Guía 5 Ejercicio 4

13 de mayo de 2022

En este ejercicio nos piden encontrar las trayectorias que seguirán los electrones en un cristal bidimensional en presencia de un campo magnético uniforme $\vec{H} = H\hat{z}$. Para esto nos dan las curvas de nivel de la energía en la primera zona de Brillouin (la energía crece en el sentido 1 a 4)

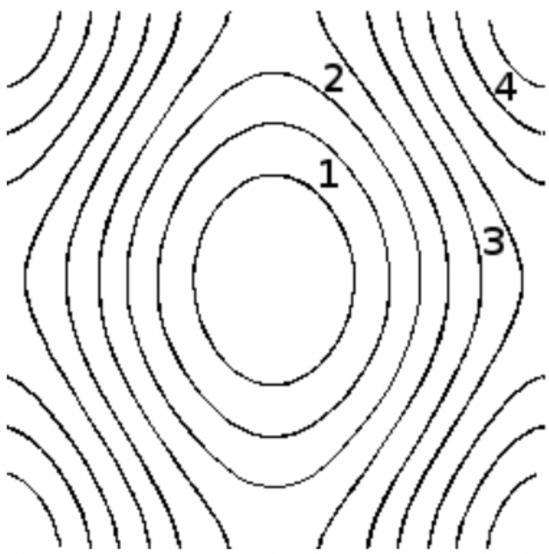


Figura 1: Curvas de nivel de energía en la primera zona de Brillouin.

Para calcular las trayectorias en el espacio $\vec{k}$ el ejercicio nos sugiere calcular $\frac{\partial\epsilon}{\partial t}$ y $\frac{\partial(\vec{H}\cdot\vec{k})}{\partial t}$. Comenzamos por la variación de la energía:

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial t} = \frac{\partial\epsilon}{\partial\vec{k}}\dot{\vec{k}} = \vec{v}\cdot\hbar\dot{\vec{k}} = \vec{v}\cdot\left(-e\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{H}\right) = 0 \tag{1}$$

Encontramos entonces que a lo largo de la trayectoria la energía se mantiene constante. Esto significa que el movimiento de un electrón se dará siempre sobre una misma curva de nivel. Luego tenemos:

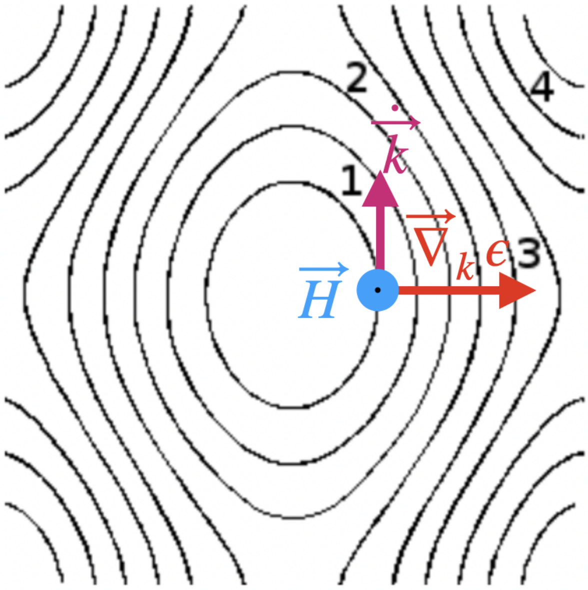
$$\frac{\partial\,(\vec{k}\cdot\vec{H})}{\partial t} = \dot{\vec{k}}\cdot\vec{H} = \frac{1}{\hbar}\left(-e\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{H}\right)\cdot\vec{H} = 0 \tag{2}$$

De esta ecuación obtenemos que la componente de $\vec{k}$ paralela al campo es constante. Estos dos resultados que acabamos de obtener son generales; no dependen de que el cristal sea bidimensional ni de la forma de las curvas de nivel.

Ahora que sabemos que las trayectorias se encuentran sobre las curvas de nivel únicamente resta conocer el sentido de circulación. Para ver esto podemos usar la ecuación que describe cómo varía $\vec{k}$ en función del tiempo.

$$\hbar\dot{\vec{k}} = -e\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} = \frac{e}{\hbar c}\vec{H} \times \vec{\nabla}_k \epsilon \tag{3}$$

Podemos ver entonces que el sentido de circulación va a ser antihorario, como se muestra en la siguiente Figura.



Conociendo las trayectorias en el espacio $\vec{k}$ podemos calcular las trayectorias en el espacio real. Para esto el problema nos sugiere calcular $\hat{H} \times \hbar\dot{\vec{k}}$.

$$\hat{H} \times \hbar\dot{\vec{k}} = -\frac{e}{c}\hat{H} \times \left(\vec{v} \times \vec{H}\right) = -\frac{e\,H}{c}\left(\vec{v} - \hat{H}(\hat{H}\cdot\vec{v})\right) = -\frac{e\,H}{c}\vec{v}_\perp \tag{4}$$

donde $v_\perp$ son las componentes de la velocidad perpendiculares al campo. Integrando en el tiempo llegamos al resultado final:

$$\vec{r}_\perp(t) - \vec{r}_\perp(0) = -\frac{\hbar\,c}{e\,H}\hat{H} \times \left(\vec{k}(t) - \vec{k}(0)\right). \tag{5}$$

Este resultado nos dice que las órbitas en el espacio real van a ser las mismas que en el espacio $\vec{k}$, pero rotadas 90° (el producto vectorial de un vector del plano con un vector perpendicular al plano me da otro vector en el plano rotado 90° con respecto al original) y amplificadas un factor $\frac{\hbar c}{e H}$.