ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2021

PRÁCTICA 2: MASA Y ENERGÍA EN EL MARCO RELATIVISTA

De la conjunción de la relatividad especial y la mecánica cuántica surgierón modelos que materializan la posibilidad de convertir la energía en reposo (en la famosa fórmula escrita como $E = mc^2$) en energía cinética y viceversa. Los ejercicios que siguen ayudarán a repasar nociones relativistas vistas en materias correlativas y ver las restricciones impuestas por las leyes de conservación de la energía y el momento, que se desprenden de una simetría exacta de la teoría cuantica relativista subyacente.

1 Preliminares: invariantes de Lorentz, notación cuadridimensional

Esta sección pretende repasar cosas elementales del lenguaje en relatividad especial. Puede omitirse si considera que tiene fresca estas nociones.

1. Dados dos eventos en el espacio tiempo de coordenadas x_a^μ y x_b^μ ($\mu = 0,1,2,3;\ x^0 = ct$) :

   (a) Muestre que la cantidad

   $$s_{ab}^2 \equiv (x_a^0 - x_b^0)^2 - (x_a^1 - x_b^1) - (x_a^2 - x_b^2) - (x_a^3 - x_b^3) \tag{1}$$

   es invariante ante un boost de Lorentz en alguna dirección (basta para el ejercicio que elija una dirección coincidente con alguno de los ejes $1,2,3$)

   (b) Indique la condición sobre s_{ab}^2 para que los eventos a y b esten o no causalmente conectados. Note que la expresión s_{ab}^2 no significa que esta cantidad tenga que ser mayor o igual a cero. Es solo una notación.

   (c) Reescriba la expresión de s_{ab}^2 utilizando la matriz diagonal η la matriz diagonal de 4×4, con $\eta_{00} = 1$ y $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$. Esta matriz , que permite establecer una noción analoga a la de distancia ordinaria, se la conoce como *métrica de Minkowksi*.

2. Considere el diagrama de la figura.

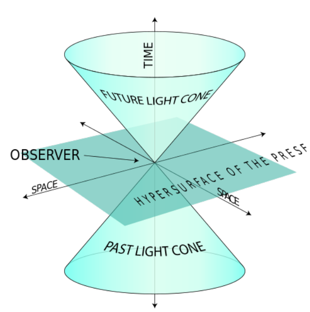

Figure 1: Cono de luz: ayuda para clasificar los eventos según su conexión causal

Dibuje curvas que, pasando por el origen, representen la trayectoria de una partícula que se mueve a velocides iguales y menores a la de la luz.

3. A partir de lo anterior, considere un observador que se mueve en movimiento rectilineo y uniforme entre un punto A y B, a velocidad de modulo v medido por el observador O. Si el tiempo para ir de A a B medido por O es T, halle la expresión del tiempo medido por O' , τ (tiempo propio) en terminos de T. Encuentre la velocidad a la cual un tiempo es el doble del otro (hay uno que es necesariamente mayor al otro. Si alguna vez escucho alguna charla de divulgación probablemente lo sepa, aunque no haya cursado fisica 1 ni teorica 1).

4. Para los ejercicios siguientes será útil saber manipular cuadrivectores, construyendo invariantes. Las componentes V^{μ} de un cuadrivector cambian ante transformaciones de Lorentz en forma identica a las coordenadas. Se define una suerte de producto escalar entre cuadrivectores V y W como:

$$V.W = V^{\mu}V^{\nu}\eta_{\mu\nu}$$

. En particular, el producto de un cuadrivector V consigo mismo se denota con V^2, lo cual no debe confundirse con la norma al cuadrado de su parte tridimensional, que la denotaremos asi $\mid \vec{V} \mid^2$. V^2 es una generalización de la noción de norma al cuadrado, cambiando la metrica euclideana por la de Minkowski.

   (a) Proponga vectores tales que V^2 sea positivo (tipo tiempo), negativo (tipo espacio) o nulo (tipo Luz). Dibuje estos vectores en un plano (considerando solo las componentes $0,1$), con ayuda del cono de luz.

