

# Estructura de la Materia 4

- 22/03 Introducción
- 29/03 Fenomenología Nuclear
- 31/03 Isospín
- 05/04 Grupos de Simetría
- 07/04 Modelo de quarks
- 12/04 Modelo de quarks (2)
- 19/04 Mesones y Color
- 21/04 Cuántica Relativista
- 26/04 Soluciones de la Ec. de Dirac
- 28/04 Fenomenología de la Ec. de Dirac
- 03/05 Covariancia de la Ec. de Dirac
- 05/05 Helicidad y Quiralidad
- 17/05 Teoría Lagrangiana de Campos
- 19/05 Teorema de Noether y 2<sup>da</sup> cuantificación
- 24/05 Simetrías de Gauge
- 26/05 Gauge no abeliano
- 31/05 Cromodinámica Cuántica
- 02/06 Interacciones Débiles
- 07/06 Unificación Electro-débil
- 09/06 Ruptura Espontánea de la Simetría
- 14/06 Generación de masas en la teoría electro-débil
- 16/06 Oscilaciones de Neutrinos
- 21/06 Interacciones de partículas con la materia
- 23/06 Detectores y colisionadores
- 28/06 Descubrimiento del bosón de Higgs



Gustavo Otero y Garzón – UBA



# 21/04: Cuántica Relativista

# ¿Porqué cuántica-relativista?

- ¿¡Porqué no?!
- **En las últimas clases vimos que para describir la física a nivel fundamental (partículas) uno necesita además una formulación relativista**
  - Aparecieron anti-partículas (desde el decaimiento  $\beta$  a fines del siglo XIX y el descubrimiento del positron en 1931)
  - La energía alcanzada por los aceleradores llevaban protones a velocidades relativistas
  - Si los quarks existen y tienen las masas que tienen ( $m_u \sim 4 \text{ MeV}$ ), los impulsos necesarios para estar confinados en hadrones los hacen ultra-relativistas ( $m_{uud} / m_{\text{protón}} \sim 10^{-2}$ )
- **La necesidad de una cuántica-relativista no es una mera sofisticación formal, es una necesidad fenomenológica bien concreta**
- **Los primeros intentos fueron inmediatamente posteriores a la formulación de Schrödinger**

# ¿Cómo obteníamos la ec. de Schrödinger?

- Una manera sencilla es aplicar las reglas de correspondencia a la relación energía-impulso no-relativista:

$$\begin{cases} E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \end{cases} \quad E = \frac{p^2}{2m}$$

- Pensando las cosas como operadores aplicando a una función de onda compleja

$$E\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{p^2}{2m}\psi(\mathbf{x}, t) \quad \Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

# Ecuación de continuidad. Qué es la $\psi$ ?

- La ecuación de Schrödinger satisface una ecuación de continuidad

- Multiplicando la ec. de Schrödinger por  $\psi^*$  y la ec. conjugada por  $\psi$ :

$$\begin{cases} i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\nabla^2\psi = 0 \\ i\hbar\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\psi\nabla^2\psi^* = 0 \end{cases}$$

- Restando miembro a miembro:

$$-i\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) + \frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*)}_{\nabla\cdot(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)} = 0$$

# Ecuación de continuidad. Qué es la $\psi$ ?

- La ecuación de Schrödinger satisface una ecuación de continuidad

- Multiplicando la ec. de Schrödinger por  $\psi^*$  y la ec. conjugada por  $\psi$ :

$$\begin{cases} i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\nabla^2\psi = 0 \\ i\hbar\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\psi\nabla^2\psi^* = 0 \end{cases}$$

- Restando miembro a miembro:

$$-i\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) + \frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*)}_{\nabla\cdot(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)} = 0$$

- Podemos definir:

$$\begin{cases} \rho \stackrel{\text{def}}{=} \psi^*\psi \longrightarrow 0 \leq \rho \leq 1 \\ \mathbf{J} = \frac{\hbar^2}{2im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \end{cases}$$

# Ecuación de continuidad. Qué es la $\psi$ ?

- La ecuación de Schrödinger satisface una ecuación de continuidad

- Multiplicando la ec. de Schrödinger por  $\psi^*$  y la ec. conjugada por  $\psi$ :

$$\begin{cases} i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\nabla^2\psi = 0 \\ i\hbar\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\psi\nabla^2\psi^* = 0 \end{cases}$$

- Restando miembro a miembro:

$$-i\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) + \frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*)}_{\nabla \cdot (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)} = 0$$

- Podemos definir:

$$\begin{cases} \rho \stackrel{\text{def}}{=} \psi^*\psi \longrightarrow 0 \leq \rho \leq 1 \\ \mathbf{J} = \frac{\hbar^2}{2im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \text{o} \quad -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

# Ecuación de continuidad. Qué es la $\psi$ ?

- La ecuación de Schrödinger satisface una ecuación de continuidad

- Multiplicando la ec. de Schrödinger por  $\psi^*$  y la ec. conjugada por  $\psi$ :

$$\begin{cases} i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\nabla^2\psi = 0 \\ i\hbar\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\psi\nabla^2\psi^* = 0 \end{cases}$$

- Restando miembro a miembro:

$$-i\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) + \frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*)}_{\nabla \cdot (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)} = 0$$

- Podemos definir:

Densidad de probabilidad

$$\begin{cases} \rho \stackrel{\text{def}}{=} \psi^*\psi \longrightarrow 0 \leq \rho \leq 1 \\ \mathbf{J} = \frac{\hbar^2}{2im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \text{o} \quad -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$



# Ecuación de Klein-Gordon

- La ec. de Schrödinger es explícitamente no-relativista
  - Parte de una relación energía-impulso clásica
  - Es no-covariante (la derivada espacial y temporal no están al mismo nivel)
- La propuesta de Klein-Gordon ([Zeitschrift für Physik. 40 117](#), [Zeitschrift für Physik. 37 895](#)) es aplicar las reglas de correspondencia a la relación energía-impulso relativista

$$\begin{cases} E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \end{cases} \quad E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

- La regla de correspondencia no tiene problemas de covarianza definiendo:

$$\begin{cases} p^\mu = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Contravariante} \\ p_\mu = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ -\mathbf{p} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Covariante} \end{cases}$$

$$p_\mu \stackrel{\text{def}}{=} i\hbar \partial_\mu \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$\begin{cases} \partial^\mu \sim \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\nabla \end{bmatrix} \\ \partial_\mu \sim \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \nabla \end{bmatrix} \end{cases}$$

# Ecuación de Klein-Gordon

- Operando de manera análoga a lo que hicimos con Schrödinger:

$$\underbrace{-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}}_{E^2} \phi = \underbrace{-c^2 \hbar^2 \nabla^2}_{c^2 p^2} \phi + \underbrace{m^2 c^4}_{m^2 c^4} \phi$$

- Pasando a un sistema de unidades en el que  $\hbar \equiv c \equiv 1$  usando  $\partial^\mu \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\nabla \end{bmatrix}$ :

$$\boxed{(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0} \rightarrow \text{Klein-Gordon}$$

# Ecuación de continuidad (Klein-Gordon)

- Podemos hacer el mismo truco de multiplicar por  $\psi^*$  a la ecuación y por  $\psi$  a la ec. conjugada y obtenemos también una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ i \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \right] + \nabla \cdot [-i (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)] = 0$$

- Y volvemos a definir una densidad y una corriente

$$\begin{cases} \rho \stackrel{\text{def}}{=} i \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \\ \mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} -i (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

# Ecuación de continuidad (Klein-Gordon)

- Podemos hacer el mismo truco de multiplicar por  $\psi^*$  a la ecuación y por  $\psi$  a la ec. conjugada y obtenemos también una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ i \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \right] + \nabla \cdot [-i (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)] = 0$$

- Y volvemos a definir una densidad y una corriente

$$\begin{cases} \rho \stackrel{\text{def}}{=} i \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \\ \mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} -i (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

- La solución de K-G para una partícula libre será:

$$\phi = N e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \longrightarrow \begin{cases} \rho = 2E |N|^2 \\ \mathbf{J} = 2\mathbf{p} |N|^2 \end{cases}$$

# Ecuación de continuidad (Klein-Gordon)

- Podemos hacer el mismo truco de multiplicar por  $\psi^*$  a la ecuación y por  $\psi$  a la ec. conjugada y obtenemos también una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ i \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \right] + \nabla \cdot [-i (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*)] = 0$$

- Y volvemos a definir una densidad y una corriente

$$\begin{cases} \rho \stackrel{\text{def}}{=} i \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \\ \mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} -i (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \end{cases} \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

- La solución de K-G para una partícula libre será:

$$\phi = N e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \longrightarrow \begin{cases} \rho = 2E |N|^2 \\ \mathbf{J} = 2\mathbf{p} |N|^2 \end{cases} \quad J^\mu \stackrel{\text{def}}{=} 2p^\mu |N|^2 \longrightarrow \boxed{\partial_\mu J^\mu = 0}$$

# Veníamos bien...

- **¡Obtuvimos un upgrade de la ecuación de Schrödinger!**
  - En el límite clásico, la ecuación de K-G recupera la de Schrödinger
- **Sin embargo, se plantean dos pequeños “problemas”**
  - La relación de dispersión relativista es cuadrática en la energía y eso genera soluciones con  $E > 0$  y  $E < 0$  (¡que no podemos tirar!)
  - Energías negativas no asustan porque es cuestión de definir un “cero”
  - El problema es que pueden ser tan negativas como querramos (¡no habría estados estables!)
  - Por otro lado, recuerden que la densidad  $\rho$  es proporcional a  $E$ , con lo cual perdemos la interpretación de  $\rho$  como una densidad de probabilidad
- **Hay que reinterpretar las soluciones con  $E < 0$  de la ec. de K-G**

# Reinterpretación de Pauli-Weisskopf

- **El primer paso para reinterpretar la ec. de K-G se dio en 1934** ([Helvetica Physica Acta, Vol. 7](#))
  - La idea es interpretar la corriente de K-G como una corriente “eléctrica”

$$J^\mu = -i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \longrightarrow J^\mu = -ei(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad \begin{cases} J^0 = -2eE \\ \mathbf{J} = -2e\mathbf{p} \end{cases}$$

# Reinterpretación de Pauli-Weisskopf

- **El primer paso para reinterpretar la ec. de K-G se dio en 1934** (Helvetica Physica Acta, Vol. 7)
  - La idea es interpretar la corriente de K-G como una corriente “eléctrica”

$$J^\mu = -i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \longrightarrow J^\mu = -ei(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad \begin{cases} J^0 = -2eE \\ \mathbf{J} = -2e\mathbf{p} \end{cases}$$

- Para un electrón con energía  $E$ , carga  $-e$  e impulso  $\mathbf{p}$

$$J^\mu(e^-) = -2e \begin{bmatrix} E \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Partícula}$$

- Para un positrón con  $E > 0$  viajando en sentido opuesto

$$J^\mu(e^+) = -2e \begin{bmatrix} -E \\ -\mathbf{p} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Antipartícula}$$



# Reinterpretación de Pauli-Weisskopf

- El primer paso para reinterpretar la ec. de K-G se dio en 1934 (Helvetica Physica Acta, Vol. 7)

– La idea es interpretar la corriente de K-G como una corriente “eléctrica”

$$J^\mu = -i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \longrightarrow J^\mu = -ei(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad \begin{cases} J^0 = -2eE \\ \mathbf{J} = -2e\mathbf{p} \end{cases}$$

– Para un electrón con energía E, carga  $-e$  e impulso  $\mathbf{p}$

$$J^\mu(e^-) = -2e \begin{bmatrix} E \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Partícula}$$

– Para un positrón con  $E > 0$  viajando en sentido opuesto

$$J^\mu(e^+) = -2e \begin{bmatrix} -E \\ -\mathbf{p} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Antipartícula}$$

- Es decir, un positrón con energía positiva viajando hacia la izquierda tiene la misma corriente de K-G (la misma dinámica) que un electrón de energía negativa yendo en la dirección opuesta!
- Partícula y anti-partícula no son cosas distintas sino dos estados de una misma entidad

$$e^{-iEt} = e^{-i(-E)(-t)} \quad \text{partícula con } E < 0 \sim \text{anti-partícula con } E > 0$$

# Ecuación de Dirac

- En 1927 a nadie se le había ocurrido pensar en términos de corrientes y densidades de carga y anti-partículas
- Dirac buscó ecuaciones con densidades de probabilidad definidas positivas
  - El “problema” de las “probabilidades negativas” venía del hecho que la derivada temporal era de segundo orden en K-G
  - propuso una ecuación lineal en la derivada temporal pero que también satisfaga la relación de dispersión relativista, necesitaba otro hamiltoniano

$$\mathcal{H}_{\text{Dirac}} = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2$$

$$\mathcal{H}_{\text{Dirac}} \Psi = E\Psi$$

- Con  $\alpha$  (un vector de tres componentes) y  $\beta$  a determinar tal que se satisfaga:  $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$

