

# Estructura de la materia 3

## 1<sup>er</sup> Cuatrimestre 2023

**Serie 3** *Interacción luz-materia, absorción y emisión atómica, líneas espectrales*

- (a) Demuestre, calculando la integral, que el elemento de matriz de transición dipolar  $\int \psi_{1s}^* \hat{r} \psi_{2s} d^3r$  de la transición  $1S \rightarrow 2S$  en el átomo de H es cero. Use las funciones de onda del H.
  - (b) Generalice el resultado anterior mostrando que la paridad del estado inicial y la del final en transiciones dipolares tienen que ser distintas.
2. Las funciones de onda de un átomo hidrogenoide se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = F(r, \theta) \exp(im\varphi).$$

Considere a  $\hat{z}$  como la dirección de cuantización. Suponga una transición dipolar de un estado fundamental con proyección de momento angular  $m$  a un estado excitado con proyección  $m'$ . Considerando la integral sobre  $\varphi$ , muestre que el elemento de matriz correspondiente es cero excepto en los siguientes casos:

- $m' = m$  para luz con polarización  $\hat{z}$ ;
  - $m' = m + 1$  para luz con polarización  $\sigma^+$  ( $\hat{x} + i\hat{y}$ );
  - $m' = m - 1$  para luz con polarización  $\sigma^-$  ( $\hat{x} - i\hat{y}$ );
  - $m' = m \pm 1$  para luz con polarización  $\hat{x}$  o  $\hat{y}$ .
3. (a) Busque en el NIST los 6 términos espectroscópicos de menor energía del calcio ionizado una vez. Ordénelos en energía e indique las posibles transiciones dipolares y cuadrupolares eléctricas entre estados.
- (b) Repita el ítem anterior para el átomo neutro de cesio. ¿Qué similitudes ve con el anterior?
4. Especifique si existe un término multipolar dominante (E1, M1, E2...) para la absorción o emisión de fotones en cada una de las siguientes transiciones. Suponga funciones de onda hidrogenicas simples sin correcciones relativistas o de otro tipo:

$$2 p_{1/2} \leftrightarrow 1 s_{1/2}$$

$$2 s_{1/2} \leftrightarrow 1 s_{1/2}$$

$$3 d_{3/2} \leftrightarrow 2 s_{1/2}$$

$$2 p_{3/2} \leftrightarrow 2 p_{1/2}$$

$$3 d_{3/2} \leftrightarrow 2 p_{1/2}$$

En caso de no existir término multipolar dominante, ¿cómo podría producirse la transición?

## Emisión espontánea

5. Se tienen  $N$  átomos en un estado excitado. La probabilidad de decaer al estado fundamental y emitir un fotón por unidad de tiempo es  $A \equiv 1/\tau$ .

(a) Calcular la intensidad de la luz emitida en función del tiempo  $I(t)$ .

(b) Considere que el campo eléctrico producido por el destello de luz debido al decaimiento es:

$$\begin{aligned} t < 0 : \mathcal{E}(t) &= 0 \\ t \geq 0 : \mathcal{E}(t) &= \sqrt{I(t)} \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

¿Cómo es el espectro de emisión en función de la frecuencia,  $I(\omega) \propto |\mathcal{E}(\omega)|^2$ , con  $\omega_0 \tau \gg 1$ ?

(c) Calcule el ancho a mitad de altura ( $FWHM$ ) de  $I(\omega)$ .

6.  $10^8$  átomos de sodio son excitados al nivel  $3^2P_{3/2}$  ( $\tau = 16$  ns).

(a) ¿Cuánto es la energía total emitida al decaer al estado fundamental?

(b) La potencia emitida en función del tiempo es  $P(t) = P_0 e^{-t/\tau}$ . Calcular  $P_0$ .

## 7. Ensanchamiento Doppler

(a) ¿Cuál es el ancho Doppler de la línea Lyman- $\alpha$  del átomo de hidrógeno a una temperatura  $T = 300$  K?

(b) Un haz colimado de átomos de hidrógeno es atravesado perpendicularmente por un haz paralelo de un láser sintonizado a la línea Lyman- $\alpha$ . El diámetro de la boquilla es de  $50 \mu\text{m}$ , la distancia entre la boquilla y la rendija de colimación es  $d = 10$  cm, y el ancho de la rendija es  $b = 1$  mm. ¿Cuál es el ancho Doppler residual?

(c) Comparar este ancho con el ancho natural de la línea ( $\tau(2p) = 1.2$  ns).

(d) ¿Es posible resolver la estructura hiperfina del estado fundamental  $1^2S_{1/2}$ ?

8. Se tiene una celda llena de átomos de rubidio a temperatura ambiente, con la que se quiere hacer espectroscopía en la transición  $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{1/2}$  cerca de 795 nm. Este tipo de celda se construye generando vacío dentro de un cilindro de vidrio, al que luego se le introduce una pequeña cantidad de rubidio y rápidamente se cierra. La presión de vapor del rubidio es aproximadamente  $4 \times 10^{-5}$  Pa a temperatura ambiente.

(a) ¿Será la presión o la temperatura el origen del ensanchamiento dominante?

(b) ¿Qué sucede si, en cambio, previo a cerrar la celda, se la llena también con argón hasta alcanzar presión atmosférica?

