Estructura de la Materia 4

- 22/03 Introducción
- 29/03 Fenomenología Nuclear
- 31/03 Isospín
- 05/04 Grupos de Simetría
- 07/04 Modelo de quarks
- 12/04 Modelo de quarks (2)
- 19/04 Mesones y Color
- 21/04 Cuántica Relativista
- 26/04 Soluciones de la Ec. de Dirac
- 28/04 Fenomenología de la Ec. de Dirac
- 03/05 Covariancia de la Ec. de Dirac
- 05/05 Helicidad y Quiralidad
- 17/05 Teoría Lagrangiana de Campos
- 19/05 Teorema de Noether y 2da cuantificación
- 24/05 Simetrías de Gauge
- 26/05 Gauge no abeliano
- 31/05 Cromodinámica Cuántica
- 02/06 Interacciones Débiles
- 07/06 Unificación Electro-débil
- 09/06 Ruptura Espontánea de la Simetría
- 14/06 Generación de masas en la teoría electro-débil
- 16/06 Oscilaciones de Neutrinos
- 21/06 Interacciones de partículas con la materia
- 23/06 Detectores y colisionadores
- 28/06 Descubrimiento del bosón de Higgs

Gustavo Otero y Garzón – UBA

17/05: Teoría Lagrangiana de Campos

Resumen de Cuántica Relativista

- **Antes de seguir adelante recapitulemos todo lo visto sobre cuántica relativista**
  - El modelo de quarks (MQ) indicaba que estas partículas son relativistas si uno considera el valor de sus masas en un hadrón
  - Para todo lo que fuera propiedades "estáticas" (espín, isospín, carga, etc) bastaba con el MQ que es una implementación de SU(3) de sabor por SU(2) de espín
  - Si queremos más detalle o describir cómo interactúan entre ellos necesitamos un formalismo relativista que implemente las interacciones EM, fuerte y débil
  - El primer intento de construir un formalismo cuántico-relativista fue la ecuación de Klein-Gordon (K-G)
  - K-G tiene soluciones de energía negativa que uno no puede descartar y una corriente conservada cuya componente "0" no es una densidad de probabilidad
  - Lo anterior se puede "salvar" reinterpretando la corriente como corriente eléctrica
  - Dirac construyó una ecuación (lineal en "p") que satisface la relación de dispersión relativista pero que tuviera una densidad de probabilidad (definida positiva)
  - El límite no relativista de la ecuación de Dirac recupera la ec. de Schrödinger
  - Pero no se salvó de las soluciones de energía negativa ni del entrelazamiento partícula-antipartícula

Resumen de Cuántica Relativista

- **Es interesante que la ec. de Dirac introduce naturalmente el espín como grado de libertad y explicaba el factor giromagnético apropiadamente**
- **También introducía la helicidad como constante de movimiento (quiralidad para partículas masivas)**
- **En el caso de los neutrinos (m=0), además de ir a v=c siempre eran "left", es decir que violan paridad**

Resumen de Cuántica Relativista

– Es interesante que la ec. de Dirac introduce naturalmente el espín como grado de libertad y explicaba el factor giromagnético apropiadamente
– También introducía la helicidad como constante de movimiento (quiralidad para partículas masivas)
– En el caso de los neutrinos (m=0), además de ir a v=c siempre eran “left”, es decir que violan paridad

– Pero siempre pensamos a la ψ como la función de onda de una partícula
– Y hasta en el problema más ingenuo nos damos cuenta que con la ec. de Dirac tenemos abierta la puerta a un número indefinido de partículas y anti-partículas excitadas del vacío

Resumen de Cuántica Relativista

- Es interesante que la ec. de Dirac introduce naturalmente el espín como grado de libertad y explicaba el factor giromagnético apropiadamente
- También introducía la helicidad como constante de movimiento (quiralidad para partículas masivas)
- En el caso de los neutrinos (m=0), además de ir a v=c siempre eran "left", es decir que violan paridad