# Ecuación de Dirac

- En 1927 a nadie se le había ocurrido pensar en términos de corrientes y densidades de carga y anti-partículas
- Dirac buscó ecuaciones con densidades de probabilidad definidas positivas
  - El “problema” de las ”probabilidades negativas” venía del hecho que la derivada temporal era de segundo orden en K-G
  - propuso una ecuación lineal en la derivada temporal pero que también satisfaga la relación de dispersión relativista, necesitaba otro hamiltoniano

$$\mathcal{H}_{\text{Dirac}} = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2$$

$$\mathcal{H}_{\text{Dirac}} \Psi = E\Psi$$

- Con  $\alpha$  (un vector de tres componentes) y  $\beta$  a determinar tal que se satisfaga:  $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{Dirac}}^2 \Psi &= E^2 \Psi \\ (c\alpha_i \alpha_j + \beta mc^2) (c\alpha_j p_j + \beta mc^2) \Psi &= (c^2 p^2 + m^2 c^4) \Psi \\ [c^2 \alpha_i^2 p_i^2 + c^2 (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i mc^2 + \beta^2 m^2 c^4] \Psi &= \end{aligned} \quad \begin{cases} \beta^2 = 1 \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 \\ \{\alpha_i, \beta\} = 0 \\ \alpha_i^2 = 1 \end{cases}$$

# Hamiltoniano de Dirac

- $\alpha_i$  y  $\beta$  entonces no pueden ser números
  - Podrían ser matrices

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \longrightarrow \alpha_i = -\beta\alpha_i\beta$$

$$\begin{array}{l} \text{Tr}(\alpha_i) = -\text{Tr}(\beta\alpha_i\beta) \\ \text{Props. de la traza} \rightarrow = -\text{Tr}(\alpha_i\beta\beta) \\ \beta^2 = 1 \rightarrow = -\text{Tr}(\alpha_i) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \text{Tr}(\alpha_i) = 0 \\ \text{Tr}(\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta^2 = 1 \\ \alpha_i^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{autovalores}(\alpha_i) \in \{\pm 1\} \\ \text{autovalores}(\beta) \in \{\pm 1\} \end{cases}$$

# Ecuación de Dirac

- El hamiltoniano de Dirac se puede escribir entonces como:

$$\mathcal{H}_{\text{Dirac}} = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 \qquad \mathcal{H}_{\text{Dirac}}\Psi = E\Psi$$

– con

$$\text{Matrices de Dirac} \rightarrow \begin{cases} \beta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \\ \alpha_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

– de modo tal de satisfacer la relación de dispersión relativista

$\mathcal{H}_{\text{Dirac}}$  es un objeto de  $4 \times 4$

$\Psi$  es un objeto de  $4 \times 1$

# Ecuación de Dirac

- El hamiltoniano de Dirac se puede escribir entonces como:

$$\mathcal{H}_{\text{Dirac}} = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 \qquad \mathcal{H}_{\text{Dirac}}\Psi = E\Psi$$

- con

$$\text{Matrices de Dirac} \rightarrow \begin{cases} \beta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \\ \alpha_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- de modo tal de satisfacer la relación de dispersión relativista

$$\mathcal{H}_{\text{Dirac}} \text{ es un objeto de } 4 \times 4 \qquad \Psi \text{ es un objeto de } 4 \times 1$$

- entonces

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\hbar \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \Psi + mc^2 \beta \Psi \rightarrow \text{Ecuación de Dirac}$$

# Ecuación de Dirac

- El hamiltoniano de Dirac se puede escribir entonces como:

$$\mathcal{H}_{\text{Dirac}} = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 \quad \mathcal{H}_{\text{Dirac}}\Psi = E\Psi$$

- con

$$\text{Matrices de Dirac} \rightarrow \begin{cases} \beta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \\ \alpha_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- de modo tal de satisfacer la relación de dispersión relativista

$$\mathcal{H}_{\text{Dirac}} \text{ es un objeto de } 4 \times 4 \quad \Psi \text{ es un objeto de } 4 \times 1$$

- entonces

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\hbar \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \Psi + mc^2 \beta \Psi \rightarrow \text{Ecuación de Dirac}$$

- multiplicando por  $\beta$  a ambos lados y usando:  $p^\mu = \begin{bmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \partial/\partial t \\ \nabla \end{bmatrix} \quad \gamma^\mu \equiv \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}$

$$\boxed{(i\gamma^\mu p_\mu - m) \Psi = 0} \rightarrow \text{Ecuación de Dirac}$$

# Ecuación de continuidad (Dirac)

- Podemos hacer lo mismo que antes para obtener una ec. de continuidad:

$$\begin{cases} i\hbar\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\hbar\Psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\Psi + mc^2\Psi^\dagger\beta\Psi \\ i\hbar\Psi\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t} = -i\hbar\Psi\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\Psi^\dagger + mc^2\Psi\beta\Psi^\dagger \end{cases}$$

- y restando miembro a miembro

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^\dagger\Psi) = -i\hbar c\nabla\cdot(\Psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\Psi)$$



# Ecuación de continuidad (Dirac)

- Podemos hacer lo mismo que antes para obtener una ec. de continuidad:

$$\begin{cases} i\hbar\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\hbar\Psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\Psi + mc^2\Psi^\dagger\beta\Psi \\ i\hbar\Psi\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t} = -i\hbar\Psi\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\Psi^\dagger + mc^2\Psi\beta\Psi^\dagger \end{cases}$$

- y restando miembro a miembro

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^\dagger\Psi) = -i\hbar c\nabla\cdot(\Psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\Psi)$$

- definiendo

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$$

- podemos construir una “cuadri”-corriente que satisface la ec. de continuidad

$$J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad \boxed{\partial_\mu J^\mu = 0}$$

# Ecuación de continuidad (Dirac)

- Podemos hacer lo mismo que antes para obtener una ec. de continuidad:

$$\begin{cases} i\hbar\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\hbar\Psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\Psi + mc^2\Psi^\dagger\beta\Psi \\ i\hbar\Psi\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t} = -i\hbar\Psi\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\Psi^\dagger + mc^2\Psi\beta\Psi^\dagger \end{cases}$$

- y restando miembro a miembro

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^\dagger\Psi) = -i\hbar c\nabla\cdot(\Psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\Psi)$$

- definiendo

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$$

- podemos construir una “cuadri”-corriente que satisface la ec. de continuidad

$$J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad \boxed{\partial_\mu J^\mu = 0} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \rho \stackrel{\text{def}}{=} \Psi^\dagger\Psi < \leftarrow > 0! \\ \mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\Psi \end{cases}$$

## 26/04: Soluciones de la ec. de Dirac

# Repaso de la Cuántica-relativista

- **La clase pasada introducimos la cuántica-relativista**
  - Vimos que es necesaria para describir partículas a altas energías o quarks dentro de un protón, entre otros casos
  - Partiendo de las reglas de correspondencia, obtuvimos la ec. de Schrödinger partiendo de la relación energía-impulso clásica
  - Obtuvimos una ecuación de continuidad que refleja la conservación de la densidad de probabilidad
- **Ecuación de Klein-Gordon**
  - De manera análoga construimos una ecuación partiendo de la relación de dispersión relativista
  - También satisface una ecuación de continuidad, pero la " $\rho$ " no estaba definida positiva (no representa una probabilidad)
  - Lo que se conserva en la ecuación de continuidad es una densidad de corriente eléctrica
- **Ecuación de Dirac**
  - Para recuperar una densidad de probabilidad (" $\rho$ " definida positiva) construimos la ecuación de Dirac partiendo de un Hamiltoniano "lineal en  $p$ "
  - El  $H_{\text{Dirac}}$  resultó estar descrito por matrices de  $4 \times 4$  con soluciones de 4 componentes

# Soluciones de la Ec. de Dirac (p=0)

- ¿Qué aspecto y propiedades tienen las soluciones de la Ec. de Dirac?

– Empecemos con el caso sencillo p=0, en este caso  $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \beta mc^2\Psi$  con  $\beta = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{bmatrix}$

– Entonces obtenemos 4 ecuaciones diferenciales lineales no-acopladas:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} = -\frac{i}{\hbar} mc^2 \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ -\Psi_3 \\ -\Psi_4 \end{bmatrix}$$

# Soluciones de la Ec. de Dirac (p=0)

- ¿Qué aspecto y propiedades tienen las soluciones de la Ec. de Dirac?

– Empecemos con el caso sencillo p=0, en este caso  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \beta mc^2 \Psi$  con  $\beta = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$

– Entonces obtenemos 4 ecuaciones diferenciales lineales no-acopladas:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} = -\frac{i}{\hbar} mc^2 \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ -\Psi_3 \\ -\Psi_4 \end{bmatrix}$$

– Las base de soluciones contiene entonces a:

$$\Psi^{(1)} = \exp\left(-i\frac{me^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi^{(3)} = \exp\left(+i\frac{me^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi^{(2)} = \exp\left(-i\frac{me^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi^{(4)} = \exp\left(+i\frac{me^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con  $E = \begin{cases} mc^2 & \text{Para } \Psi^{(1)} \text{ y } \Psi^{(2)} \\ -mc^2 & \text{Para } \Psi^{(3)} \text{ y } \Psi^{(4)} \end{cases}$

# Soluciones de la Ec. de Dirac (p=0)

- ¿Qué aspecto y propiedades tienen las soluciones de la Ec. de Dirac?

– Empecemos con el caso sencillo p=0, en este caso  $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \beta mc^2\Psi$  con  $\beta = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$

– Entonces obtenemos 4 ecuaciones diferenciales lineales no-acopladas:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} = -\frac{i}{\hbar} mc^2 \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ -\Psi_3 \\ -\Psi_4 \end{bmatrix}$$

– Las base de soluciones contiene entonces a:

$$\Psi^{(1)} = \exp\left(-i\frac{me^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi^{(3)} = \exp\left(+i\frac{me^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi^{(2)} = \exp\left(-i\frac{me^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi^{(4)} = \exp\left(+i\frac{me^2}{\hbar}t\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con  $E = \begin{cases} mc^2 & \text{Para } \Psi^{(1)} \text{ y } \Psi^{(2)} \\ -mc^2 & \text{Para } \Psi^{(3)} \text{ y } \Psi^{(4)} \end{cases}$

¿partículas con espín?  
 ¿anti-partículas con espín?

# Soluciones de la Ec. de Dirac ( $p \neq 0$ )

- **Para  $p \neq 0$  se pueden hacer varias cosas**
  - “boostear” las soluciones en reposo
  - mostrar que cada componente satisface una ec. de K-G



# Soluciones de la Ec. de Dirac ( $p \neq 0$ )

- Para  $p \neq 0$  se pueden hacer varias cosas
  - “boostear” las soluciones en reposo
  - mostrar que cada componente satisface una ec. de K-G
  - la más instructiva es notar que  $[H, \mathbf{p}] = 0$  (con “ $\mathbf{p}$ ” multiplicado por una identidad de  $4 \times 4$ )
  - entonces deben haber auto-estados comunes:

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{p}} |\Psi\rangle = \mathbf{p} |\Psi\rangle \\ \underline{\mathcal{H}} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -i\hbar \nabla \Psi = \mathbf{p} \Psi \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = E \Psi \end{cases} \longrightarrow \Psi(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{p}, E) \exp\left(\frac{i}{\hbar} [\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et]\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} p^\mu = \begin{bmatrix} E \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \\ x^\mu = \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow = u(\mathbf{p}, E) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu\right)$$

- donde  $u(\mathbf{p}, E)$  es un “espinor” de 4 componentes que no depende de “ $\mathbf{x}$ ” ni de “ $t$ ” y que satisface:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \Psi &= E \Psi \\ (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2) u e^{-\cancel{\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu}} &= E u e^{-\cancel{\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu}} \end{aligned}$$

# Soluciones de la Ec. de Dirac ( $p \neq 0$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\Psi &= E\Psi \\ (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2) u e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} &= E u e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \longrightarrow c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 = \begin{bmatrix} mc^2 \mathbb{1}^{2 \times 2} & c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -mc^2 \mathbb{1}^{2 \times 2} \end{bmatrix} \in 4 \times 4 \end{aligned}$$

- donde  $\sigma$  son las matrices de Pauli y el hamiltoniano esta expresado en bloques de 2x2
- entonces podemos expresar al espinor en términos de dos vectores de dos componentes

$$u = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4 \longrightarrow \begin{bmatrix} mc^2 \mathbb{1}^{2 \times 2} & c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -mc^2 \mathbb{1}^{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix}$$

# Soluciones de la Ec. de Dirac (p≠0)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\Psi &= E\Psi \\ (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2) u e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} &= E u e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \longrightarrow c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 = \begin{bmatrix} mc^2 \mathbb{1}^{2 \times 2} & c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -mc^2 \mathbb{1}^{2 \times 2} \end{bmatrix} \in 4 \times 4 \end{aligned}$$

- donde  $\sigma$  son las matrices de Pauli y el hamiltoniano esta expresado en bloques de 2x2
- entonces podemos expresar al espinor en términos de dos vectores de dos componentes

$$u = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4 \longrightarrow \begin{bmatrix} mc^2 \mathbb{1}^{2 \times 2} & c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -mc^2 \mathbb{1}^{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix}$$

