Estructura de la materia 3
2^{do} Cuat. 2021

Práctica 2
Interacción luz-materia

Serie 3. Oscilaciones de Rabi, Ecuaciones ópticas de Bloch.

1. En este problema se pretende calcular la dinámica *exacta* de un sistema de dos niveles interactuando con radiación monocromática en la aproximación dipolar. Para ello, considerar el siguiente Hamiltoniano:

$$H_{\text{tot}} = H_0 + H_I = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z - \vec{d}\cdot\vec{E}$$

con $\vec{E(t)} = E_0\hat{\epsilon}\cos(\omega_L t)$.

a) Se propone trabajar en la representación de interacción, en donde la función de onda se escribe como $|\psi(t)\rangle = c_1(t)e^{-i\omega_1 t}|g\rangle + c_2(t)e^{-i\omega_2 t}|e\rangle$ con $\omega_1 = -\omega_0/2$ y $\omega_2 = \omega_0/2$. Encontrar la ecuación diferencial para la evolución temporal de los coeficientes $c_1(t)$ y $c_2(t)$.

b) Demostrar que bajo la aproximación de onda rotante ($|\omega_L - \omega_0| \ll \omega_L + \omega_0$) las ecuaciones resultan las siguientes:

$$\dot{c}_1(t) = i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\delta t}c_2(t)$$
$$\dot{c}_2(t) = i\frac{\Omega_0}{2}e^{-i\delta t}c_1(t)$$

en donde $\Omega_0 = \langle g|\,\vec{d}\cdot\hat{\epsilon}\,|e\rangle\,\frac{E_0}{\hbar}$ y $\delta = \omega_L - \omega_0$.

c) Para el caso $\delta = 0$ y condiciones iniciales $c_1(0) = 1$ y $c_2(0) = 0$, calcular la población del estado excitado en función del tiempo.

d) Mostrar que definiendo funciones $\tilde{c}_1(t) = c_1(t)\,e^{-i\frac{\delta}{2}t}$ y $\tilde{c}_2(t) = c_2(t)\,e^{i\frac{\delta}{2}t}$ las ecuaciones de la evolución temporal se reducen a un sistema con coeficientes independientes del tiempo. Esta transformación implica moverse a un marco rotante con el láser. Resolverlo para condiciones iniciales arbitrarias.

2. *Esfera de Bloch.* Dado un estado cualquiera del sistema de nos niveles del problema anterior, se lo puede representar sobre una esfera como un vector $\vec{a}$ definido de tal manera de que la matriz densidad del estado sea igual a $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{a}\cdot\vec{\sigma})$.

a) Encontrar el vector de Bloch $\vec{a}$ para los siguientes estados:

- $|\psi\rangle = |g\rangle$
- $|\psi\rangle = |e\rangle$
- $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle \pm |e\rangle$
- $\rho = \frac{1}{2}(|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)$

b) Describir el comportamiento en la esfera de Bloch de la evolución temporal generada en los siguientes casos: $H_{\text{tot}} = H_0$, $H_{\text{tot}} = H_0 + H_I$ con $\delta = 0$ y en el caso general $H_{\text{tot}} = H_0 + H_I$. Ayuda: en cada caso, puede describirse la evolución como una rotación, por lo que el problema se reduce a encontrar el ángulo y la dirección en cada caso.

c) Explique como podrían hacerse mediciones para distinguir un estado puro $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle$ de uno mixto $\rho = \frac{1}{2}(|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)$.

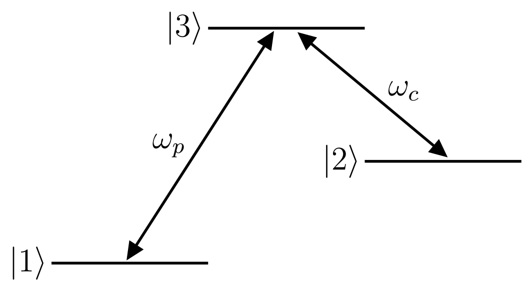
d) Interferometría de Ramsey. En el contexto del problema 1, se tiene inicialmente al sistema en el estado fundamental $|g\rangle$. Se realiza la siguiente secuencia: se aplica un pulso láser de duración $\tau = \frac{\pi}{2\Omega_0}$, luego se espera un tiempo T y tras lo cual vuelve a aplicare un pulso idéntico. Calcular la población del estado excitado como función del tiempo T y de la desintonía δ.