   (b) Dados dos cuadrivectores V^{μ} y W^{μ} y definiendo $S^{\mu} = W^{\mu} + V^{\mu}$, halle explicitamente S^2 en terminos de W^2, V^2 y $W.V$. Muestre que si W y V son de tipo tiempo o luz, con componente cero no-negativa, S tambien será espacial o temporal. Basta con una demostración grafica.

2 Momento y energía

A partir de la definición del cuadrimomento $p^{\mu} = m\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ de una partícula de masa m (siendo τ el tiempo propio asociado a una partícula en movimiento, $x^0 \equiv ct$, y $\mu = 0,...,3$):

   (a) Verifique el carácter de cuadrivector de esta cantidad. Es decir, que ante una transformación de Lorentz, p^{μ} transforma igual que las coordenadas espacio-temporales x^{μ}. Escriba explicitamente la relación entre las componentes del cuadrimomento en dos sistemas de referencia que se desplazan con velocidad relativa de modulo V en alguna dirección (que puede acomodar a uno de los ejes por simplicidad)

   (b) Escriba la expresión del momento y energía $E \equiv cp^0$ relativista de una partícula en términos de la masa m y velocidad $\mathbf{v}$ y derive a partir de ella las relaciones:
   $E^2/c^2 - \mid \vec{p} \mid^2 = m^2c^2 \qquad \vec{p} = E\frac{\mathbf{v}}{c^2}$.

   (c) Reescriba la primera relación en la forma $p^2 \equiv p^{\mu}p^{\nu}\eta_{\mu\nu} = m^2c^2$, siendo η la matriz diagonal mencionada anteriormente ($\eta_{00} = 1$ y $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$).

   (d) Definiendo la energía cinética $T \equiv E - mc^2$, obtenga una expansión en potencias de $\beta \equiv \mid \vec{v} \mid$ y reobtenga el límite no relativista de ésta.

Nota: a partir de ahora usaremos $c = 1$.

5. Para el caso $m = 0$, la partícula se mueve a la velocidad de la luz y por tanto la definición $p^{\mu} = m\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ carece de sentido). Un ejemplo importante es el fotón, la partícula asociada a la cuantización del campo electromagnetico.

(a) Encuentre en este caso la relación entre energía y momento, como limite del caso masivo.

(b) Considere el caso con masa distinta de cero *ultrarelativista*, en el que la energia cinetica T es mucho mas grande que la energía en reposo m. Halle la relación entre $\frac{E}{|\vec{P}|}$ como una expansión en potencias de $m/|\vec{P}|$, reobteniendo el caso sin masa en el término dominante.

(c) A fin de tener alguna noción de escalas, encuentre a que velocidad deberia moverse una partícula de masa m para que su energía cinetica sea igual a su energía en reposo.

6. **Masa de un sistema de partículas**: En el marco Newtoniano, la masa de un sistemas comppuesto por N objetos de masas m_i es simplemente: $M_{sistema} = \sum_{i=1}^{N} m_i$. En el marco relativista, es diferente. Para comenzar, muestre que las tres siguientes definiciones de masa de un sistema M_T son equivalentes:

   (a) $M_T^2 = P_T^2$, siendo $P_T^\mu = \sum_i p_i^\mu$. Esta definición imita la relación entre masa y momento de una sola partícula.

   (b) $M_T = E_{cm}$, siendo $E_{cm} = \sum_i p_i^{0(CM)}$ la energía total vista desde el sistema centro de masa. Este sistema de referencia se define al igual que en el caso Newtoniano, como aquel desde el cual la suma de las componentes espaciales se anula.

   (c) M_T definida como : $P_T^i = \gamma(V_{cm}) M_T V^i{}_{cm}$, siendo γ el factor usual $\gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Esta última definición expresa que el sistema se puede pensar como un partícula de masa M_T con una velocidad igual V_{cm}, tal como ocurre en el marco Newtoniano.

7. ** A partir de lo anterior, podemos ir a ejercicio clave de de esta guía:

   (a) Muestre que la masa de un sistema de dos particulas de masas m_1 y m_2 es mayor o igual a la suma $m_1 + m_2$. Halle la diferencia entre la masa total y $m_1 + m_2$. Apliquelo al caso de dos fotones, no colineales.

   (b) El resultado anterior se extiende al caso de N partículas. Escriba la expresión de la masa de una caja que contiene fotones (no colineales).