- operando e invirtiendo siempre y cuando no se anulen los denominadores:

$$\begin{cases} mc^2 u_A + c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_B = E u_A \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_A - mc^2 u_B = E u_B \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_A = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - mc^2} u_B \\ u_B = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2} u_A \end{cases}$$

# Soluciones de la Ec. de Dirac (p≠0)

$$\mathcal{H}\Psi = E\Psi$$

$$(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2) u e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} = E u e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \longrightarrow c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 = \begin{bmatrix} mc^2 \mathbb{1}^{2 \times 2} & c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -mc^2 \mathbb{1}^{2 \times 2} \end{bmatrix} \in 4 \times 4$$

- donde  $\sigma$  son las matrices de Pauli y el hamiltoniano esta expresado en bloques de 2x2
- entonces podemos expresar al espinor en términos de dos vectores de dos componentes

$$u = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4 \longrightarrow \begin{bmatrix} mc^2 \mathbb{1}^{2 \times 2} & c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -mc^2 \mathbb{1}^{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix}$$

- operando e invirtiendo siempre y cuando no se anulen los denominadores:

$$\begin{cases} mc^2 u_A + c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_B = E u_A \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} u_A - mc^2 u_B = E u_B \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_A = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - mc^2} u_B & \text{OK si } E < 0 \text{ (} E > 0 \text{ y } p=0 \Rightarrow \text{diverge)} \\ u_B = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2} u_A & \text{OK si } E > 0 \end{cases}$$

# Soluciones de la Ec. de Dirac ( $p \neq 0$ )

- Podemos despejar una solución en función de la otra:

$$u_A = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - mc^2} \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2} u_A$$

- Aca viene bien la siguiente identidad (¡verificar!):

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

- Y entonces  $u_A = \frac{c^2 p^2}{E^2 - m^2 c^4} u_A$  que se satisface si  $\frac{c^2 p^2}{E^2 - m^2 c^4} = 1$  o sea,

si vale la relatividad especial

# Soluciones de la Ec. de Dirac ( $p \neq 0$ )

- Podemos despejar una solución en función de la otra:

$$u_A = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - mc^2} \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2} u_A$$

- Aca viene bien la siguiente identidad (¡verificar!):

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

- Y entonces  $u_A = \frac{c^2 p^2}{E^2 - m^2 c^4} u_A$  que se satisface si  $\frac{c^2 p^2}{E^2 - m^2 c^4} = 1$  o sea,

si vale la relatividad especial

- Es decir, no hay restricciones sobre quién es el vector de dos componentes  $u_A$  (de manera análoga, lo mismo para  $u_B$ )

$$\begin{cases} u_A \in \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ u_B \in \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{cases} \quad |u_A\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |u_B\rangle = \frac{c \hat{\sigma} \hat{p}}{E + mc^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\psi_1(x, t)\rangle = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c \hat{\sigma} \hat{p}}{E + mc^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i \frac{p_\mu x^\mu}{\hbar}}$$

# Soluciones de la Ec. de Dirac (p≠0)

- Entonces las soluciones de la ec. de Dirac en el caso general (p≠0) son:

$$\begin{aligned}
 |u_A\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow |u_B\rangle = \frac{c \hat{\sigma} \hat{p}}{E + mc^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\psi_1(x, t)\rangle = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c \hat{\sigma} \hat{p}}{E + mc^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i \frac{p_\mu x^\mu}{\hbar}} \\
 |u_A\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\Rightarrow |u_B\rangle = \frac{c \hat{\sigma} \hat{p}}{E + mc^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\psi_2(x, t)\rangle = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c \hat{\sigma} \hat{p}}{E + mc^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i \frac{p_\mu x^\mu}{\hbar}} \\
 |u_B\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow |u_A\rangle = \frac{c \hat{\sigma} \hat{p}}{E - mc^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\psi_3(x, t)\rangle = N \begin{pmatrix} \frac{c \hat{\sigma} \hat{p}}{E - mc^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i \frac{p_\mu x^\mu}{\hbar}} \\
 |u_B\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\Rightarrow |u_A\rangle = \frac{c \hat{\sigma} \hat{p}}{E - mc^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\psi_4(x, t)\rangle = N \begin{pmatrix} \frac{c \hat{\sigma} \hat{p}}{E - mc^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i \frac{p_\mu x^\mu}{\hbar}}
 \end{aligned}$$

} Soluciones con E>0  
  
} Soluciones con E<0

# Propiedades de estas soluciones

- Es interesante observar que para, por ejemplo,  $E > 0$ , las componentes 1 y 2 son de orden 1 mientras que las 3 y 4 son de orden  $v/c$ 
  - Supongamos una partícula con impulso en la dirección “z”

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} mv$$

- Si consideramos el límite no relativista  $v \ll c$ , es decir  $E \sim mc^2$  entonces

$$\frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ es de orden } v/c$$

- Y lo mismo para las componentes 1 y 2 en el caso  $E < 0$



# Propiedades de estas soluciones

- Es interesante observar que para, por ejemplo,  $E > 0$ , las componentes 1 y 2 son de orden 1 mientras que las 3 y 4 son de orden  $v/c$ 
  - Supongamos una partícula con impulso en la dirección “z”

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} mv$$

- Si consideramos el límite no relativista  $v \ll c$ , es decir  $E \sim mc^2$  entonces

$$\frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ es de orden } v/c$$

- Y lo mismo para las componentes 1 y 2 en el caso  $E < 0$
- Para una solución con  $E > 0$  no demasiado relativista solo importan las componentes 1 y 2 (para  $E < 0$ , las 3 y 4)
  - Las soluciones con  $E > 0$  y  $E < 0$  están desacopladas en este límite
  - Una partícula de Dirac no relativista es como una de Schrödinger con un espinor de dos componentes

# Propiedades de estas soluciones

- **La otra observación importante tiene que ver con el C.C.O.C**
  - H y p no son un conjunto completo de observables ya que las soluciones están degeneradas
  - Para romper esa degeneración necesitamos una variable dinámica adicional
  - Para  $p=0$  un buen candidato para distinguir entre las soluciones 1 y 2 (3 y 4) es:

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \Sigma_3 \Psi^{(1)} = \Psi^{(1)} \\ \Sigma_3 \Psi^{(2)} = -\Psi^{(2)} \end{cases} \quad \begin{cases} \Sigma_3 \Psi^{(3)} = \Psi^{(3)} \\ \Sigma_3 \Psi^{(4)} = -\Psi^{(4)} \end{cases}$$

# Propiedades de estas soluciones

- **La otra observación importante tiene que ver con el C.C.O.C**
  - H y p no son un conjunto completo de observables ya que las soluciones están degeneradas
  - Para romper esa degeneración necesitamos una variable dinámica adicional
  - Para  $p=0$  un buen candidato para distinguir entre las soluciones 1 y 2 (3 y 4) es:

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \Sigma_3 \Psi^{(1)} = \Psi^{(1)} \\ \Sigma_3 \Psi^{(2)} = -\Psi^{(2)} \end{cases} \quad \begin{cases} \Sigma_3 \Psi^{(3)} = \Psi^{(3)} \\ \Sigma_3 \Psi^{(4)} = -\Psi^{(4)} \end{cases}$$

- Pero no funciona para  $p \neq 0$
- Además  $[H, \Sigma_i] \neq 0$  y  $\Sigma_i$  no es una constante de movimiento

$$\frac{d\Sigma}{dt} = -2 \frac{c}{h} (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p})$$

# Propiedades de estas soluciones

- **La otra observación importante tiene que ver con el C.C.O.C**
  - H y p no son un conjunto completo de observables ya que las soluciones están degeneradas
  - Para romper esa degeneración necesitamos una variable dinámica adicional
  - Para  $p=0$  un buen candidato para distinguir entre las soluciones 1 y 2 (3 y 4) es:

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \Sigma_3 \Psi^{(1)} = \Psi^{(1)} \\ \Sigma_3 \Psi^{(2)} = -\Psi^{(2)} \end{cases} \quad \begin{cases} \Sigma_3 \Psi^{(3)} = \Psi^{(3)} \\ \Sigma_3 \Psi^{(4)} = -\Psi^{(4)} \end{cases}$$

- Pero no funciona para  $p \neq 0$
- Además  $[H, \Sigma_i] \neq 0$  y  $\Sigma_i$  no es una constante de movimiento

$$\frac{d\Sigma}{dt} = -2 \frac{c}{h} (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p})$$

- Sin embargo, si tomamos el producto escalar con  $\hat{\mathbf{p}}$

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{p}}} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \quad \begin{aligned} [\mathcal{H}, \Sigma_{\hat{\mathbf{p}}}] &= \frac{d\Sigma_{\hat{\mathbf{p}}}}{dt} \\ -\frac{2c}{\hbar} \underbrace{(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{p}}}_{\equiv 0} &= \\ 0 &= \end{aligned}$$

# Helicidad

- **Es decir que  $\Sigma_{\hat{p}}$  es una cantidad conservada / constante de movimiento para una partícula libre**
  - Si el espinor de dos componentes representa el espín, esto vendría a ser la proyección del espín en la dirección de movimiento (“**helicidad**”)
- **Hay varias maneras de convencerse que los espinores representan el espín de una partícula**
  - Notar que el impulso angular orbital no es una cantidad conservada (muestren que  $[H, L] \neq 0$ )
  - Sorprendente porque estamos hablando de una partícula libre
  - Pero definiendo  $J = L + \Sigma$  entonces  $[\mathcal{H}, J] = 0$  es decir que  $\Sigma$  es un momento angular intrínseco que se suma al impulso angular orbital
  - Otro argumento convincente es re-derivar el hamiltoniano de Schrödinger-Pauli

# Hamiltoniano de Schrödinger-Pauli

- En Mecánica Cuántica no-relativista la interacción de un fermión (espín  $1/2$ ) con el campo electromagnético se describe con la ecuación de S-P

$$\mathcal{H}_{\text{SP}} = \frac{1}{2m} \left( \left[ \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{q}{c} \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] - q\phi \right)$$

- donde la interacción magnética de un fermión es  $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ , entonces  $\boldsymbol{\mu} = g \frac{q\hbar}{2mc} \mathbf{S}$
  - clásicamente  $g=1$  para “una partícula que gira”
  - experimentalmente ¡ $g=2$ ! En aquel momento esto no se entendió y se agregó el factor 2 faltante “a mano”
- Vamos a re-derivar este hamiltoniano pero partiendo de la ecuación de Dirac y tomando el límite no relativista
    - **Spoiler:** vamos a ver que  $g=2$  surge espontáneamente en este caso ¡y se debe al espín!

# $H_{S-P}$ a partir de la ec. de Dirac

- Ya vieron que para describir la interacción de una partícula con el campo electromagnético hay que sustituir:

– entonces:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \quad E \rightarrow E - q\varphi$$

# $H_{S-P}$ a partir de la ec. de Dirac

- Ya vieron que para describir la interacción de una partícula con el campo electromagnético hay que sustituir:

– entonces:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \quad E \rightarrow E - q\varphi$$

$$\mathcal{H}_D = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D &= c\boldsymbol{\alpha} \cdot \underbrace{\left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)}_{\substack{\text{def} \\ = \boldsymbol{\pi}}} + \beta mc^2 \\ &= c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi} + \beta mc^2 \end{aligned}$$



# $H_{S-P}$ a partir de la ec. de Dirac

- Ya vieron que para describir la interacción de una partícula con el campo electromagnético hay que sustituir:

– entonces:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \quad E \rightarrow E - q\phi$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D &= c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 & \mathcal{H}_D &= c\boldsymbol{\alpha} \cdot \underbrace{\left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)}_{\substack{\text{def} \\ = \boldsymbol{\pi}}} + \beta mc^2 \\ & & &= c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi} + \beta mc^2 \end{aligned}$$

– aplicamos este  $H_D$  a un espinor de 4 componentes  $\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{bmatrix}$

$$(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi} + \beta mc^2) \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{bmatrix} = (\varepsilon_{NR} + mc^2 - q\phi) \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{bmatrix}$$

Separamos la parte no-relativista de E

# $H_{S-P}$ a partir de la ec. de Dirac

- reemplazando a y b y reordenando un poco:

$$\left( c \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mc^2 \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -mc^2 \mathbf{1} \end{bmatrix} + q\phi \right) \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{bmatrix} = (\varepsilon_{NR} + mc^2) \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{bmatrix}$$

- desarrollando ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \Psi_B + \cancel{mc^2} \Psi_A + q\phi \Psi_A = (\varepsilon_{NR} + \cancel{mc^2}) \Psi_A \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \Psi_A - mc^2 \Psi_B + q\phi \Psi_B = (\varepsilon_{NR} + mc^2) \Psi_B \end{cases}$$

# $H_{S-P}$ a partir de la ec. de Dirac

- reemplazando a y b y reordenando un poco:

$$\left( c \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mc^2 \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -mc^2 \mathbf{1} \end{bmatrix} + q\phi \right) \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{bmatrix} = (\varepsilon_{NR} + mc^2) \begin{bmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{bmatrix}$$

