Estructura de la materia 3
2^{do} Cuat. 2021

Práctica 2
Interacción luz-materia

Serie 1. Emisión y absorción, líneas espectrales.

1. a) Se tienen N átomos en un estado excitado. La probabilidad de decaer al estado fundamental y emitir un fotón por unidad de tiempo es $A = 1/\tau$. Calcular la intensidad de luz emitida en función del tiempo $I(t)$.

   b) Considere ahora que el campo eléctrico producido en a) es

$$\begin{aligned} t < 0: &\quad \mathcal{E}(t) = 0 \\ t \geq 0: &\quad \mathcal{E}(t) = \sqrt{I(t)} \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

   ¿Cómo es el espectro de emisión $I(\omega) \propto |\mathcal{E}(\omega)|^2$ con $\omega_0 \tau \gg 1$?

   c) Calcular el ancho a mitad de altura (FWHM) de $I(\omega)$.

2. 10^8 átomos de sodio son excitados al nivel $3^2P_{3/2}$ ($\tau = 16$ ns). La fluorescencia emitida al decaer tiene la distribución angular $I(\vartheta) = I_0 \sin^2 \vartheta$ y no depende de ϕ.

   a) ¿Cuánto es la energía total emitida?

   b) La potencia de la fluorescencia emitida es $P(t) = P_0 e^{-t/\tau}$. Calcular P_0.

   c) ¿Qué fracción de esta potencia se emite dentro del ángulo sólido $\Delta\Omega = 0.1$ alrededor de $\vartheta = 90°$? ¿Es visible para un ojo humano?

3. a) ¿Cuál es el ancho Doppler de la línea Lyman- α del átomo H a una temperatura de $T = 300$ K?

   b) Un haz colimado de átomos de H (el diámetro de la boquilla es de 50μm, la distancia entre la boquilla y la rendija de colimación es $d = 10$ cm, el ancho de la rendija es $b = 1$ mm) es atravesado perpendicularmente por un haz paralelo de un láser sintonizado a la línea Lyman- α. ¿Cuál es el ancho Doppler residual?

   c) Comparar este ancho con el ancho natural de la línea ($\tau(2p) = 1,2$ ns)

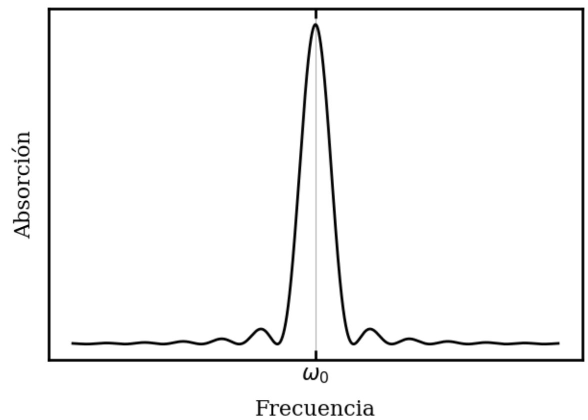
   d) ¿Es posible resolver la estructura hiperfina del estado fundamental $1^2S_{1/2}$?

4. Un haz de átomos que se mueve con una velocidad $\vec{v} = v\hat{x}$ atraviesa un haz láser que se propaga a lo largo de $\hat{y}$. El láser tiene una frecuencia ω_L, sus dimensiones z son mayores que las del haz atómico, y su intensidad es $I(x, z) = I_0$ para $-w < x < w$ y cero para $|x| \geq w$.

   (a) Estime el ensanchamiento de la línea de absorción debido al tiempo finito de interacción entre los átomos y la luz. A este ensanchamiento de lo conoce como “ensanchamiento por tiempo de transito” (transit-time broadening).

   (b) Supongamos que el láser se sintoniza con una transición entre el estado fundamental atómico y un excitado (separados energéticamente por $\hbar\omega_0$) con ancho natural τ. Para $v = 5 \times 10^4$ cm/s y diámetro $2w = 1$ mm, estimar para qué valores de τ el efecto de ensanchamiento del tiempo de tránsito dominará el ancho de la línea.

   (c) Utilizando una imagen clásica y/o mecánica cuántica, explique los lóbulos adicionales en el perfil espectral de una línea ensanchada por el tránsito (véase la figura). Supongamos que el tiempo de vida del estado excitado τ supera ampliamente el tiempo de tránsito $\sim 2w/v$



5. ¿Cuál es la probabilidad de transición y el ancho de línea natural de la transición $3s \rightarrow 2p$ en el átomo H?[1] Compare el ancho de línea natural con el ancho Doppler de esta transición a $T = 300$ K y $T = 1000$ K.