   (c) El protón esta compuesto por 3 partículas llamadas quarks (dos quarks de tipo u y uno de tipo d). El sentido en que se puede considerar compuesto por solo estas dos cosas es una aproximación muy burda. Pero pensandolo asi, busque en una tabla la masa del proton y comparela con la suma de sus constituyentes. Asumiendo que el protón puede considerarse meramente como una caja que contiene estas tres partículas no interactuando entre si, estime la contribución a la energía cinetica de estas partículas en el sistema centro de masas.

8. Las consideraciones anteriores se limitaban a sistemas de particulas no interactuantes, donde la energia adicional a la de reposo era solo la cinetica. Cuando hay interacción entre particulas en un sistema ligado (como en el nucleo de un átomo), la energía potencial contribuye a la masa pero ya no es valida la conclusión anterior: que la masa del sistema sea mayor o igual a la suma de las masas de los constituyentes.

   A fin de constatar esto, vaya a la pagina *Nuclear Wallet Cards Search* y compare la masa de los diferentes nucleos, viendo en cuando se apartan de ser simplemente la suma de las masas de sus nucleones. En particular, considere el proceso de fisión:

$$236U \rightarrow 92Kr + 141Ba + 3n$$

.

   A partir de la información sobre el "exceso de masa" de cada constituyente en esta fisión, halle la energía liberada. (Más sobre esto en la guía correspondiente a nucleos)

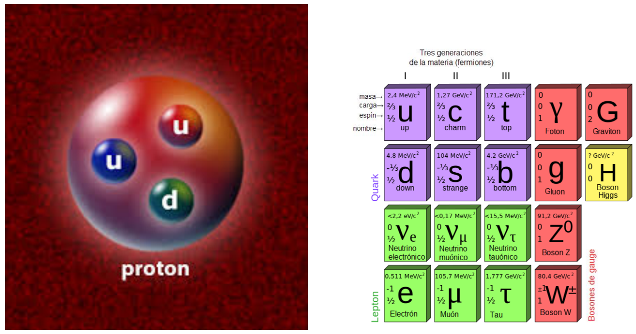

Figure 2: Compare la masa del protón con la suma de las masas de sus constituyentes

3 Conservación de cuadrimomento. Procesos posibles e imposibles

9. Consideremos ahora un proceso relativista en el que N particulas de masas m_i ($i = 1..N$) se transforman en M de masas M_i ($j = 1..M$). En en sistema aislado el cuadrimomento total debe conservarse. En base a lo anterior, diga si esta ley de conservacion implica que :

   (a) Se debe conservar la masa del sistema.

   (b) Se debe conservar la suma de las masas. Es decir: $\sum_{i=1}^{N} m_i = \sum_{i=1}^{M} M_j$

   Si ambas afimaciones le resultan equivalentes, revise los ejercicios anteriores.

10. Casos de especial interés son procesos del tipo $1 \to 2+3$ o $1+2 \to 3+4$.

    (a) Halle en le primer caso las relaciones (igualdades o desigualdades) que deben darse para las masas de las partículas involucradas para que el proceso sea posible.

    (b) Muestre que en el segundo caso no hay restriccion para las relaciones entre ls masas. A fin de ver esto, considere el caso simple en que $m_1 = m_2$ y $m_3 = m_4$ y halle las energias finales en terminos de las energias iniciales en el sistema centro de masa, verificando que siempre hay solución, sin importar la relación entre las masas finales e iniciales.

11. Decida si los procesos siguientes son posibles en base a leyes de conservación relativista:

    a) $e^-e^+ \to \gamma \quad b)\ e^-e^+ \to \gamma + \gamma$

    siendo γ un fotón.

12. Considere una desintegración de un cuerpo en el estado inicial, a dos cuerpos en el estado final, i.e. $A \to BC$. Halle las energías de las partículas B y C en el sistema en que la partícula A se halla en reposo. Verifique que estas energías están unívocamente definidas por las masas de A, B y C.

13. Considere un proceso del tipo $1+2 \to 3$, siendo 3 una partícula de masas m_3 (mayor a la suma $m_1 + m_2$). Se quiere ver cual es la la energía cinetica con la que deben colisionar 1 y 2 para dar lugar a la partícula 3. Considere para simplificar que la partícula 2 se halla en reposo.