- desarrollando ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \Psi_B + \cancel{mc^2} \Psi_A + q\phi \Psi_A = (\varepsilon_{NR} + \cancel{mc^2}) \Psi_A \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \Psi_A - mc^2 \Psi_B + q\phi \Psi_B = (\varepsilon_{NR} + mc^2) \Psi_B \end{cases}$$

- despejamos cada espinor:

$$\begin{cases} \Psi_A = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{\varepsilon_{NR} - q\phi} \Psi_B \\ \Psi_B = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}}{\varepsilon_{NR} + 2mc^2 - q\phi} \Psi_A \end{cases}$$

- En particular:

$$\Psi_A = \frac{c^2 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi})}{(\varepsilon_{NR} - q\phi) (\varepsilon_{NR} + 2mc^2 - q\phi)} \Psi_A$$

# $H_{S-P}$ a partir de la ec. de Dirac

– Usando la identidad que vimos hace un rato ( $(\sigma \cdot A)(\sigma \cdot B) = A \cdot B + i(A \times B) \cdot \sigma$ ):

$$\Psi_A = \frac{c^2 (\sigma \cdot \pi) (\sigma \cdot \pi)}{(\varepsilon_{NR} - q\phi) (\varepsilon_{NR} + 2mc^2 - q\phi)} \Psi_A \quad \rightarrow \quad \Psi_A = \frac{c^2 (\pi^2 + i\sigma \cdot (\pi \times \pi))}{(\varepsilon_{NR} - q\phi) (\varepsilon_{NR} + 2mc^2 - q\phi)} \Psi_A$$

# $H_{S-P}$ a partir de la ec. de Dirac

- Usando la identidad que vimos hace un rato ( $(\sigma \cdot A)(\sigma \cdot B) = A \cdot B + i(A \times B) \cdot \sigma$ ):

$$\Psi_A = \frac{c^2 (\sigma \cdot \pi) (\sigma \cdot \pi)}{(\varepsilon_{NR} - q\phi) (\varepsilon_{NR} + 2mc^2 - q\phi)} \Psi_A \quad \rightarrow \quad \Psi_A = \frac{c^2 (\pi^2 + i\sigma \cdot (\pi \times \pi))}{(\varepsilon_{NR} - q\phi) (\varepsilon_{NR} + 2mc^2 - q\phi)} \Psi_A$$

- Veamos que es :

$$\begin{aligned} \pi \times \pi &= \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \times \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \\ &= \underline{\mathbf{p}} \times \underline{\mathbf{p}} + \frac{q^2}{c^2} \mathbf{A} \times \mathbf{A} - \frac{q}{c} \underline{\mathbf{p}} \times \mathbf{A} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \times \underline{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

recordemos que “p” es un operador!

# $H_{S-P}$ a partir de la ec. de Dirac

- Usando la identidad que vimos hace un rato ( $(\sigma \cdot A)(\sigma \cdot B) = A \cdot B + i(A \times B) \cdot \sigma$ ):

$$\Psi_A = \frac{c^2 (\sigma \cdot \pi) (\sigma \cdot \pi)}{(\varepsilon_{NR} - q\phi) (\varepsilon_{NR} + 2mc^2 - q\phi)} \Psi_A \quad \rightarrow \quad \Psi_A = \frac{c^2 (\pi^2 + i\sigma \cdot (\pi \times \pi))}{(\varepsilon_{NR} - q\phi) (\varepsilon_{NR} + 2mc^2 - q\phi)} \Psi_A$$

- Veamos que es :

$$\begin{aligned} \pi \times \pi &= \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \times \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \\ &= \underline{\mathbf{p}} \times \underline{\mathbf{p}} + \frac{q^2}{c^2} \mathbf{A} \times \mathbf{A} - \frac{q}{c} \underline{\mathbf{p}} \times \mathbf{A} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \times \underline{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

recordemos que “p” es un operador!

- Entonces:

$$\begin{aligned} (\underline{\pi} \times \underline{\pi}) |\Psi\rangle &\sim \frac{i\hbar q}{c} (\nabla \times (\mathbf{A}\Psi) + \mathbf{A} \times \nabla \Psi) \\ &= \frac{i\hbar q}{c} \underbrace{(\nabla \times \mathbf{A})}_{\equiv \mathbf{B}} \Psi \\ &= \frac{i\hbar q}{c} \mathbf{B} \Psi \end{aligned}$$

# $H_{S-P}$ a partir de la ec. de Dirac

– Volviendo entonces a la ec.  $\Psi_A = \frac{c^2(\boldsymbol{\pi}^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}))}{(\varepsilon_{NR} - q\phi)(\varepsilon_{NR} + 2mc^2 - q\phi)} \Psi_A$  llegamos a:

$$\Psi_A = \frac{c^2 \left[ \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{q}{c} \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right]}{(\varepsilon_{NR} - q\phi)(\varepsilon_{NR} + 2mc^2 - q\phi)} \Psi_A$$

# $H_{S-P}$ a partir de la ec. de Dirac

- Volviendo entonces a la ec.  $\Psi_A = \frac{c^2(\boldsymbol{\pi}^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}))}{(\varepsilon_{NR} - q\phi)(\varepsilon_{NR} + 2mc^2 - q\phi)} \Psi_A$  llegamos a:

$$\Psi_A = \frac{c^2 \left[ \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{q}{c} \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right]}{(\varepsilon_{NR} - q\phi)(\varepsilon_{NR} + 2mc^2 - q\phi)} \Psi_A$$

- Ahora tomamos el límite no-relativista:  $\varepsilon_{NR} \ll mc^2$  y  $q\phi \ll mc^2$

$$\psi_A (\varepsilon_{NR} - q\phi) 2m \cancel{c^2} = \cancel{c^2} \left[ \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{q}{c} \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \Psi_A$$



# $H_{S-P}$ a partir de la ec. de Dirac

- Volviendo entonces a la ec.  $\Psi_A = \frac{c^2(\boldsymbol{\pi}^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\pi}))}{(\varepsilon_{NR} - q\phi)(\varepsilon_{NR} + 2mc^2 - q\phi)} \Psi_A$  llegamos a:

$$\Psi_A = \frac{c^2 \left[ \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{q}{c} \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right]}{(\varepsilon_{NR} - q\phi)(\varepsilon_{NR} + 2mc^2 - q\phi)} \Psi_A$$

- Ahora tomamos el límite no-relativista:  $\varepsilon_{NR} \ll mc^2$  y  $q\phi \ll mc^2$

$$\psi_A (\varepsilon_{NR} - q\phi) 2m \cancel{c^2} = \cancel{c^2} \left[ \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{q}{c} \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \Psi_A$$

- O bien:

$$\varepsilon_{NR} \Psi_A = \left[ \frac{\left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2}{2m} - \frac{q}{2mc} \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + q\phi \right] \Psi_A = \mathcal{H}_{SP} \Psi_A$$

# Factor giromagnético

- Tomando el límite no-relativista a la ec. de Dirac para una partícula en presencia de un campo E-M obtuvimos el Hamiltoniano de S-P ¡pero con el factor 2 correcto!
  - El término de interacción con el campo magnético resulta entonces

$$\frac{q}{2mc} \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \longrightarrow \boldsymbol{\mu} = \frac{q\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} = \frac{q}{mc} \mathbf{S}$$

- Es decir que obtuvimos **g=2** ( $\mathbf{S}=\hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ ):

# Factor giromagnético

- Tomando el límite no-relativista a la ec. de Dirac para una partícula en presencia de un campo E-M obtuvimos el Hamiltoniano de S-P ¡pero con el factor 2 correcto!

– El término de interacción con el campo magnético resulta entonces

$$\frac{q}{2mc} \hbar \sigma \cdot B = \mu \cdot B \longrightarrow \mu = \frac{q \hbar}{2mc} \sigma = \frac{q}{mc} S$$

– Es decir que obtuvimos  $g=2$  ( $S=\hbar\sigma/2$ ):

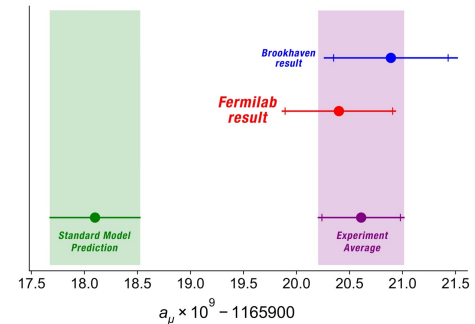
- En realidad  $g$  (del muón) no es 2 sino 2.00232 debido a la “polarización del vacío” (veremos luego)

$$\frac{g-2}{2} = 0.00116592061(41)$$

experimental

$$\frac{g-2}{2} = 0.00116591810(43)$$

teórico



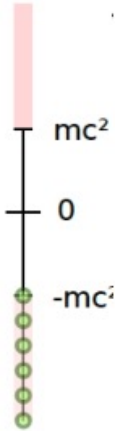
# 28/04: Fenomenología de la ec. de Dirac

# Repaso de la clase pasada

- **Encontramos las soluciones de la ecuación de Dirac para una partícula libre**
  - El caso en reposo es inmediato y nos da 4 soluciones linealmente independientes con degeneración  $E>0$  y  $E<0$
  - El caso  $p\neq 0$  es más interesante aunque también nos dio 4 soluciones con la misma degeneración
  - Las soluciones generales son tales que en el límite no-relativista se desacoplan las soluciones con  $E>0$  de las de  $E<0$  y el resultado es análogo al de Schrödinger pero con soluciones que se parecen mucho al espín
  - Vimos que la Helicidad (proyección del espín en la dirección de movimiento) es un operador que completa el C.C.O.C.
- **Finalmente re-obtuvimos un resultado no relativista para la interacción de un fermión con el campo electromagnético (Hamiltoniano de Schrödinger-Pauli)**
  - El hamiltoniano de Sch-P se puede obtener del de Dirac en el límite no-relativista pero con el agregado que obtuvimos también el factor giromagnético correcto ( $g=2$ )
- **Hoy vamos a ver que es el “mar de Dirac” y un ejemplo de la fenomenología de la ecuación de Dirac**

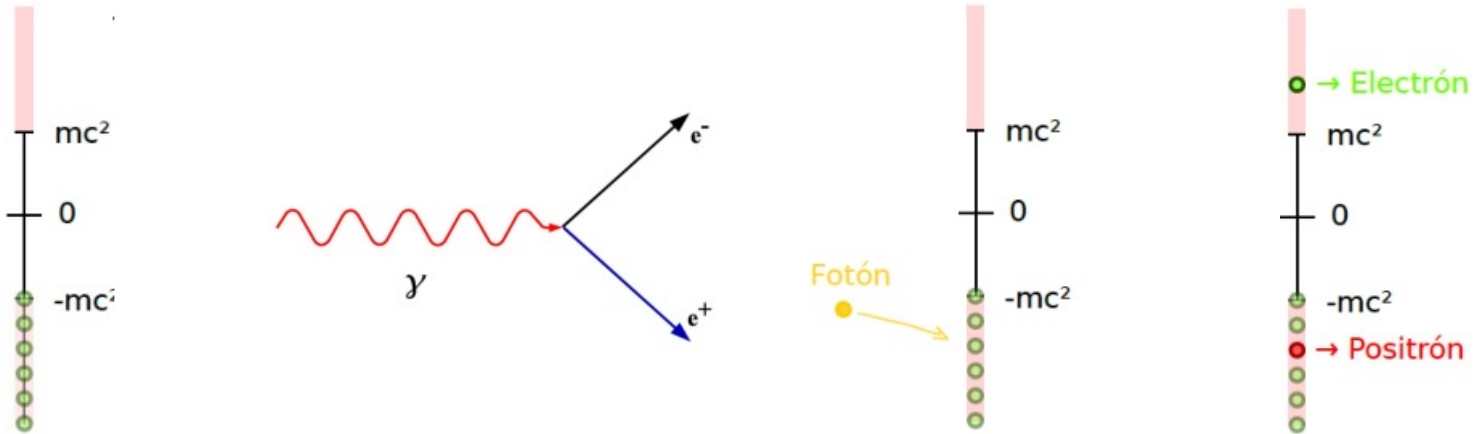
# El mar de Dirac

- Cuando Dirac propuso su ecuación en 1927, la idea de asociar las soluciones  $E < 0$  a antipartículas no había madurado
  - De hecho, el positrón se descubrió en 1931
- Dirac propuso la idea del “mar de Dirac” para lidiar con las soluciones de  $E < 0$ 
  - La idea es suponer que todos los estados con  $E < 0$  están ocupados
  - El principio de exclusión previene que otras partículas decaigan a estos estados



# El mar de Dirac

- Cuando Dirac propuso su ecuación en 1927, la idea de asociar las soluciones  $E < 0$  a antipartículas no había madurado
  - De hecho, el positrón se descubrió en 1931
- Dirac propuso la idea del “mar de Dirac” para lidiar con las soluciones de  $E < 0$ 
  - La idea es suponer que todos los estados con  $E < 0$  están ocupados
  - El principio de exclusión previene que otras partículas decaigan a estos estados



- La “ausencia” de carga negativa / spin-up / “etc” se ve como carga positiva / spin-down / “anti-etc”

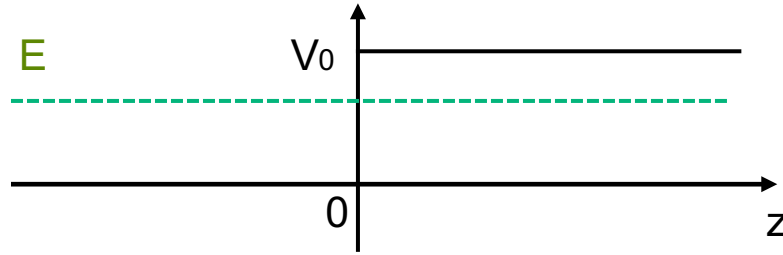
# Dirac en el caso relativista

- **La clase pasada analizamos el problema de una partícula interactuando con el campo E-M**
  - Pero lo vimos en el límite no-relativista, donde las soluciones con  $E>0$  y  $E<0$  se desacoplan
- **Hoy vamos a discutir la situación opuesta: cuando las componentes “ $v/c$ ” no son tan chicas**
  - Las soluciones  $E>0$  y  $E<0$  participan de la dinámica del problema
  - Es decir, problemas donde necesariamente uno debe admitir la presencia de antipartículas interactuando con partículas “ordinarias”
- **Vamos a considerar un simple e inocente escalón de potencial**
  - Veamos el caso en el que un flujo de electrones con  $E>0$  bien “sanos” incide sobre el escalón
  - En Mecánica Clásica las partículas no pueden atravesar el escalón y “rebotan”
  - En Cuántica no-relativista una parte rebota y otra penetra con soluciones exponenciales reales (efecto túnel)
  - ¿Y en Cuántica Relativista?



