Estructura de la materia 3
Verano 2024

Serie 7 *Transiciones y dinámica atómica*

1. Considere un ensamble de N átomos con una transición entre dos estados de energía E_1 y E_2 no degenerados, de manera que $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$, con espectro de absorción $s(\omega)$ Lorentziano dado por el ancho natural Γ de la transición, e inmersos en un campo electromagnético cuya densidad espectral de energía es $\rho(\omega)$. Siendo N_1 y N_2 la cantidad de átomos en cada estado, considere los coeficientes de Einstein A y B, y asuma que el espectro del campo electromagnético puede considerarse mucho más ancho que el ancho natural de la transición.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad por unidad de tiempo de que suceda un evento de absorción?

   (b) Utilizando el ítem (a), escriba las ecuaciones para las tasas de variación de N_1 y N_2, y resuelva para el estado estacionario del sistema.

   (c) Definiendo el parámetro de saturación de la transición como $S = 2B\rho(\omega_0)/A$, calcule las poblaciones para los límites $S \to 0$ y $S \to \infty$. ¿Qué implican estos límites físicamente?

   (d) Calcule la potencia absorbida. ¿Cuánto vale para el caso $S \to \infty$?

2. Se repiten las condiciones del problema anterior, pero ahora considerando que la radiación es producida por un láser y es monocromática con frecuencia ω_L. La densidad espectral de energía en este caso es $\rho(\omega) = I\delta(\omega - \omega_L)/c$, en donde I es la **intensidad** del láser.

   (a) Repita los items del problema 1 redefiniendo acordemente el parámetro de saturación, que en este caso dependerá de ω, a través de $s(\omega)$.

   (b) Observando la dependencia en frecuencia de la potencia absorbida, calcule el ancho del espectro de absorción. ¿Existe algún ensanchamiento del espectro en este caso?

Ecuaciones ópticas de Bloch

3. En este problema se pretende calcular la dinámica *exacta* de un sistema de dos niveles interactuando con radiación monocromática en la aproximación dipolar. Para ello, considere el siguiente Hamiltoniano:

$$H_{\text{tot}} = H_0 + H_I = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z - \vec{d} \cdot \vec{E}$$

   Allí, $\vec{E}(t) = E_0\hat{\epsilon}\cos(\omega_L t)$ es el campo eléctrico del láser de frecuencia ω_L y vector de polarización $\hat{\epsilon}$. Se propone trabajar en la *representación de interacción*, en donde la función de onda se escribe como $|\psi(t)\rangle = c_1(t)e^{-i\omega_1 t}|g\rangle + c_2(t)e^{-i\omega_2 t}|e\rangle$ con $\omega_1 = -\omega_0/2$ y $\omega_2 = \omega_0/2$.

(a) Encontrar la ecuación diferencial para la evolución temporal de los coeficientes $c_1(t)$ y $c_2(t)$.

(b) Demostrar que bajo la aproximación de onda rotante $|\omega_L - \omega_0| \ll \omega_L + \omega_0$ las ecuaciones resultantes son

$$\dot{c}_1(t) = i\frac{\Omega_0}{2}e^{i\delta t}c_2(t)$$
$$\dot{c}_2(t) = i\frac{\Omega_0}{2}e^{-i\delta t}c_1(t)$$

en donde $\Omega_0 = \langle g|\, \vec{d}\cdot\hat{\epsilon}\, |e\rangle \frac{E_0}{\hbar}$ y $\delta = \omega_L - \omega_0$.

(c) Para el caso $\delta = 0$ y condiciones iniciales $c_1(0) = 1$ y $c_2(0) = 0$, calcular la población del estado excitado en función del tiempo.

(d) Muestre que definiendo $\tilde{c}_1(t) = c_1(t)\ e^{-i\frac{\delta}{2}t}$ y $\tilde{c}_2(t) = c_2(t)\ e^{i\frac{\delta}{2}t}$, las ecuaciones de la evolución temporal se reducen a un sistema con coeficientes independientes del tiempo. Esta transformación implica moverse a un marco rotante con el láser. Resuélvalo para condiciones iniciales arbitrarias.

4. **Esfera de Bloch**.

A un estado cualquiera del sistema de dos niveles del problema anterior se lo puede representar sobre una esfera como un vector $\vec{a}$ definido de tal manera de que la *matriz densidad* del estado sea igual a $\rho = \frac{1}{2}\left(I + \vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)$.

(a) Encontrar el vector de Bloch $\vec{a}$ para los siguientes estados:

- $|\psi\rangle = |g\rangle$
- $|\psi\rangle = |e\rangle$
- $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle \pm |e\rangle)$
- $\rho = \frac{1}{2}(|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)$

(b) *Interferometría de Ramsey.* Se tiene inicialmente un sistema atómico en el estado fundamental $|g\rangle$. Considerando la dinámica del problema anterior, se realiza la siguiente secuencia: se aplica un pulso láser de duración $\tau = \pi/2\Omega_0$, luego se espera un tiempo T y tras lo cual vuelve a aplicarse un pulso idéntico. Calcular la población del estado excitado como función del tiempo T y de la desintonía δ.