9. Un haz de átomos que se mueve con velocidad  $\vec{v} = v\hat{x}$  atraviesa un haz láser que se propaga a lo largo de la dirección  $\hat{y}$ . El láser tiene una frecuencia  $\omega_L$ , su dimensión en la dirección  $\hat{z}$  es mayor que la del haz atómico, y su intensidad es  $I(x, z) = I_0$  para  $-w < x < w$  e  $I(x, z) = 0$  para  $|x| \geq w$ .

- (a) Estime el ensanchamiento de la línea de absorción debido al **tiempo finito de interacción** entre los átomos y la luz. A este ensanchamiento se lo conoce como “ensanchamiento por tiempo de transito” (*transit-time broadening*).
- (b) Supongamos que el láser se sintoniza a una transición entre el estado fundamental atómico y uno excitado (separados energéticamente por  $\hbar\omega_0$ ) con ancho natural  $\tau$ . Para  $v = 5 \times 10^4$  cm/s y diámetro  $2w = 1$  mm, estimar para qué valores de  $\tau$  el efecto de ensanchamiento del tiempo de tránsito dominará el ancho de la línea.
10. Considere un átomo con una transición entre dos estados cuya diferencia de energías es  $\hbar\omega_0$  y que se encuentra confinado en un potencial armónico 1D de frecuencia  $\Omega$ , de manera que el movimiento del átomo cumple  $\vec{r}(t) = (x_0 \sin \Omega t, 0, 0)$ .

Asumiendo que no existe ningún tipo de ensanchamiento (es decir,  $\Gamma = 0$ ), demostrar que el espectro de emisión de dicha transición visto desde un detector fijo en la dirección  $x$  es:

$$I(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(\beta) \delta(\omega - \omega_0 - n\Omega)$$

donde  $\beta = kx_0$ , con  $k = 2\pi/\lambda$ .

Ayuda: considere las siguientes expansiones en funciones de Bessel  $J_n$ :

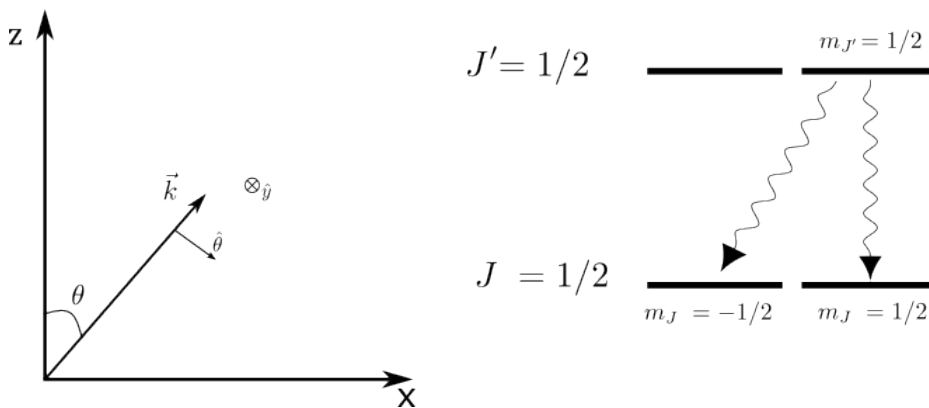
$$\cos(z \sin \theta) = J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z) \cos(2k\theta) \quad (1)$$

$$\sin(z \sin \theta) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z) \sin((2k+1)\theta) \quad (2)$$

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \quad (3)$$

### 11. Distribución angular de la fluorescencia atómica.

Se tiene un ensamble de átomos preparados en el subnivel  $m_{J'} = 1/2$  de un estado excitado con momento angular total  $J' = 1/2$ , desde el cual decaen espontáneamente a un estado inferior con  $J = 1/2$ . No se aplican campos externos.



- (a) ¿Cuál es la distribución angular de la intensidad de la luz emitida por cada uno de los dos posibles decaimientos?
- (b) ¿Es isotrópica la intensidad total de luz emitida?
- (c) ¿Cómo es la polarización de la luz emitida en la dirección  $\hat{z}$ ? ¿Y en  $-\hat{z}$ ?
12. Considere un átomo con una transición dipolar entre un nivel excitado con momento angular total  $J' = 2$  y uno inferior con  $J = 1$ . Dada la tasa total de emisión espontánea  $\Gamma$ , el problema consiste en encontrar las tasas de las distintas transiciones permitidas, es decir, la fracción de la emisión que entra en cada una de las transiciones posibles  $(J', m') \rightarrow (J, m)$ .
- (a) ¿Cuántas transiciones posibles hay? Justifique cuáles son prohibidas y por qué.
- (b) Utilizando el teorema de Wigner-Eckart, calcular la tasa de emisión para cada transición.
- Ayuda: teniendo en cuenta que la tasa para una transición  $(J', m') \rightarrow (J, m)$  debe ser la misma que para  $(J', -m') \rightarrow (J, -m)$  (¿por qué?), solo hace falta calcular las siguientes:
- $a : m' = 2 \rightarrow m = 1$   
 $b : m' = 1 \rightarrow m = 1$   
 $c : m' = 0 \rightarrow m = 1$   
 $d : m' = 1 \rightarrow m = 0$   
 $e : m' = 0 \rightarrow m = 0$
- (c) ¿Cuánto vale la tasa total de decaimiento desde cada uno de los 5 niveles de  $J' = 2$  hacia  $J = 1$ ? Esto puede responderse sin utilizar lo calculado en el ítem (b).