# Escalón de potencial

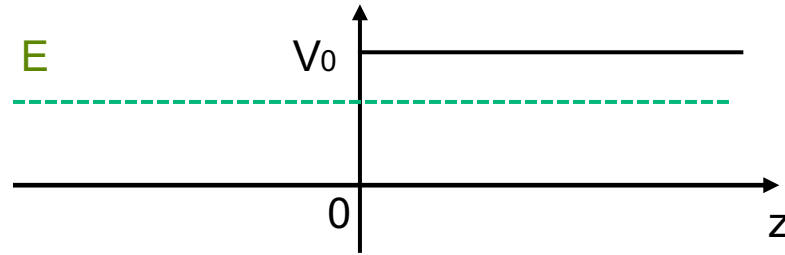
- Consideremos un escalón de potencial en una dimensión



$$\Psi_{\text{con espín } \uparrow} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+mc^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}p^\mu x_\mu}$$

# Escalón de potencial

- Consideremos un escalón de potencial en una dimensión



$$\Psi_{\text{con espín } \uparrow} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+mc^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} p^\mu x_\mu}$$

- Planteamos una solución incidente que se propaga hacia la derecha con:

- impulso “k”  $\mathbf{p}_{\text{en } z < 0} = k\hat{z}$
- espín up
- en el estado estacionario (nos “olvidamos” de “t”)
- en unidades naturales (c=h=1)

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} k = k$$

- Recordar que en el proceso real usamos un paquete de ondas y las probabilidades de Transmisión y Reflexión del paquete son iguales a la solución con E fijo

$$\psi_{\text{incidente}}(z) = e^{ikz} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Escalón de potencial

- Para la onda reflejada también tendremos soluciones de partícula libre viajando en  $-z$  (con el mismo impulso “ $k$ ”)

$$\psi_{\text{reflejada}}(z) = \underbrace{ae^{-ikz} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \\ E+m \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Espín } \uparrow} + \underbrace{be^{-ikz} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ k \\ E+m \end{bmatrix}}_{\text{Espín } \downarrow}$$

# Escalón de potencial

- Para la onda reflejada también tendremos soluciones de partícula libre viajando en  $-z$  (con el mismo impulso “ $k$ ”)

$$\psi_{\text{reflejada}}(z) = \underbrace{ae^{-ikz} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-k}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Espín } \uparrow} + \underbrace{be^{-ikz} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \end{bmatrix}}_{\text{Espín } \downarrow}$$

- Para la onda transmitida el impulso “ $q$ ” que satisfaga la relación relativista en la región donde se prende el potencial “ $V$ ”

$$q = \sqrt{(E - V)^2 - m^2}$$

- En este caso, una partícula moviéndose hacia la derecha tendrá  $p_{\text{en } z>0} = q\hat{z}$

$$\psi_{\text{transmitido}}(z) = \underbrace{ce^{iqz} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{q}{E-V+m} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Espín } \uparrow} + \underbrace{de^{iqz} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{q}{E-V+m} \end{bmatrix}}_{\text{Espín } \downarrow}$$

# Escalón de potencial

- La función de onda será entonces  $\Psi(z) = \begin{cases} \psi_{\text{incidente}}(z) + \psi_{\text{reflejada}}(z) & \text{Para } z < 0 \\ \psi_{\text{transmitida}}(z) & \text{Para } z > 0 \end{cases}$

- Dado que la corriente de Dirac (función de la  $\psi$ ) se conserva, la función de onda debe ser continua en “z”

- En particular, para  $z=0$ : 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-k}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{q}{E-V+m} \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{q}{E-V+m} \end{bmatrix}$$

# Escalón de potencial

- La función de onda será entonces  $\Psi(z) = \begin{cases} \psi_{\text{incidente}}(z) + \psi_{\text{reflejada}}(z) & \text{Para } z < 0 \\ \psi_{\text{transmitida}}(z) & \text{Para } z > 0 \end{cases}$

- Dado que la corriente de Dirac (función de la  $\psi$ ) se conserva, la función de onda debe ser continua en “z”

- En particular, para  $z=0$ : 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-k}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{q}{E-V+m} \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{q}{E-V+m} \end{bmatrix}$$

- O bien:

$$\begin{cases} 1 + a = c \\ b = d \\ \frac{k}{E+m} (1 - a) = c \frac{q}{E - V + m} \\ b \frac{k}{E+m} = -d \frac{q}{E - V + m} \end{cases}$$

# Escalón de potencial

- La función de onda será entonces  $\Psi(z) = \begin{cases} \psi_{\text{incidente}}(z) + \psi_{\text{reflejada}}(z) & \text{Para } z < 0 \\ \psi_{\text{transmitida}}(z) & \text{Para } z > 0 \end{cases}$

- Dado que la corriente de Dirac (función de la  $\psi$ ) se conserva, la función de onda debe ser continua en “z”

- En particular, para  $z=0$ : 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-k}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{q}{E-V+m} \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{q}{E-V+m} \end{bmatrix}$$

- O bien:

$$\begin{cases} 1 + a = c \\ b = d \\ \frac{k}{E+m} (1 - a) = c \frac{q}{E - V + m} \longrightarrow (1 - a) = c \cdot r & r \equiv \frac{q(E+m)}{k(E-m)} \\ b \frac{k}{E+m} = -d \frac{q}{E - V + m} \longrightarrow \text{en la ecuación (2) (b=d)} \rightarrow b = d = 0 \end{cases}$$

# Escalón de potencial

- La función de onda será entonces  $\Psi(z) = \begin{cases} \psi_{\text{incidente}}(z) + \psi_{\text{reflejada}}(z) & \text{Para } z < 0 \\ \psi_{\text{transmitida}}(z) & \text{Para } z > 0 \end{cases}$

- Dado que la corriente de Dirac (función de la  $\psi$ ) se conserva, la función de onda debe ser continua en "z"

- En particular, para  $z=0$ : 
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-k}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{q}{E-V+m} \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{q}{E-V+m} \end{bmatrix}$$

- O bien:

$$\begin{cases} 1 + a = c \\ b = d \\ \frac{k}{E+m}(1-a) = c \frac{q}{E-V+m} \longrightarrow (1-a) = c.r \quad r \equiv \frac{q(E+m)}{k(E-m)} \\ b \frac{k}{E+m} = -d \frac{q}{E-V+m} \longrightarrow \text{en la ecuación (2) } (b=d) \rightarrow b = d = 0 \end{cases}$$



# Escalón de potencial

– Por si alguien quiere, la solución del sistema de ecuaciones anterior es:

$$a = -\frac{(m+E)q - km + (V-E)k}{(m+E)q + km + (E-V)k}$$

$$b = 0$$

$$c = \frac{2km + (2E - 2V)k}{(m+E)q + km + (E-V)k}$$

$$d = 0$$

# Escalón de potencial (corriente de Dirac)

- También podemos resolver este problema utilizando el hecho que la corriente de Dirac es una magnitud conservada

$$\mathbf{J} = \Psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \Psi \rightarrow \text{Corriente de Dirac}$$

$$\mathbf{J}_{\text{incidente}} = \mathbf{J}_{\text{transmitida}} + \mathbf{J}_{\text{reflejada}}$$

- En este caso nos interesa únicamente la componente “z” de la corriente

$$J = \Psi^\dagger \begin{bmatrix} & \sigma_z \\ \sigma_z & \end{bmatrix} \Psi$$

# Escalón de potencial (corriente de Dirac)

- También podemos resolver este problema utilizando el hecho que la corriente de Dirac es una magnitud conservada

$$\mathbf{J} = \Psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \Psi \rightarrow \text{Corriente de Dirac}$$

$$\mathbf{J}_{\text{incidente}} = \mathbf{J}_{\text{transmitida}} + \mathbf{J}_{\text{reflejada}}$$

- En este caso nos interesa únicamente la componente “z” de la corriente

$$\begin{aligned} J &= \Psi^\dagger \begin{bmatrix} & \sigma_z \\ \sigma_z & \end{bmatrix} \Psi & J_{\text{incidente}} &= \psi_{\text{incidente}}^\dagger \begin{bmatrix} & \sigma_z \\ \sigma_z & \end{bmatrix} \psi_{\text{incidente}} \\ & & &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{k}{E+m} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & \sigma_z \\ \sigma_z & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{bmatrix} \\ & & &= \frac{2k}{E+m} \end{aligned}$$

# Escalón de potencial (corriente de Dirac)

- Procediendo de manera análoga para las corrientes transmitida y reflejada:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{\text{incidente}} = \frac{2k}{E + m} \\ J_{\text{reflejada}} = \frac{2a^2k}{E + m} \\ J_{\text{transmitida}} = \frac{2c^2q}{E - V + m} \end{array} \right.$$

- Exigiendo que se conserve la corriente en  $z=0$ :

$$\frac{k}{E + m} = \frac{a^2k}{E + m} + \frac{c^2q}{E - V + m}$$

# Escalón de potencial (corriente de Dirac)

- Procediendo de manera análoga para las corrientes transmitida y reflejada:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{\text{incidente}} = \frac{2k}{E + m} \\ J_{\text{reflejada}} = \frac{2a^2k}{E + m} \\ J_{\text{transmitida}} = \frac{2c^2q}{E - V + m} \end{array} \right.$$

- Exigiendo que se conserve la corriente en  $z=0$ :

$$\frac{k}{E + m} = \frac{a^2k}{E + m} + \frac{c^2q}{E - V + m} \longrightarrow (1 - a^2) = \frac{(E+m)q}{(E-V+m)k} c^2 = c^2r$$

Igual que antes

# Escalón de potencial (corriente de Dirac)

- Podemos definir coeficientes de transmisión y reflexión como venimos haciendo desde Física 2

$$\begin{cases} T \equiv \frac{J_{\text{transmitida}}}{J_{\text{incidente}}} \\ R \equiv \frac{J_{\text{reflejada}}}{J_{\text{incidente}}} \end{cases}$$

- Reemplazando las expresiones que acabamos de encontrar y con un poco de álgebra

$$\begin{cases} T = \frac{4r}{(1+r)^2} \\ R = \frac{1-r^2}{1+r^2} \end{cases} \quad \text{con} \quad r = \frac{q}{k} \cdot \frac{E+m}{E-V+m}$$

# Escalón de potencial (corriente de Dirac)

- Podemos definir coeficientes de transmisión y reflexión como venimos haciendo desde Física 2

$$\begin{cases} T \equiv \frac{J_{\text{transmitida}}}{J_{\text{incidente}}} \\ R \equiv \frac{J_{\text{reflejada}}}{J_{\text{incidente}}} \end{cases}$$

- Reemplazando las expresiones que acabamos de encontrar y con un poco de álgebra

$$\begin{cases} T = \frac{4r}{(1+r)^2} \\ R = \frac{1-r^2}{1+r^2} \end{cases} \quad \text{con} \quad r = \frac{q}{k} \cdot \frac{E+m}{E-V+m}$$

