ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

PRIMER CUATRIMESTRE 2021

PRÁCTICA 7A: TEORÍAS DE GAUGE (CASO ABELIANO)

Gauge symmetry is not a symmetry...A better phrase is Gauge redundancy

Nathan Seiberg

1. Considere la acción de un campo de Klein-Gordon complejo:

$$L = (\partial^\mu \phi)^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \tag{1}$$

   (a) Verifique que el lagrangiano no queda invariante ante la trasnformación $\phi \to e^{i\alpha(x)}\phi$, siendo α una función arbitraria del espacio-tiempo. Es decir, verifique que este lagrangiano no tienen *invariancia local* ante $U(1)$.

   (b) Considere ahora una modificación del caso anterior, en el que el campo escalar interactúa con otro campo cuadrivectorial A_μ :

$$L_{gauge} = D^*_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + \dots$$

   donde los punto suspensivos denotan terminos cineticos en A_μ y $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$, con g una constante. Halle la forma en que debe transformar A_μ (transformación de gauge) para que el primer término de este lagrangiano quede invariante para todo α cuando $\phi \to e^{i\alpha(x)}\phi$.

   (c) Para esa trasnformación hallada, muestre que este tensor $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ resulta ser invariante. Esto permite proponer un término cinetico para A_μ de la forma $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, *invariante de gauge*. Diga porque este término no describe interacciones para el campo A_μ.

   (d) Verifique que un término de masa para el foton (la partícula asociada a A_μ) : $m^2 A_\mu A^\mu$ rompe esta invariancia local.

   (e) Halle las ecuaciones de movimiento del lagrangiano completo asi obtenido, invariante ante $U(1)$-local:

$$L_{gauge} = D^*_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

   y verifique que g hace las veces de "carga electrica", comparando estas ecuaciones con las de Maxwell con una fuente j^μ e identificando A_μ con el campo de Maxwell.

2. Considere el Lagrangiano anterior con la adición de un término $\lambda(\phi^*\phi)^2$.

   (a) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción. Para ello, expanda el primer término diferenciando el término cinético del campo escalar y los términos cubicos y cuarticos de interacción.

(b) Si llamamos h y $\bar{h}$ a la partícula y antiparticula que surje de la cuantización del campo ϕ, dibuje los diagramas intervinientes en el scattering partícula-antipartícula $h+\bar{h} \to h+\bar{h}$. Por simplicidad, considere sólo los órdenes que no incluyan lazos en los diagramas. Especifique la potencia de g con la que viene pesado el diagrama.

3. Considere el campo de Dirac acoplado al campo electromagnético,

$$\mathscr{L}_{QED} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

siendo $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ (q es la carga del electrón en este caso, es decir, $-e$). El modelo que resulta de cuantizar esta lagrangiano es lo que se cononoce como QED (quantum electrodynamics). La simetría ante $U(1)$ local es exactamente la del caso escalar.

(a) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción.

(b) Dibuje los diagrams de Feynman, al orden arbol (es decir, sin loops) y al orden mas bajo en e, para los procesos:
$e^- + e^+ \to e^- + e^+$, $e^- + e^- \to e^- + e^-$.

(c) Para el scatering de fotones $\gamma + \gamma \to \gamma\gamma$,halle el diagrama al orden mas bajo, permitiendo incluir loops.

4. Un Lagrangiano con invariancia $U(1)$, requiere un solo campo de gauge (llamemoslo A_μ, aunque este lagrangiano contenga varios campos escalares o de Dirac acoplados a A_μ. A fin de ilustrar esto:

(a) Escriba el Lagrangiano invariante $U(1)$ local que describe a dos campos de Dirac acoplados con A_μ, siendo sus constantes de acoplamiento q_1 y q_2.

(b) Reescriba este lagrangiano organizando los dos campos de Dirac en un doblete Ψ. Muestre que la expresión de la derivada covariante puede reescribirse de esta forma: $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu Q$, con $Q \equiv \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$ y que la transformación de gauge puede escribirse en la forma:

$$\Psi \to \Psi' = e^{i\alpha(x)Q}\Psi \tag{2}$$

(c) Justifique porque sigue teniendo sentido decir que este Lagrangiano es invariante ante $U(1)$, a pesar de que la transformación se implemente via una matriz de 2×2.