    (a) ¿Cuál es la energía cinética con la que debe incidir 1 para que el proceso sea posible?

(b) Cuál es la energía cinetica de la partícula 3?

Observación: La moraleja de este ejercicio es que a una energía cinética determinada de la partícula 2 puede crearse esta partícula de masa m_3. Dado que la aparición de esta partícula de masa m_3 (usualemente inestable) se manifiesta como un pico en la sección eficaz como función de la energía de las particulas que colisionan, este analisis permite identificar donde debe estar el pico según sea las masas m_1, m_2 y m_3. Para ilustrar este punto, observe el siguiente diagrama:

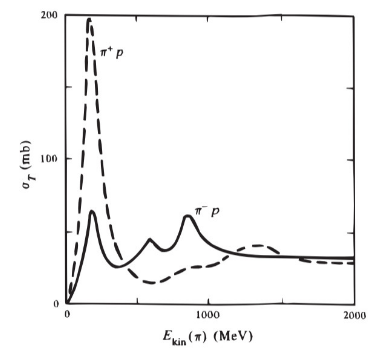

Figure 5.35: Total cross section as a function of pion kinetic energy for the scattering of positive and negative pions from protons. (1 mb = 1 millibarn = 10^{-27} cm^2.)

Figure 3: Sección eficaz en un proceso de scatering entre piones y proton, como función de la energía de los piones incidentes. Los picos indican energías en las cuales se generan nuevos hadrones

14. **Energía umbral**: A diferencia del proceso anterior, en el que solo a una dada energía es posible que surja la particula de masa m_3, considere ahora el proceso $1+2 \to 3+4$. Considere que $m_1 = m_2$, $m_3 = m_4$.

    (a) En el sistema centro de masas, ¿cuál es la energía cinetica minima de 1 y 2 para que el proceso sea posible? Considere los casos $m_3 > m_1$ y $m_3 < m_1$

    (b) En el sistema en que la partícula 1 se halla en resposo, halle la energía minima con la que debe incidir 2 para que el proceso sea posible.

4 Aplicaciones de lo anterior

15. A partir de lo anterior, calcule el impulso del muón en la desintegración $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$, suponiendo que el pión se encuentra inicialmente en reposo. Conociendo el tiempo de vida media del muón, ¿qué distancia recorrería este muón en el vacío (en promedio) antes de desintegrarse? Deje el resultado escrito en términos de las masas de las partículas involucradas y el tiempo de vida media del muón.

16. En base a los ejercicios anteriores, reconsidere el análisis del decaimiento del neutrón en un electrón y un protón que llevó a suponer la existencia del neutrino discutido en la teorica. Es decir, considere el proceso en el que una partícula decae a estas tres y argumente que las energías del electrón y protón observadas experimentalmente muestran que debe haber una partícula adicional en el estado final.

17. Los primeros antiprotones fueron creados en el Bevatrón (Berkeley) en la reacción $pp \to ppp\bar{p}$. En tal caso se utilizó un haz de protones de energía E que colisiona con un blanco fijo de protones. Cuál debe ser la energía cinética mínima del protón incidente (uno de los dos pp) para que el proceso sea posible? Compare esta con la energía del proton incidente en el sistema centro de masa y diga cuál es mayor.

18. En una teoría relativista, un choque elástico entre dos partículas es definido como aquel en el que no cambia la identidad de las partículas. Es decir, $A+B \to A+B$. En este choque se conserva no solo la energía total sino la cinética. Muestre que en este tipo de colisión, en el sistema centro de masa, los módulos de las velocidades de cada partícula no cambian.

19. Considere el proceso elástico $\bar{\nu}_\mu + e^- \to \bar{\nu}_\mu + e^-$. Demuestre que en el sistema del laboratorio, donde el electrón se halla originalmente en reposo, el ángulo de emisión θ del electrón respecto del antineutrino incidente está dado por
$$\sin^2\theta = \frac{2m}{T+2m}\left(1 - \frac{T}{E_\nu} - \frac{mT}{2E_\nu^2}\right),$$
donde m es la masa del electrón, E_ν la energía del antineutrino incidente y $T = E - m$ la energía cinética del electrón saliente.