- Notar que

$$T + R \equiv 1$$

# Escalón de potencial

- **Vamos a analizar dos casos**
  - a)  $V < (E + m)$  “bajas energías”
  - b)  $V > (E + m)$  “altas energías”

$$\begin{cases} T = \frac{4r}{(1+r)^2} \\ R = \frac{1-r^2}{1+r^2} \end{cases}$$

$$q = \sqrt{(E - V)^2 - m^2}$$

$$r = \frac{q}{k} \cdot \frac{E + m}{E - V + m}$$



# Escalón de potencial

- **Vamos a analizar dos casos**

- a)  $V < (E + m)$  “bajas energías”
- b)  $V > (E + m)$  “altas energías”

$$\begin{cases} T = \frac{4r}{(1+r)^2} \\ R = \frac{1-r^2}{1+r^2} \end{cases}$$

$$q = \sqrt{(E - V)^2 - m^2}$$

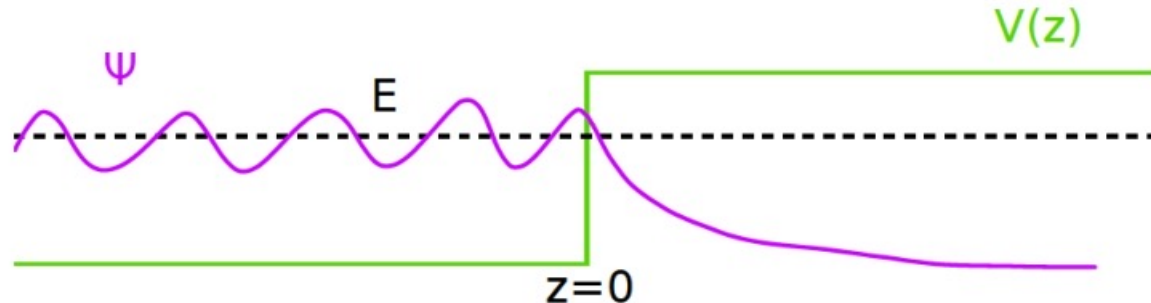
$$r = \frac{q}{k} \cdot \frac{E + m}{E - V + m}$$

- **$V < (E + m)$**

- En este caso  $r > 0$  que implica

$$\begin{cases} T > 0 \\ 0 < R < 1 \end{cases}$$

- Además  $q \in \mathbb{I}$ , es decir que la onda decae exponencialmente dentro de la barrera
- ¡Esto es lo que se obtiene en Mecánica Cuántica no-relativista!



# Escalón de potencial

- **Vamos a analizar dos casos**

- a)  $V < (E + m)$     “bajas energías”
- b)  $V > (E + m)$     “altas energías”

$$\begin{cases} T = \frac{4r}{(1+r)^2} \\ R = \frac{1-r^2}{1+r^2} \end{cases}$$

$$q = \sqrt{(E - V)^2 - m^2}$$

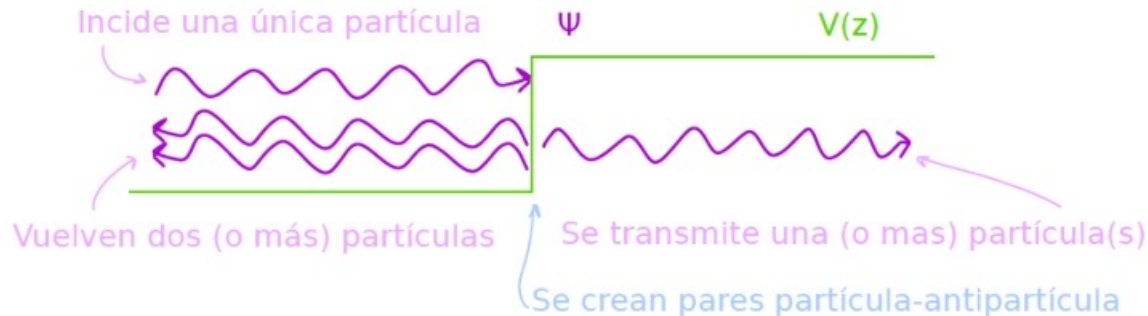
$$r = \frac{q}{k} \cdot \frac{E + m}{E - V + m}$$

- **$V > (E + m)$**

- En este caso

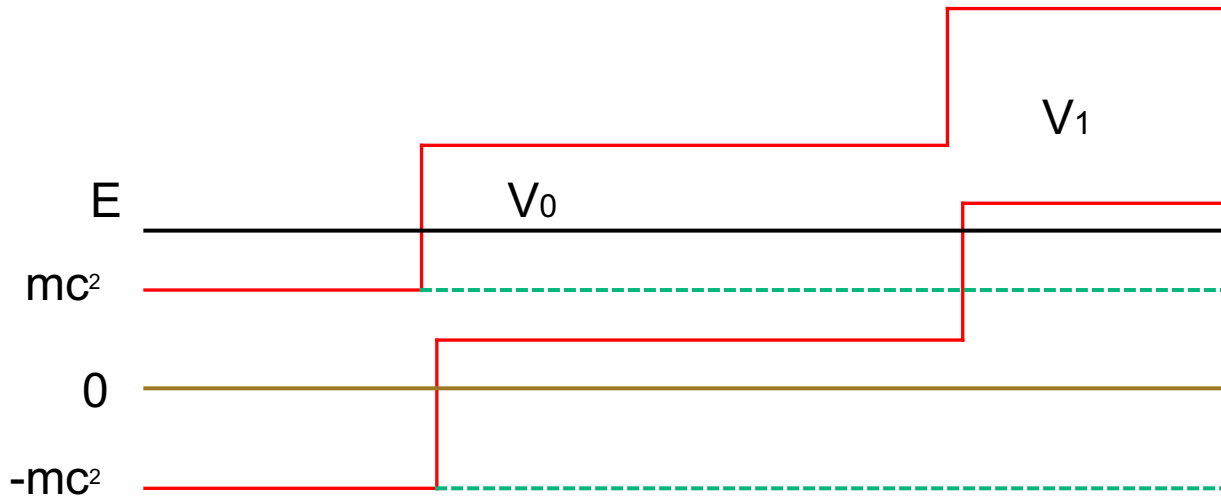
$$\begin{cases} R > 1 \\ T < 0 \end{cases} \quad !!!$$

- Además  $q \in \mathbb{R}$ , ¡es decir que existe una onda que oscila dentro de la barrera!



# Interpretación del caso $V > (E+m)$

- El resultado anterior nos sugiere que si la interacción es suficientemente fuerte, se reflejan más electrones de los que inciden y que además hay soluciones oscilatorias dentro de la barrera (con energía negativa: anti-partículas)
- En la interfase se crean pares, los electrones se suman a los reflejados aumentando la corriente, los positrones viajan libres dentro de la barrera



- No toda la energía  $E$  es impulso, solo  $E - mc^2$
- Cuando enciendo la barrera solo puedo usar la energía que está por encima de  $mc^2$  para cruzarla
- Con  $V_0$  alcanza para confinar
- Pero me corre el valor efectivo del umbral de masas
- Para  $V_1 \gg V_0$  la energía formalmente positiva es la de la rama de antipartículas

## 03/05: Covariancia de la ec. de Dirac

# Repaso de la clase anterior

- **La clase pasada vimos dos aspectos de la física que uno observa a “altas energías” a través de la ecuación de Dirac**
  - El “mar de Dirac”: antes del descubrimiento de las antipartículas, Dirac propuso una interpretación para las soluciones con energía negativa en donde todos esos estados estaban ocupados
  - Si sobre ese “vacío” actuase, por ejemplo, un fotón suficientemente energético ( $E > mc^2$ ) un electrón puede ser promovido a un estado de  $E > 0$  dejando un hueco con todos los números cuánticos invertidos (¡antipartícula!)
  - El otro caso que vimos es el de un electrón incidiendo sobre un escalón de potencial
  - La conservación de la corriente de Dirac es una herramienta técnica útil
  - Lo sorprendente del resultado es que el número de partículas no es necesariamente una cantidad conservada: a energías altas, pueden crearse pares partícula-antipartícula
- **Hoy vamos a discutir las propiedades de la ecuación de Dirac ante transformaciones de Lorentz**

# Qué es la covariancia?

- **Por covariancia nos referimos al hecho que así como uno puede escribir la ecuación de Dirac en un referencial, otra persona puede escribir la MISMA ecuación en otro referencial dado por una transformación de Lorentz**
  - Ambas soluciones reflejan la misma física, son equivalentes
  - Lo que uno sabe es cómo se transforman las coordenadas espacio-temporales de un referencial al otro
  - Si  $x^\mu$  representa un evento en un referencial S,  $x'^\mu$  representa el mismo punto en S' y la relación entre ambos viene dada por:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

- Donde en esta notación se entiende una suma sobre  $\nu$
- Escrito como suma no importa el orden donde si representamos a  $x^\mu$  como un vector columna de 4 filas,  $\Lambda^\mu{}_\nu$  se puede pensar como una matriz de 4x4 que nos da la transformación

# Transformaciones de Lorentz

- **Ustedes ya conocen el grupo de transformaciones de Lorentz**

- Por ejemplo, para un boost (pasar a un referencial que se mueve a velocidad constante respecto de otro), la  $\Lambda$  se escribe como

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \sim \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Boost en } \hat{x} \quad \beta = \frac{v}{c}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- El índice  $\mu$  sería la fila y  $\nu$  la columna
- Para una rotación simplemente se mezclan las componentes perpendiculares al eje de rotación (solo los elementos espaciales)
- Un vector o un campo vectorial  $V_i(x)$  ( $i=1,2,3$ ) ante una rotación transforma en  $V_i'(x') = R_{ij} \cdot V_j(x)$  con  $R_{ij}$  una matriz de  $3 \times 3$ . El argumento de  $V_i'$  lo escribimos en  $S'$  pero cada componente es el resultado de rotar con  $R$  las componentes de  $x$
- Del mismo modo un campo de 4 componentes  $A_{\mu}(x)$  se dice que es un vector si ante una transformación de Lorentz se transforma como un cuadrivector  $A_{\mu}' = \Lambda_{\mu\nu} \cdot A_{\nu}$

# Cómo transforma un espinor de Dirac?

- **Sabemos como transforman las coordenadas, pero como transforma un espinor?**
  - En general, en  $S'$  tendremos  $\Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x)$
  - Necesitamos saber quien es  $S(\Lambda)$  para obtener la misma física

$$\text{Ecuación de Dirac} \rightarrow \begin{cases} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0 & \rightarrow \text{en frame } \mathcal{S} \\ (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\Psi'(x') = 0 & \rightarrow \text{en frame } \mathcal{S}' \end{cases}$$

- Las  $\gamma_\mu$  son matrices constantes!



# Cómo transforma un espinor de Dirac?

- **Sabemos como transforman las coordenadas, pero como transforma un espinor?**
  - En general, en  $S'$  tendremos  $\Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x)$
  - Necesitamos saber quien es  $S(\Lambda)$  para obtener la misma física

$$\text{Ecuación de Dirac} \rightarrow \begin{cases} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0 & \rightarrow \text{en frame } \mathcal{S} \\ (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\Psi'(x') = 0 & \rightarrow \text{en frame } \mathcal{S}' \end{cases}$$

- Las  $\gamma_\mu$  son matrices constantes!

- Observamos que:

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ \text{Chain rule} \rightarrow &= \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \\ x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \rightarrow &= \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \end{aligned}$$

$$\partial_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu \rightarrow \text{Transforma como un cuadvivector}$$

# Quién es $S(\Lambda)$ ?

– Reemplazamos en la ecuación para el sistema S:

$$\begin{cases} \partial_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu \\ \Psi(x) = S^{-1} \Psi'(x') \end{cases}$$

$$(i \overbrace{\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu}^{\partial_\mu} - m) \overbrace{S^{-1} \Psi'(x')}^{\Psi(x)} = 0$$

$$(i S \gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1} \partial'_\nu - m) \Psi'(x') = 0$$

← multiplicamos por S a izquierda

# Quién es $S(\Lambda)$ ?

- Reemplazamos en la ecuación para el sistema S: 
$$\begin{cases} \partial_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu \\ \Psi(x) = S^{-1} \Psi'(x') \end{cases}$$

$$(i \overbrace{\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu}^{\partial_\mu} - m) \overbrace{S^{-1} \Psi'(x')}^{\Psi(x)} = 0$$

$$(i S \gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1} \partial'_\nu - m) \Psi'(x') = 0 \quad \leftarrow \text{multiplicamos por S a izquierda}$$

- Comparando con la segunda ecuación del slide anterior (para  $S'$   $(i \gamma^\mu \partial'_\mu - m) \Psi'(x') = 0$ ):

$$i \underbrace{[S \gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu S^{-1} - \gamma^\mu]}_{=0} \partial'_\nu \Psi'(x') = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1} \gamma^\nu S}$$

# Quién es $S(\Lambda)$ ?

- **Encontramos la relación que debe satisfacer  $S(\Lambda)$  para que la ec. de Dirac sea covariante**

$$\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1} \gamma^\nu S$$

- Ojo, las matrices  $\gamma_\mu$  son las mismas en todos los sistemas de referencia
- La matriz  $\gamma_i$  que se contrae con  $p_i$  en un referencial tiene una relación con  $p_i'$  en el otro
- **Pero como es la expresión concreta de  $S(\Lambda)$  para una transformación de Lorentz?**
  - Una forma de encontrar estas expresiones es considerar una T. de L. infinitesimal e integrar una transformación finita (ver cualquier libro de teoría de campos)
  - Otra forma más instructiva es usar lo que sabemos de las soluciones de la ec. de Dirac

