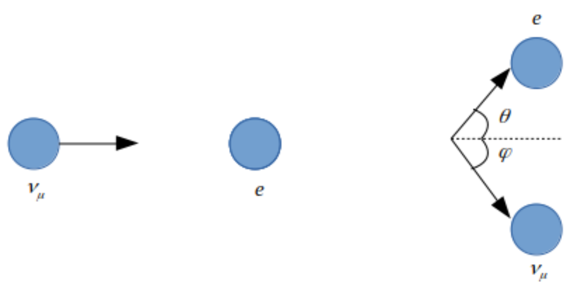
15 Consideremos el proceso elástico $\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$. Queremos probar que, en el sistema de laboratorio (electrón en reposo), el ángulo de emisión θ del electrón respecto del antineutrino incidente está dado por

$$\text{sen}^2\theta = \frac{2m}{T+2m}\left(1 - \frac{T}{E_\nu} - \frac{mT}{2E_\nu^2}\right)$$

Donde m es la masa del electrón, E_ν la energía del antineutrino incidente y $T = E - m$ la energía cinética del electrón saliente.

Veamos dos caminos para probar lo que nos piden, uno largo y uno corto.

En el sistema de laboratorio, pictóricamente tenemos lo siguiente Escribamos el cuadrimomento



de cada una de las partículas involucradas

$$\begin{aligned}
p^\mu_{\nu_i} &= (E_\nu, \vec{p}) = (E_\nu, p, 0, 0) \\
p^\mu_{e_i} &= (E_e, \vec{0}) = (m_e, 0, 0, 0) \\
p^\mu_{\nu_f} &= (E'_\nu, \vec{p}_\nu)' = (E'_\nu, p'_\nu \cos\varphi, -p'_\nu \text{sen}\varphi, 0) \\
p^\mu_{e_f} &= (E'_e, \vec{p}_e)' = (E'_e, p'_e \cos\theta, -p'_e \text{sen}\theta, 0)
\end{aligned}$$

Donde tomamos que $p = |\vec{p}|$, $p'_\nu = |\vec{p}'_\nu|$ y análogamente para el momento del electrón saliente. De la conservación del cuadrimomento tenemos que $p^\mu_i = p^\mu_f$, por lo tanto

$$E_\nu + m_e = E'_\nu + E_e \tag{1}$$
$$p = p'_\nu \cos\varphi + p'_e \cos\theta \tag{2}$$
$$0 = -p'_\nu \text{sen}\varphi + p'_e \text{sen}\theta \tag{3}$$

Hasta acá tenemos más incógnitas que ecuaciones. Planteamos los invariantes sabiendo que la masa de los neutrinos tenemos $m_\nu = 0$. De esta forma,

$$m_\nu^2 = 0 = E_\nu^2 - |p_\nu|^2 = E_\nu^2 - p^2 \implies E_\nu = p \tag{4}$$
$$\text{análogamente} \qquad E'_\nu = p'_\nu \tag{5}$$
$$m_e^2 = E_e^2 - p_e'^2 \tag{6}$$

Ahora si tenemos definido el sistema, sólo resta despejar. Reemplazando 4 y 5 en 2 obtenemos

$$\begin{aligned}
E_\nu &= E'_\nu \cos\varphi + \sqrt{E_e^2 - m_e^2}\cos\theta \\
\implies E_\nu &- \sqrt{E_e^2 - m_e^2}\cos\theta = E'_\nu \cos\varphi
\end{aligned}$$

De forma similar, reemplazando en 3 obtenemos

$$\text{sen}\theta\sqrt{E_e^2 - m_e^2} = \text{sen}\varphi E'_\nu$$

Elevando ambas ecuaciones al cuadrado y sumandolas,

$$E_\nu^2 - 2\sqrt{E_e^2 - m_e^2}\cos\theta E_\nu + E_e^2 - m_e^2 = E_\nu'^2 \tag{7}$$

Recordando que el ejercicio pide una expresión en términos de T (energía cinética del electrón), resulta conveniente escribir $E_e = T + m_e$. De esta manera, en 7, $E_e^2 - m_e^2 = (E_e - m_e)(E_e + m_e) = T(T+2m_e)$. Falta usar la conservación de la energía. Reemplazamos 5 en 7, escribiendolo también en términos de T. De esta forma llegamos a

$$E_\nu^2 - 2\sqrt{T(T+2m_e)}\cos\theta + T(T+2m_e) = (E_\nu - T)^2$$

Con un poco de álgebra es sencillo despejar el $\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{T(E_\nu) + m_e}{E_\nu\sqrt{T(T+2m_e)}} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta}$$

Finalmente podemos despejar el $\text{sen}^2\theta$ obteniendo así la expresión deseada.

$$\text{sen}^2\theta = \frac{2m}{T+2m}\left(1 - \frac{T}{E_\nu} - \frac{mT}{2E_\nu^2}\right)$$

Otra forma de encarar el problema es hacer aparecer la variable que queremos despejar desde el principio. Para esto, planteamos la conservación del cuadrimomento de una forma más conveniente

$$\begin{aligned} p^\mu_{\nu_i} + p^\mu_{e_i} &= p^\mu_{\nu_f} + p^\mu_{e_f} \\ \implies p^\mu_{\nu_i} - p^\mu_{e_f} &= p^\mu_{\nu_f} - p^\mu_{e_i} \end{aligned} \tag{8}$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación 8

$$\begin{aligned} (p^\mu_{\nu_i} - p^\mu_{e_f})^2 &= (p^\mu_{\nu_f} - p^\mu_{e_i})^2 \\ \implies (p^\mu_{\nu_i})^2 + (p^\mu_{e_f})^2 - 2p^\mu_{\nu_i}p_{\mu e_f} &= (p^\mu_{\nu_f})^2 + (p^\mu_{e_i})^2 - 2p^\mu_{\nu_f}p_{\mu e_i} \end{aligned}$$

Cada cuadrimomento elevado al cuadrado da como resultado la masa de cada partícula. Por otro lado, los productos cruzados

$$p^\mu_{\nu_i}p_{\mu e_f} = E_\nu E_e - \vec{p}_{\nu_i}\vec{p}_{e_f} \tag{9}$$
$$p^\mu_{\nu_f}p_{\mu e_i} = E'_\nu m_e - \vec{p}_{\nu_f}\vec{p}_{e_i} \tag{10}$$

Los productos internos entre los vectores momento será el producto entre los módulos por el coseno del ángulo entre ellos. En el caso de 9, como tenemos el producto entre el momento del electrón saliente y el neutrino incidente, ese ángulo es justamente el θ que queremos hallar. Esa es la motivación de escribir la conservación del cuadrimomento de la forma 8. En la expresión 10, como el electrón incidente está en reposo, el producto es 0 y no hace falta definir el ángulo φ. Obtenemos entonces

$$m_e^2 - 2(E_\nu E_e - pp'_e\cos\theta) = m_e^2 - 2E'_\nu m_e$$

Despejando E'_ν y p'_e de las relaciones ya obtenidas, se puede obtener el $\text{sen}^2\theta$.