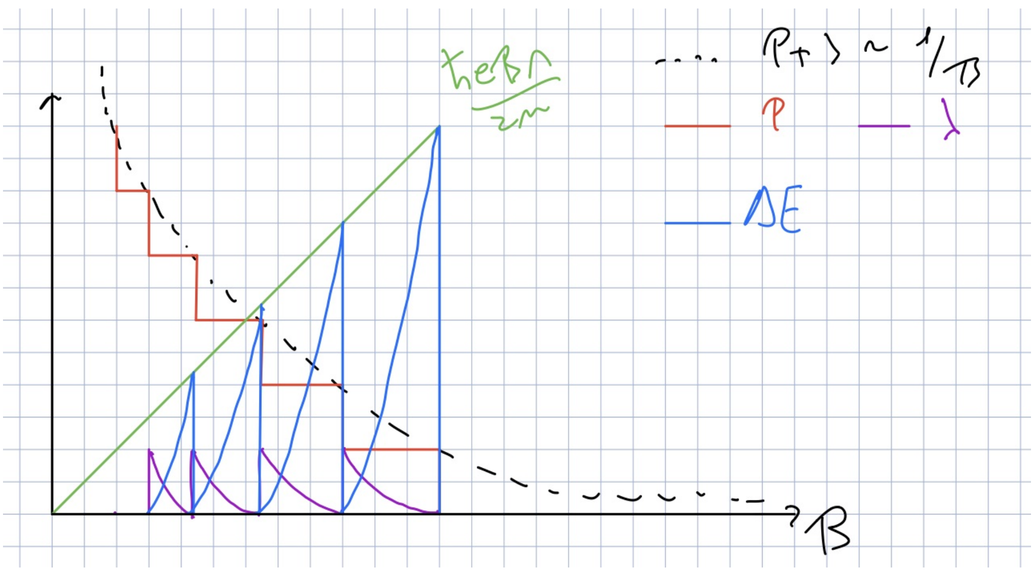

Figura 2: ΔE vs B