ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

PRIMER CUATRIMESTRE 2021

PRÁCTICA 6: FORMULACIÓN LAGRANGIANA DE MODELOS RELATIVISTAS

La formulación Lagrangiana de las ecuaciones relativistas es clave para la construcción de las *teorías cuánticas de campos* (QFT). Los campos que aparecen aquí *no deben interpretarse como funciones de onda*; las ecuaciones relativistas, derivadas de estos Lagrangianos, son ecuaciones de una teoría clásica que sirven de semilla para llegar a la versión cuántica por medio de un proceso de cuantización. Del lagrangiano que describe la teoría clásica pueden leerse ciertas simetrás que se preservarán al cuantizar (aunque a veces no lo hacen, dando lugar a “anomalías”). Además de la simetría ante transformaciones de Poincaré, los términos tipicos del Lagrangiano del modelos estandard presentan *simetrías internas*, es decir, simetrías ante cambios en los campos que no afectan a sus argumentos (el punto del espacio-tiempo del cual dependen). En la versión cuántica, la energía y momento de los campos están discretizados en términos de cuántos de energía-momemento, que obedecen las reglas de dispersión de partículas relativistas. Si bien el estudio del proceso de cuantización va más allá del alcance de este curso, se comenzará en esta guía a dibujar *diagramas de Feynman* correspondientes a los términos de interacción, los cuales son representaciones gráficas de contribuciones a la amplitud de Scattering, de un gran valor heuristico.

1. Dada la densidad lagrangiana de un campo escalar complejo,

$$\mathscr{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi,$$

   (a) Halle las simetrías del problema, diga que grupo forman. Halle las corrientes de Noether correspondientes a las simetrías internas.

   (b) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando las variables parte real e imaginaria de ϕ. Muestre que es equivalente (y mas simple) hallar las ecuaciones de movimiento utilizando las variables ϕ y ϕ^*.

   (c) ¿Como se modifican los puntos 1 y 2 si se agrega al lagrangiano el término $-V(\phi\phi^*)$?

   (d) Calcule la carga conservada asociada a la invariancia respecto a traslaciones temporales y verifique que es definida positiva.

   (e) Considere ahora el Lagrangiano:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi \phi,$$

   para un campo ϕ *real*. Repita el analisis anterior de los primeros tres items. Note el factor $\frac{1}{2}$ global diferencia. (Si bién es irrelevante para las ecuaciones de movimiento, se introduce para que el momento canonico conjugado sea $\partial_t \phi$, Será discutido en clase este punto).

2. Considere el Lagrangiano:

$$L = \bar{\psi}\gamma^\mu i \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

.

(a) Halle las ecuaciones de movimiento, variando respecto a $\bar{\Psi}$

(b) Compare con la que obtiene variando respecto a ψ.

(c) Halle las simetrías de este lagrangiano y obtenga la corriente de Noether asociada a las simetrŕias internas.

3. Considere los siguientes Lagrangianos que describen a dos espinores de Dirac ψ_1 y ψ_2 y un campo escalar real ϕ masivo interactuantes:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \overline{\Psi}_1 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 + \overline{\Psi}_2 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 + \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \\
&\quad -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\overline{\Psi_1}\phi\psi_2 + g\overline{\Psi}_2\phi\psi_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_2 &= \overline{\Psi}_1 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 + \overline{\Psi}_2 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 + \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \\
&\quad -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\overline{\Psi_1}\phi\psi_1 + g\overline{\Psi}_2\phi\psi_2
\end{aligned}
$$

(a) Halle todas las simetrías de ambos lagrangianos indicando claramente cuantos párametros independientes tiene en cada caso.

(b) Halle las corrientes de Noether conservadas asociadas a las simetrías internas encontradas, describiendo que ley de conservación espera a nivel cuantico.

(c) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los términos de interacción, indicando con 1 y 2 a los fermiones y con una linea punteada al campo escalar .

(d) A partir de estos, dibuje los diagramas que contribuyen a los procesos
i)$1+\bar{2} \rightarrow \bar{1}+2$
ii) $1+\bar{2} \rightarrow 1+\bar{2}$
iii) $1+1 \rightarrow 2+2$
al orden más bajo en g para cada Lagrangiano. En base a las leyes de conservación del punto b), diga que procesos no son posibles.

4. Considere la siguiente densidad lagrangiana

$$\mathscr{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m^2 \phi^* \phi - M \varphi \varphi^* - V(\varphi, \phi)$$

donde $V(\varphi, \phi)$ es una función de los módulos de ambos campos, y donde m representa un parámetro constante de la teoría.

(a) Obtener las ecuaciones de movimiento (de Euler-Lagrange) que se derivan de la misma. Nótese que hay dos campos (y complejos!) en esta teoría.

(b) Hallar las simetrías de esta densidad lagrangiana y diga que grupo forman. ¿ Como deben ser las masas M y m y qué forma debe tener V para que el grupo de simetría sea $U(2)$?

5. Considere la densidad lagrangiana de tres partículas de Dirac libres,

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}_1(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_1)\psi_1(x) + \bar{\psi}_2(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_2)\psi_2(x) + \bar{\psi}_3(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_3)\psi_3(x)$$

   (a) ¿Cuál es el grupo de simetría de este lagrangiano?

   (b) Y si fuesen las tres masas iguales ($m_1 = m_2 = m_3$), ¿cuál sería el grupo de simetrías en este caso?

6. Considere el lagrangiano de Dirac acoplado al lagrangiana de Maxwell; es decir

$$\mathscr{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

   siendo D_μ la denominada *derivada covariante* $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

   (a) Escriba este lagrangiano aislando la parte del fermión libre, la del campo electromagnético, y la de interacción.

   (b) Muestre explícitamente que cada uno de estos términos es un escalar de Lorentz y, por lo tanto, también lo es el lagrangiano.

   (c) Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange para este modelo