3. *Transparencia inducida electro-magnéticamente/ Atrapado coherente de poblaciones.* Se tiene un sistema de tres niveles como se indica en la figura. Las transiciones $1 \longleftrightarrow 3$ y $2 \longleftrightarrow 3$ son dipolares, mientras que la transición $2 \longleftrightarrow 3$ es prohibida. Se sintoniza un láser a cada una de las transiciones permitidas, y puede considerar que en ambos casos no hay desintonía.

   De manera análoga al problema 1, el hamiltoniano total puede escribirse como $H_{\mathrm{tot}} = H_0 + H_I$ con $H_0 = \sum_{i=1}^{3} \hbar\omega_i \left|i\right\rangle \left\langle i\right|$ y $H_I = -\frac{\hbar}{2}\left(\Omega_p e^{i\omega_p t} \left|1\right\rangle \left\langle 3\right| + \Omega_c e^{i\omega_c t} \left|2\right\rangle \left\langle 3\right|\right) + c.c.$

   a) Escribir las ecuaciones de evolución temporal en representación de interacción.

   b) Demostrar que existe un estado inicial del sistema que es estacionario. Calcularlo en función de las frecuencias de Rabi.



4. *Ecuaciones ópticas de Bloch.* Ahora al sistema de dos niveles del problema 1 le agregaremos los efectos de la emisión espontánea. Dado que este es un proceso no unitario, es necesario recurrir al formalismo de matriz densidad ρ cuya evolución unitaria puede calcularse a partir del hamiltoniano como $i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]$. Con emisión espontanea, la evolución de ρ sigue las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_{gg} &= +\Gamma\rho_{ee} + i\frac{\Omega_0}{2}\left(\rho_{eg} - \rho_{ge}\right) \\
\frac{d}{dt}\rho_{ee} &= -\Gamma\rho_{ee} + i\frac{\Omega_0}{2}\left(\rho_{ge} - \rho_{eg}\right) \\
\frac{d}{dt}\rho_{ge} &= -(\Gamma/2 + i\delta)\rho_{ge} + i\frac{\Omega_0}{2}\left(\rho_{ee} - \rho_{gg}\right) \\
\frac{d}{dt}\rho_{eg} &= -(\Gamma/2 - i\delta)\rho_{eg} + i\frac{\Omega_0}{2}\left(\rho_{gg} - \rho_{ee}\right)
\end{aligned}$$

   a) Utilizando que $\mathrm{Tr}\left(\rho\right) = 1$ y que $\rho = \rho^\dagger$, demostrar que las 4 ecuaciones pueden reducirse al siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\rho_{eg} &= -(\Gamma/2 - i\delta)\rho_{eg} - \frac{iw\Omega_0}{2} \\
\frac{d}{dt}w &= -\Gamma(w+1) - i\Omega_0\left(\rho_{eg} - \rho_{ge}\right)
\end{aligned}$$

   con $w = \rho_{ee} - \rho_{gg}$.

   b) Resolver y calcular $\rho(t)$ en el caso en que no hay campo de radiación monocromática. Considere condiciones iniciales $\rho_{ee} = 1$ y $\rho_{eg} = 0$.

   c) Definiendo al parámetro de saturación S como

$$S = \frac{\Omega_0^2/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4}$$

   hallar las soluciones estacionarias. Analizar el límite $\Omega_0 \longrightarrow \infty$.

: en esta serie el asterisco es a elección del alumno. Pueden elegir cualquiera de los 4 problemas.