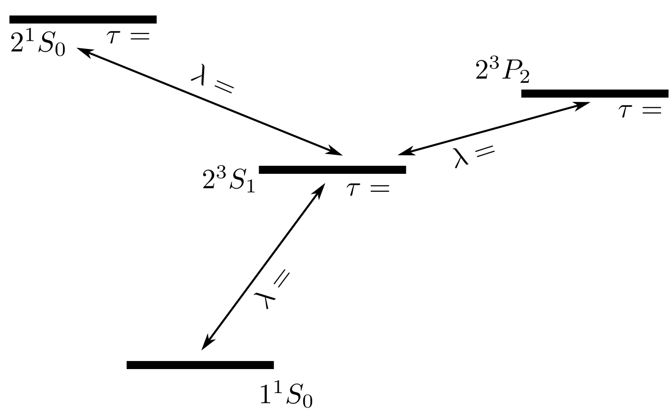
6. Se tiene una celda llena de átomos de Rubidio a temperatura ambiente, con la que se quiere hacer espectroscopía en la transición $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{1/2}$ cerca de 794 nm. Este tipo de celda se construyen generando vacío dentro de un cilindro de vidrio, al que luego se le introduce una pequeña cantidad de Rb y rápidamente se cierra. La presión de vapor del Rb es aproximadamente 4×10^{-5} Pa a temperatura ambiente.

   a) ¿Será la presión o la temperatura el origen del ensanchamiento dominante?

   b) ¿Qué sucede si en cambio, previo a cerrar la celda, se la llena también con Argón hasta alcanzar presión atmosférica?

   c) ¿Es posible, con este tipo de celdas y a temperatura ambiente, observar líneas espectrales con mayor resolución a los límites encontrados en a)? Discutir e indagar.

7. A continuación se muestra el esquema de agunos niveles de energía del átomo de Helio. Complete los datos que faltan.



   (a) Si se tiene un ensamble de átomos de He meta-estables en el estado 2^1S_0, que absorben luz en una descarga gaseosa a temperatura $T = 1000$ K. ¿Por qué se les llama meta-estables? ¿Cuál es el ancho de banda Doppler?

[1] https://physics.nist.gov/PhysRefData/Elements/index.html

(b) ¿Cuál es la magnitud de la absorción de luz monocromática en esa transición (en relación con la absorción en el centro de la línea ν_0) para una frecuencia de absorción ν que está 1 Å, $0,1\delta v_\mathrm{D}$, $1\delta v_\mathrm{D}$ y $10\delta v_\mathrm{D}$ desintonizada respecto de ν_0 ?

8. Se tiene un átomo con una transición entre dos estados de energía $\hbar\omega_0$, que se encuentra confinado en un potencial armónico 1D de frecuencia Ω, de manera que el movimiento del átomo cumple $\vec{r}(t) = (x_0 \sin \Omega t, 0, 0)$.

a) Asumiendo que no existe ningún tipo de ensanchamiento ($\Gamma = 0$), demostrar que el espectro de emisión de dicha transición visto desde un detector fijo en la dirección x es:

$$I(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(\beta)\delta(\omega - \omega_0 - n\Omega)$$

donde $\beta = kx_0$, con $k = 2\pi/\lambda$.

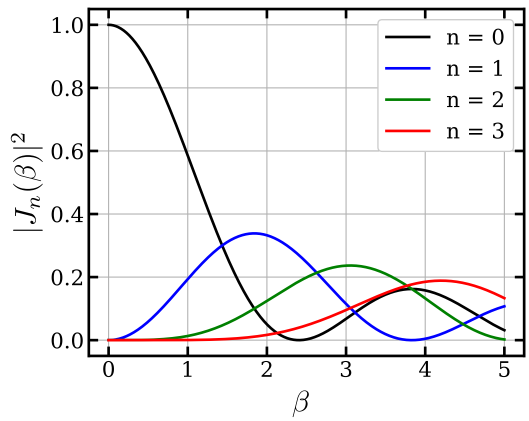
Ayuda: teniendo en cuenta el efecto Doppler, puede calcularse la frecuencia en función del tiempo $\omega'(t)$ que se observa desde el detector fijo. La fase de una onda con frecuencia $\omega'(t)$ esta dada por $\phi(t) = \int_0^t \omega'(t')\, dt'$. Una vez obtenido amplitud de movimiento en función del tiempo, hay que utilizar las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{1}$$
$$2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \tag{2}$$
$$2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \tag{3}$$

y de las siguientes expansiones en funciones J_n de Bessel:

$$\cos(z \sin\theta) = J_0(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z)\cos(2k\theta) \tag{4}$$
$$\sin(z \sin\theta) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z)\sin((2k+1)\theta) \tag{5}$$
$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \tag{6}$$

b) Utilizando que $J_n(\beta) \sim \frac{1}{n!}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2$ para $\beta < 1$ (también pueden utilizar el grafico de las 1eras J's de Bessel que se muestra a continuación) estimar el cociente entre la intensidad de la 1era y 2da banda lateral y la portadora para $\beta = 0.1$ y $\beta = 0.5$. Hacer un gráfico cualitativo de $I(\omega)$ en ambos casos. Se le llama "bandas laterales" a las componentes espectrales que aparecen en $\omega_0 \pm n\Omega$ para $|n| > 0$, y "portadora" a la correspondiente a $n = 0$.



c) ¿Qué relación tiene que cumplirse entre la amplitud del movimiento armónico del átomo y la longitud de onda de la transición para que las bandas laterales se vuelvan despreciables?

d) Si ahora tuviéramos en cuenta el ancho natural de la transición Γ y quisiéramos poder observar bandas laterales en el espectro: ¿Qué condición debería cumplirse?

9. Considere un ensamble de N átomos con una transición entre dos estados de energía E_1 y E_2 no degenerados, de manera que $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$, con espectro de absorción Lorentziano $s(\omega)$ dado por el ancho natural Γ de la transición, e inmersos en un campo electromagnético cuya densidad espectral de energía es $\rho(\omega)$. Sean N_1 y N_2 la cantidad de átomos en el estado de E_1 y E_2 respectivamente. En este ejercicio se pide utilizar los coeficientes de Einstein A y B. Asuma que el espectro del campo EM puede considerarse mucho más ancho que el ancho natural de la transición.

   a) ¿Cuál es la probabilidad por unidad de tiempo de que suceda un evento de absorción?

   b) Utilizando a), escriba las ecuaciones para las tasas de variación de N_1 y N_2, y resuelva para el estado estacionario del sistema.

   c) Definiendo $S = \frac{2B\rho(\omega_0)}{A}$, calcule las poblaciones para los casos $S = 0$ y $S = \infty$. Al paramatero S se lo conoce como "parámento de saturación".

   d) Calcule la potencia absorbida. ¿Cuánto vale para el caso $S = \infty$?

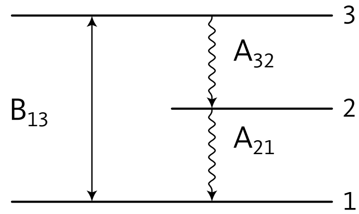
10. Se repiten las condiciones del problema anterior, pero ahora consideraremos que la radiación es producida por un láser y es monocromática con frecuencia ω_L. La densidad espectral de energía es en este caso $\rho(\omega) = \frac{I\delta(\omega-\omega_L)}{c}$ en donde I es la intensidad del láser.

   a) Repita los items del problema anterior redefiniendo acordemente el parámetro de saturación (en este caso dependerá de ω a través de $s(\omega)$.

   b) Observando la dependencia en frecuencia de la potencia absorbida, calcule el ancho del espectro de absorción.

   c) Si se considera la transición del Rubidio $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{1/2}$ en las condiciones del problema 6 ¿Para qué valor de la intensidad I, el ensanchamiento por saturación será comparable al ensanchamiento Doppler?

11. El sistema de dos niveles no permite que se produzca una inversión de población en el estacionario (¿Por qué?). En este problema veremos que eso sí puede ocurrir en un ensamble de N átomos, que pueden considerarse como el sistema de tres niveles que se muestra a continuación:



En este caso, un láser se sintoniza a la transición $1 \to 3$. La probabilidad por unidad de tiempo de decaer del nivel 3 al 2 es A_{32}, mientras que del 2 al 1 es A_{21}. No hay otros decaimientos. Considere a los tres niveles no degenerados. Estos sistemas permiten obtener en el estacionario una inversión de población entre 1 y 2, cuando el nivel 2 es un estado metaestable, es decir cuando $A_{21} \ll A_{32}, B_{13}$. Resulta útil definir un parámetro $\beta = A_{21}/A_{32}$.

a) Escriba las ecuaciones para la tasa de variación de las poblaciones en los niveles 1, 2 y 3.

b) Resuelva para el estado estacionario. ¿Qué condición tiene que cumplirse para que suceda una inversión de población entre los estados 1 y 2?

c) Calcular las poblaciones de 1 y 2 cuando el sistema se satura. ¿Qué sucede en el caso $\beta = 0$?