# $S(\Lambda)$ para una rotación

- **Si  $\Lambda$  fuera una rotación:**

- La  $S(\Lambda)$  asociada no va a depender del espinor en particular que consideremos
- Podemos entonces considerar una solución para  $p=0$ , o sea un espín  $1/2$
- Sabemos como rota un espín:

$$\exp\left(-i\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta}}{2}\right)$$

- Entonces, para una rotación en “z” podemos proponer  $S = \exp\left(-\frac{i}{2}\Sigma_3\theta\right)$  con  $\Sigma_3 = \begin{bmatrix} \sigma_3 & \\ & \sigma_3 \end{bmatrix}$

- Que podemos escribir como

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{i}{2}\theta\Sigma_3\right)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{i}{2}\theta\right)^k \begin{bmatrix} \sigma_3^k & \\ & \sigma_3^k \end{bmatrix} \\ &\quad \vdots \quad \text{Usamos que } \sigma_3^k = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{si } k \text{ es par} \\ \sigma_3 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases} \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbb{1} - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Sigma_3 \end{aligned}$$

# $S(\Lambda)$ para una rotación

– Notar que  $\Sigma_3 = i\gamma_1\gamma_2$  y entonces  $S(\text{rotación en } \theta\hat{z}) = \exp(\gamma_1\gamma_2\theta)$

– Y podemos generalizar a:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mu\nu} &= \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\ &= \frac{i}{2} (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) \\ &= \begin{cases} i\gamma_\mu\gamma_\nu & \text{para } \mu \neq \nu \\ \text{otra cosa} & \text{para } \mu = \nu \end{cases}\end{aligned}$$

# $S(\Lambda)$ para un boost

- Un boost es, a fin de cuentas, otra rotación en el espacio de Minkowsky

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & -\sin \theta & \\ & \sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{bmatrix} x \quad \text{Para una rotación} \\ x' = \begin{bmatrix} \cosh \omega & -\sinh \omega & & \\ -\sinh \omega & \cosh \omega & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} x \quad \text{Para un boost} \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \begin{cases} \cosh \omega = \gamma \\ \sinh \omega = \beta \gamma \\ \tanh \omega = \beta \end{cases}$$

- Y entonces proponemos para un boost:

$$S(\Lambda = \text{boost en } \hat{x}) = \exp\left(-i\Sigma_{01}\frac{\omega}{2}\right)$$

# Están bien estas $S(\Lambda)$ ?

- **Tenemos propuestas de  $S(\Lambda)$  para rotaciones y boosts**
  - Tenemos que chequear que efectivamente satisfacen la definición de  $S(\Lambda)$
  - Es inmediato verificar que  $S^{-1}$  se obtiene cambiando  $\theta \rightarrow -\theta$  o  $\omega \rightarrow -\omega$

$$\begin{aligned} [S^{-1}S]_{\text{Rotación en } \hat{z}} &= \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \gamma^1\gamma^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \gamma^1\gamma^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \\ &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \gamma^1\gamma^2\gamma^1\gamma^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\mathbb{1}\eta^{\mu\nu} \Rightarrow \gamma^1\gamma^2 = -\gamma^2\gamma^1 \rightarrow = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$(\gamma^\mu)^2 = \mathbb{1}\eta^{\mu\mu} \rightarrow = \mathbb{1}$$



# Están bien estas $S(\Lambda)$ ?

- Acabamos de mostrar que para una rotación  $[S^{-1}S]_{\text{Rotación en } \hat{z}} = \mathbb{1}$
- De manera análoga pueden mostrar lo mismo para un boost
- Ahora tenemos que verificar que  $\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1} \gamma^\nu S$
- Vamos a verlo para una rotación (ustedes demuéstrenlo para un boost)

$$\Lambda^\mu{}_\nu \sim \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & -\sin \theta & \\ & \sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad S = e^{-i \frac{\theta \Sigma_3}{2}}$$

# Están bien estas $S(\Lambda)$ ?

- Tenemos entonces 4 ecuaciones  $\nu \in \{0, 1, 2, 3\}$
- Para  $\nu = 0, 3$  la relación  $\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1} \gamma^\nu S$  se satisface trivialmente

- El miembro de la izquierda es:  $\Lambda^{0,3}{}_\mu \gamma^\mu = \gamma^{0,3}$

- Y el miembro de la derecha es:

$$\begin{aligned} S^{-1} \gamma^{0,3} S &= \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \gamma^1 \gamma^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \gamma^{0,3} \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \gamma^1 \gamma^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \rightarrow &= \underbrace{\gamma^{0,3} \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \gamma^1 \gamma^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)}_{S^{-1}} \underbrace{\left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \gamma^1 \gamma^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)}_S \\ &= \gamma^{0,3} \end{aligned}$$

- OK para  $\nu = 0, 3$ , veamos que pasa para  $\nu = 1, 2$

# Están bien estas $S(\Lambda)$ !

- comencemos con  $v = 1$ , para el miembro de la izquierda:

$$\Lambda^1{}_{\mu}\gamma^{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \gamma^3 \end{bmatrix} = \gamma^1 \cos\theta - \gamma^2 \sin\theta$$

- Y para el miembro de la derecha:

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^1 S &= \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \gamma^1\gamma^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \gamma^1 \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \gamma^1\gamma^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \\ &\vdots \text{ Usamos las propiedades de las } \gamma^{\mu} \\ &= \gamma^1 (\cos\theta + \gamma^1\gamma^2 \sin\theta) \end{aligned}$$

- Y recordando que  $(\gamma^1)^2 = -1$  se satisface la igualdad
- ¡O sea que estaba bien la propuesta de  $S(\Lambda)$  para una rotación! (Probar lo mismo para un boost)

# Algunas propiedades útiles

- **Encontramos entonces la  $S(\Lambda)$  que transforma la  $\psi$**

- **Vamos a probar algunas relaciones útiles**

$$S = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \gamma^1 \gamma^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \longrightarrow S^\dagger = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \gamma^2 \gamma^1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$S^\dagger = \gamma^0 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^2 \gamma^1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \gamma^0 = \gamma^0 [\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \gamma^1 \gamma^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)] \gamma^0$$
$$S^\dagger = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0$$

- **Otra, recordemos que  $\bar{\Psi} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi^\dagger \gamma^0$  entonces:**

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}' &= (\Psi')^\dagger \gamma^0 \\ &= (S\Psi)^\dagger \gamma^0 \\ &= \Psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 \\ S^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1} \rightarrow &= \underbrace{\Psi^\dagger \gamma^0}_{\bar{\Psi}} S^{-1} \end{aligned}$$
$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi} S^{-1}$$

# La corriente de Dirac

- Veamos que la corriente de Dirac  $J^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$  es un cuadrivector:

$$\begin{aligned}
 J'^\mu &= \bar{\Psi}'\gamma^\mu\Psi' \\
 \left. \begin{aligned} \bar{\Psi}' &= \bar{\Psi}S^{-1} \\ \Psi' &= S\Psi \end{aligned} \right\} \rightarrow &= \bar{\Psi}S^{-1}\gamma^\mu S\Psi \\
 \text{Usar definición de } S \rightarrow &= \bar{\Psi}\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\Psi
 \end{aligned}$$

- Es decir que  $J'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu J^\nu$  ¡transforma como un cuadrivector!

- Es más, la componente cero de esta corriente, ¿qué es?  $\bar{\Psi}'\Psi' = \bar{\Psi}S^{-1}S\Psi = \bar{\Psi}\Psi$

$$\bar{\Psi}\Psi = \underbrace{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2}_{\# \text{ de partículas}} + \underbrace{|\psi_3|^2 + |\psi_4|^2}_{\# \text{ de antipartículas}}$$

↑  
¡Es invariante de Lorentz!

# Transformaciones de paridad

- Una transformación de paridad invierte las coordenadas espaciales

$$[\Lambda^\mu{}_\nu]_{\text{parity transformation}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

- Entonces  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  es tal que  $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$
- Reemplazando L en la definición de la S:  $S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$

Para una transf. de paridad  $\rightarrow \begin{cases} S^{-1}\gamma^i S = -\gamma^i & \rightarrow \text{Componentes espaciales} \\ S^{-1}\gamma^0 S = \gamma^0 & \rightarrow \text{Componente temporal} \end{cases}$

- Es decir

$$\begin{cases} [S, \gamma^i] = 0 \\ \{S, \gamma^0\} = 0 \end{cases} \longrightarrow [S]_{\text{parity transformation}} = \gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

# 05/05: Helicidad y Quiralidad

# Repaso de la clase anterior

- En la última clase discutimos la covarianza de la ecuación de Dirac y sus soluciones
  - La ecuación de Dirac es invariante ante transformaciones de Lorentz dadas por  $\Lambda_{\mu\nu}$
  - Ante estas transformaciones los espinores transforman según  $\psi' = S(\Lambda) \psi$
  - Para que esto ocurra,  $S(\Lambda)$  debe satisfacer la siguiente relación

$$\Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu = S^{-1} \gamma^\nu S$$

- Aprovechando lo que sabemos de las soluciones de la ecuación de Dirac, encontramos candidatos para  $S(\Lambda)$  en el caso que  $\Lambda_{\mu\nu}$  correspondiera a una rotación o un boost
- Verificamos que estas  $S(\Lambda)$  efectivamente satisfacen los requisitos necesarios para que la ecuación de Dirac sea invariante ante transformaciones de Lorentz
- Vimos también algunas relaciones útiles utilizando  $S(\Lambda)$  que permitieron demostrar que la corriente de Dirac  $J_\mu$  es efectivamente un cuadvivector
- Y que la componente "0" de esta cuadviv corriente es un invariante de Lorentz asociado a la conservación de la diferencia entre el número de partículas y anti-partículas
- Encontramos que la  $S(\Lambda)$  para una transformación de paridad es simplemente la  $\gamma^0$



# Quién es el operador velocidad?

- **Cómo calculamos la velocidad?**

$$\dot{x}_k = \frac{i}{\hbar} [H, x_k] = \frac{ic}{\hbar} [\alpha_j p_j, x_k] = c\alpha_k \longleftarrow [p, x] = -i\hbar$$

# Quién es el operador velocidad?

## • Cómo calculamos la velocidad?

$$\dot{x}_k = \frac{i}{\hbar} [H, x_k] = \frac{ic}{\hbar} [\alpha_j p_j, x_k] = c\alpha_k \longleftarrow [p, x] = -i\hbar$$

- Es decir que  $\alpha_k$  mide la velocidad de una partícula libre en unidades de  $c$
- $\alpha_k$  tiene autovalores  $\pm 1$  para una partícula sin masa
- Por otro lado  $\alpha_k$  y  $\alpha_j$  no conmutan, es decir que no podemos determinar simultáneamente dos componentes de la velocidad ( $\dot{x}$ ?)
- Es sencillo demostrar que las soluciones de partícula libre son autoestados de  $p$  pero no de  $\alpha$
- De hecho  $[H, \alpha] \neq 0$  si  $m \neq 0$
- Es decir que para partículas masivas no hay autofunciones simultáneas de  $E$  y  $\alpha$
- $\alpha$  es la velocidad y no es constante de movimiento para una partícula libre ( $\dot{x}$ !?)
- Para los curiosos, a esto se lo llama “*zitterbewegung*” (fluctuaciones alrededor de la trayectoria clásica de una partícula)

# Zitterbewegung

- Calculemos ahora quién es la aceleración

$$\hbar \frac{\partial \hat{\alpha}_k}{\partial t}(t) = i \left[ \hat{H}, \hat{\alpha}_k \right] = 2i\hat{p}_k - 2i\hat{\alpha}_k \hat{H}$$

- La aceleración de una partícula libre es no nula...
- Como  $H$  y  $p$  son constantes de movimiento podemos integrar en  $t$

$$\alpha_k(t) = (\alpha_k(0) - cp_k H^{-1}) e^{-\frac{2iHt}{\hbar}} + cp_k H^{-1}$$

# Zitterbewegung

- Calculemos ahora quién es la aceleración

$$\hbar \frac{\partial \hat{\alpha}_k}{\partial t}(t) = i \left[ \hat{H}, \hat{\alpha}_k \right] = 2i\hat{p}_k - 2i\hat{\alpha}_k \hat{H}$$

- La aceleración de una partícula libre es no nula...
- Como  $H$  y  $p$  son constantes de movimiento podemos integrar en  $t$

$$\alpha_k(t) = (\alpha_k(0) - cp_k H^{-1}) e^{-\frac{2iHt}{\hbar}} + cp_k H^{-1}$$

- El último termino es lo que uno hubiera esperado ( $cp/E = v$ ) pero el segundo nos dice que la velocidad fluctúa, tanto más cuanto mayor es la energía
- Si volvemos a integrar en el tiempo:

$$x_k(t) = x_k(0) + c^2 p_k H^{-1} t + \frac{1}{2} i \hbar c H^{-1} (\alpha_k(0) - cp_k H^{-1}) \left( e^{-\frac{2iHt}{\hbar}} - 1 \right)$$

- Los primeros dos términos son la trayectoria clásica pero el tercero expresa oscilaciones rápidas alrededor de la trayectoria (de frecuencia  $\hbar/mc \sim 4 \times 10^{-11} \text{m}$ , ¡para un partícula libre!
- Esto tiene consecuencias medibles (término de Darwin del potencial efectivo en el hidrógeno)

# Dinámica de partículas no masivas

- **Todo lo que vinimos discutiendo de la ecuación de Dirac lo hicimos en caso general de una partícula masiva**
  - Justamente, por ser el caso general, basta tomar el límite  $m \rightarrow 0$  y ver que ocurre para partículas sin masa como los neutrinos
  - Vamos a ver que el resultado es bastante sorprendente
- **Una partícula sin masa es algo especial**
  - El operador velocidad ( $\alpha$ ) conmuta con  $H$  para el caso  $m=0$
  - Toda su energía es impulso y su velocidad es “ $c$ ”
  - $m=0 \Rightarrow v=c$  en cualquier sistema de referencia (no hay boost que la lleve al reposo)
- **Para ver las propiedades de partículas no masivas podemos tomar límites pero es más sencillo empezar de nuevo**
  - Los fermiones no masivos son los neutrinos (o casi...)