5. Ahora al sistema de dos niveles le agregaremos los efectos de la emisión espontánea. Dado que este es un proceso no unitario, es necesario recurrir al formalismo de matriz densidad ρ cuya evolución unitaria puede calcularse a partir del Hamiltoniano como $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}]$. Para agregar los efectos de la emisión espontanea, a dicha ecuación se le agrega una evolución no unitaria de forma tal que la evolución temporal de $\hat{\rho}$ sigue las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}\rho_{gg} = +\Gamma\rho_{ee} + i\frac{\Omega_0}{2}\left(\rho_{eg} - \rho_{ge}\right)$$
$$\frac{d}{dt}\rho_{ee} = -\Gamma\rho_{ee} + i\frac{\Omega_0}{2}\left(\rho_{ge} - \rho_{eg}\right)$$
$$\frac{d}{dt}\rho_{ge} = -(\Gamma/2 + i\delta)\rho_{ge} + i\frac{\Omega_0}{2}\left(\rho_{ee} - \rho_{gg}\right)$$
$$\frac{d}{dt}\rho_{eg} = -(\Gamma/2 - i\delta)\rho_{eg} + i\frac{\Omega_0}{2}\left(\rho_{gg} - \rho_{ee}\right)$$

(a) Utilizando que $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}) = 1$ y que $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$, demostrar que las 4 ecuaciones pueden reducirse al siguiente sistema:

$$\frac{d}{dt}\rho_{eg} = -(\Gamma/2 - i\delta)\rho_{eg} - \frac{iw\Omega_0}{2}$$
$$\frac{d}{dt}w = -\Gamma(w+1) - i\Omega_0\left(\rho_{eg} - \rho_{ge}\right)$$

con $w = \rho_{ee} - \rho_{gg}$.

(b) Resolver y calcular $\rho(t)$ en el caso en que no hay campo de radiación monocromática. Considere condiciones iniciales $\rho_{ee} = 1$ y $\rho_{eg} = 0$.

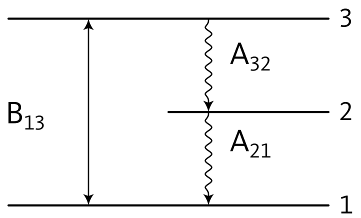
(c) Definiendo al parámetro de saturación S como

$$S = \frac{\Omega_0^2/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4}$$

hallar las soluciones estacionarias. Analizar el límite $\Omega_0 \longrightarrow \infty$.

Sistema de tres niveles

6. El sistema de dos niveles no permite que se produzca una inversión de población en el estacionario (¿por qué?). En este problema veremos que eso sí puede ocurrir en un ensamble de N átomos, que pueden considerarse como el sistema de tres niveles que se muestra a continuación:



En este caso, un láser se sintoniza a la transición $1 \longleftrightarrow 3$. La probabilidad por unidad de tiempo de decaer del nivel 3 al 2 es A_{32}, mientras que del 2 al 1 es A_{21}. No hay otros decaimientos. Considere a los tres niveles no degenerados. Estos sistemas permiten obtener en el estacionario una inversión de población entre 1 y 2, cuando el nivel 2 es un estado metaestable, es decir cuando $A_{21} \ll A_{32}, B_{13}$.

(a) Escriba las ecuaciones para la tasa de variación de las poblaciones en los niveles 1, 2 y 3. Demuestre que $N_1 + N_2 + N_3 = N$ para todo tiempo.

(b) Resuelva para el estado estacionario. ¿Qué condición tiene que cumplirse para que suceda una inversión de población entre los estados 1 y 2?

(c) Calcular las poblaciones de 1 y 2 cuando el sistema se satura. Definiendo $\beta = A_{21}/A_{32}$, ¿qué sucede en el caso $\beta = 0$?

Opcional: Transparencia inducida electromagnéticamente o atrapamiento coherente de poblaciones.

Se tiene un sistema de tres niveles como se indica en la figura. Las transiciones $1 \longleftrightarrow 3$ y $2 \longleftrightarrow 3$ son dipolares, mientras que la transición $1 \longleftrightarrow 2$ es prohibida. Se sintoniza un láser a cada una de las transiciones permitidas, y puede considerar que en ambos casos no hay desintonía.

De manera análoga al problema de dos niveles, el Hamiltoniano total puede escribirse como $H_{\text{tot}} = H_0 + H_I$ con $H_0 = \sum_{i=1}^{3} \hbar\omega_i \left|i\right\rangle \left\langle i\right|$ y $H_I = -\frac{\hbar}{2}\left(\Omega_p e^{i\omega_p t} \left|1\right\rangle \left\langle 3\right| + \Omega_c e^{i\omega_c t} \left|2\right\rangle \left\langle 3\right|\right) + c.c.$

(a) Escribir las ecuaciones de evolución temporal en representación de interacción.

(b) Demostrar que existe un estado inicial del sistema que es estacionario. Calcularlo en función de las frecuencias de Rabi.