# Dinámica de partículas no masivas

- **La ecuación de Dirac en el caso general**  $\mathcal{H}_{\text{Dirac}} = c\alpha \cdot p + \beta mc^2$ 
  - Notamos que  $\alpha$  y  $\beta$  debían ser hermíticas, de cuadrado =1 y que anti-conmutaran
  - Para eso había que ir a buscar matrices de dimensión 4
- **La ecuación de Dirac en el caso  $m=0$**   $\mathcal{H}_{\text{Dirac}} = c\alpha \cdot p$ 
  - Pero si  $m$  hubiera sido 0 no habríamos necesitado  $\beta$  y alcanzaría solo con dimensión 2
  - Es decir, para  $m=0$  las matrices  $\alpha$  podrían ser las de Pauli ya que anticonmutan y son hermíticas
  - Más aun, podríamos haber elegido  $\alpha_i = \sigma_i$  o  $\alpha_i = -\sigma_i$  y las soluciones hubieran sido espinores de dos componentes  $\chi(p)$  y  $\phi(p)$  que satisfacen

$$E \cdot \chi = -\sigma \cdot p \cdot \chi \qquad E \cdot \phi = \sigma \cdot p \cdot \phi$$

- Ambas posibilidades conducen a  $E^2=p^2$  y cada una tiene soluciones  $E>0$  y  $E<0$
- Los dos juegos de soluciones quedan ahora en subespacios disjuntos

# Dinámica de partículas no masivas

- **Entonces tenemos dos opciones para asociar a una partícula no masiva**
  - Esto genera un dilema ya que la elección implica violar la simetría de paridad  $x \rightarrow -x$
  - Supongamos una partícula (neutrino) con  $E=|p|>0$  y elegimos la primera de las ecuaciones

$$E \cdot \chi = -\sigma \cdot p \cdot \chi \quad \Rightarrow \quad \chi = -\frac{\sigma \cdot p}{|p|} \cdot \chi$$

- Esto sería el operador helicidad en dos componentes
- Con esta elección el neutrino tendría helicidad negativa siempre

# Dinámica de partículas no masivas

- **Entonces tenemos dos opciones para asociar a una partícula no masiva**
  - Esto genera un dilema ya que la elección implica violar la simetría de paridad  $x \rightarrow -x$
  - Supongamos una partícula (neutrino) con  $E=|p|>0$  y elegimos la primera de las ecuaciones

$$E \cdot \chi = -\sigma \cdot p \cdot \chi \quad \Rightarrow \quad \chi = -\frac{\sigma \cdot p}{|p|} \cdot \chi$$

- Esto sería el operador helicidad en dos componentes
- Con esta elección el neutrino tendría helicidad negativa siempre
- En cambio, con la solución de energía negativa (e impulso  $-p$ , que corresponde a un anti-neutrino con impulso  $+p$ ) sería

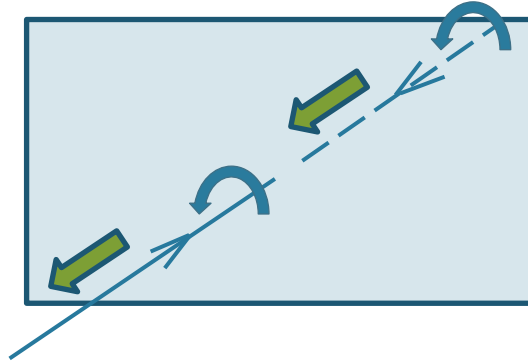
$$-|E| \cdot \chi = -\sigma \cdot (-p) \cdot \chi \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{\sigma \cdot (-p)}{|p|} \cdot \chi$$

- o sea, con helicidad positiva
- Es decir que con una elección, los neutrinos tendrían helicidad negativa ( $\equiv$  “left”) mientras que los antineutrinos tendrían helicidad positiva ( $\equiv$  “right”)
- Con la otra elección ( $\phi$ ) llegamos a la conclusión opuesta



# “El Espejo”

- Imaginemos una partícula “left” (elegimos la solución  $\chi$ ) avanzando hacia un espejo (el espín lo representamos como un giro anti-horario)



- En la imagen especular la partícula se acerca hacia nosotros con el espín en la misma dirección (la reflexión es espacial), o sea que la partícula en la imagen sería “right”
  - O sea que la imagen especular corresponde a una partícula descrita por la otra ecuación ( $\phi$ )
  - Es decir, en el espejo veríamos cosas que no suceden
  - O sea que ¡se viola paridad!
- **La evidencia experimental es que sólo existen neutrinos left**
    - Más adelante vamos a ver en detalle que las interacciones débiles violan paridad

# Quiralidad

- Podemos definir un nuevo operador llamado quiralidad

$$\gamma^5 \equiv i \cdot \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1^{2 \times 2} \\ 1^{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}$$

- Con las siguientes propiedades

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad \gamma^5 \dagger = \gamma^5 \quad (\gamma^5)^2 = 1^{4 \times 4}$$

- Este operador conmuta con el hamiltoniano en el caso  $m=0$

$$H = \alpha \cdot p = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot p \\ \sigma \cdot p & 0 \end{pmatrix} \quad H\gamma^5 = \gamma^5 H = \begin{pmatrix} \sigma \cdot p & 0 \\ 0 & \sigma \cdot p \end{pmatrix} = \Sigma \cdot p$$

- Como conmuta con  $H$ ,  $\gamma^5$  es una constante de movimiento y sobre autoestados de energía corresponde al operador helicidad

$$\gamma^5 \psi = \gamma^5 \frac{H}{E} \psi = \pm \frac{\Sigma \cdot p}{|E|} \psi = \pm \psi$$

# Quiralidades left y right

- Podemos construir proyectores sobre subespacios de quiralidad positiva y negativa

$$\hat{P}_{RIGHT} = \hat{P}_R = \frac{\hat{I}_4 + \hat{\gamma}^5}{2} \quad \hat{P}_{LEFT} = \hat{P}_L = \frac{\hat{I}_4 - \hat{\gamma}^5}{2}$$

- Que cumplen las propiedades necesarias para ser proyectores

$$\hat{P}_R^2 = \hat{P}_R \quad , \quad \hat{P}_L^2 = \hat{P}_L \quad , \quad \hat{P}_R \hat{P}_L = 0 \quad , \quad \hat{P}_R + \hat{P}_L = \hat{I}_4$$

# Helicidad $\rightleftharpoons$ Quiralidad

- **En el caso de partículas masivas  $\gamma^5$  no conmuta con el hamiltoniano y no coincide con la helicidad**
  - Sin embargo si la partícula es muy energética (límite ultra-relativista) la masa se hace despreciable y entonces Helicidad y Quiralidad tienden a ser lo mismo
  - Es decir, partículas muy energéticas (autoestado de Helicidad) tienden a ser estados de Quiralidad
  - Los electrones en un acelerador ultra-relativista tienen el espín prácticamente orientado en la dirección de movimiento
- **¿Porqué el énfasis en la Quiralidad?**
  - Todas las interacciones conocidas (EM, débil, fuerte) conservan la Quiralidad y esto permite medir distintos observables

# Quiralidad de una partícula de Dirac

- Cualquier estado de una partícula de Dirac puede descomponerse en sus componentes de Quiralidad

$$|\psi\rangle_R = \hat{P}_R |\psi\rangle = \frac{\hat{I}_4 + \hat{\gamma}^5}{2} |\psi\rangle \quad , \quad |\psi\rangle_L = \hat{P}_L |\psi\rangle = \frac{\hat{I}_4 - \hat{\gamma}^5}{2} |\psi\rangle$$

- Y lo mismo con la corriente asociada

$$\begin{aligned} |\bar{\psi}\rangle_L &= {}_L\langle\psi|\hat{\gamma}^0 = \langle\psi|\left(\frac{\hat{I}_4 - \hat{\gamma}^5}{2}\right)^\dagger \hat{\gamma}^0 = \langle\psi|\frac{\hat{I}_4 - \hat{\gamma}^5}{2} \hat{\gamma}^0 \\ &= \langle\psi|\frac{\hat{\gamma}^0 + \hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^5}{2} = \langle\psi|\hat{\gamma}^0 \frac{\hat{I}_4 + \hat{\gamma}^5}{2} = |\bar{\psi}\rangle \hat{P}_R \end{aligned}$$

$$j^\mu = |\bar{\psi}\rangle \hat{\gamma}^\mu |\psi\rangle = (|\bar{\psi}\rangle_R + |\bar{\psi}\rangle_L) \hat{\gamma}^\mu (|\psi\rangle_R + |\psi\rangle_L) = |\bar{\psi}\rangle_R \hat{\gamma}^\mu |\psi\rangle_R + |\bar{\psi}\rangle_L \hat{\gamma}^\mu |\psi\rangle_L$$

$$|\bar{\psi}\rangle_L \hat{\gamma}^\mu |\psi\rangle_R = |\bar{\psi}\rangle \hat{P}_R \hat{\gamma}^\mu \hat{P}_R |\psi\rangle = |\bar{\psi}\rangle \hat{P}_R \hat{P}_L \hat{\gamma}^\mu |\psi\rangle = |\bar{\psi}\rangle 0 \hat{\gamma}^\mu |\psi\rangle = 0$$

$$|\bar{\psi}\rangle_R \hat{\gamma}^\mu |\psi\rangle_L = |\bar{\psi}\rangle \hat{P}_L \hat{\gamma}^\mu \hat{P}_L |\psi\rangle = |\bar{\psi}\rangle \hat{P}_L \hat{P}_R \hat{\gamma}^\mu |\psi\rangle = |\bar{\psi}\rangle 0 \hat{\gamma}^\mu |\psi\rangle = 0$$

# Quiralidad de una partícula de Dirac

- Vamos a ver (más adelante) que la interacción electromagnética esta descrita por una amplitud dada por

$$\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} \longrightarrow J^{\mu}A_{\mu}$$

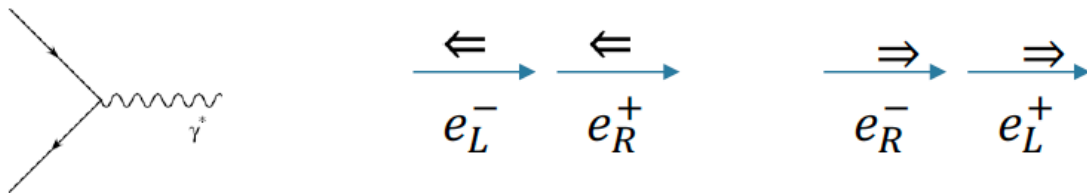
- Donde  $A_{\mu}$  es un campo que tiene su propia dinámica (es el fotón!) pero que ahora tomamos como un campo externo
- Lo importante es que la estructura de helicidad de la interacción EM esta en la  $J_{\mu}$
- En la  $J_{\mu}$ , además de las exponenciales están los espinores
- Si el producto de espinores se anula por algún motivo, entonces estos imponen restricciones debidas a la conservación de la Quiralidad

# Quiralidad de una partícula de Dirac

- Vamos a ver (más adelante) que la interacción electromagnética esta descrita por una amplitud dada por

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \longrightarrow J^\mu A_\mu$$

- Donde  $A_\mu$  es un campo que tiene su propia dinámica (es el fotón!) pero que ahora tomamos como un campo externo
- Lo importante es que la estructura de helicidad de la interacción EM esta en la  $J_\mu$
- En la  $J_\mu$ , además de las exponenciales están los espinores
- Si el producto de espinores se anula por algún motivo, entonces estos imponen restricciones debidas a la conservación de la Quiralidad
- **Por ejemplo:** un par partícula-antipartícula solo se podrán aniquilar si tienen quiralidades opuestas



- Es decir se aniquilan en estados con  $J_z = \pm 1$
- Quién se lleva este impulso angular?