- Pero siempre pensamos a la ψ como la función de onda de una partícula
- Y hasta en el problema más ingenuo nos damos cuenta que con la ec. de Dirac tenemos abierta la puerta a un número indefinido de partículas y anti-partículas excitadas del vacío

- Deberíamos fabricar un formalismo donde ψ describa los potencialmente infinitos grados de libertad que tiene un problema cuántico-relativista
- Este formalismo (Quantum Field Theory) tiene que recuperar, en algún límite, la descripción de una partícula libre de Dirac, en el límite no relativista a Schrödinger y en el límite clásico a Newton

$$\text{Newton} \xleftarrow{\text{límite clásico}} \text{Schrödinger} \xleftarrow{\text{No relativista}} \text{Dirac} \xleftarrow{\text{Bajas energías}} \text{QFT}$$

Formalismo Lagrangiano para medios contínuos

- **El formalismo que buscamos es bien conocido por ustedes**
  - **Para una partícula uno puede definir una función (lagrangiano) que depende de una variable generalizada (q) y su derivada temporal ($\dot{q}$) y del tiempo**

$$L\left(q,\dot{q},t\right)=T-V$$

Formalismo Lagrangiano para medios contínuos

- **El formalismo que buscamos es bien conocido por ustedes**
  - **Para una partícula uno puede definir una función (lagrangiano) que depende de una variable generalizada (q) y su derivada temporal ($\dot{q}$) y del tiempo**

$$L\left(q,\dot{q},t\right)=T-V$$

  - **Podemos definir un momento canónico conjugado y el hamiltoniano**

$$p\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\qquad\qquad\mathscr{H}=p\dot{q}-L$$

  - ***q* y *p* no necesitan ser posición e impulso sino cualquier par de variables canónicas que preservan los corchetes de Poisson**

$$\{q,p\}_{\mathrm{Poisson}}=1$$

  - **Y la evolución temporal de un observable viene dada por**

$$\frac{dg}{dt}=\{g,\mathscr{H}\}_{\mathrm{Poisson}}$$

Formalismo Lagrangiano para medios contínuos

– **Las ecuaciones de movimiento resultan de integrar las ecuaciones de Euler-Lagrange**

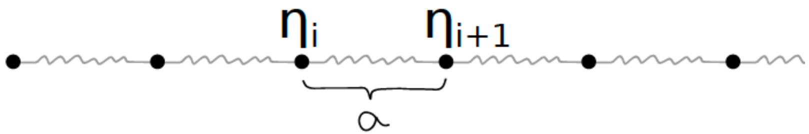
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Formalismo Lagrangiano para medios contínuos

– **Las ecuaciones de movimiento resultan de integrar las ecuaciones de Euler-Lagrange**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

– **El paso al continuo se puede hacer considerando N partículas unidas por resortes sobre una recta y espaciados una distancia “a”**



– **Donde η_i representa el desplazamiento de la partícula i-ésima respecto de su posición de equilibrio, el lagrangiano del sistema es la suma del de cada partícula**

$$L = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{m}{2}\dot{\eta}_i^2 - \frac{k}{2}\left(\eta_{i+1} - \eta_i\right)^2\right]$$

Formalismo Lagrangiano para medios contínuos

– **Multiplicando y dividiendo por *a*:**

$$L = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2}\mu\dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2}Y\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}\right)^2 \right] a$$

$$\begin{cases} \mu \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{m}{a} \\ Y \stackrel{\text{def}}{=} ka \quad \text{módulo de Young} \end{cases}$$

Formalismo Lagrangiano para medios contínuos

– **Multiplicando y dividiendo por *a*:**

$$L = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2} \mu \dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2} Y \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] a$$

$$\begin{cases} \mu \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{m}{a} \\ Y \stackrel{\text{def}}{=} ka \quad \text{módulo de Young} \end{cases}$$

– **Para pasar al continuo basta con tomar prolijamente el límite** $a \rightarrow dx$

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad \sum a f(a) \rightarrow \int dx \; f(x)$$

– **Es decir**

$$L = \frac{1}{2} \int dx \left[\mu \dot{\eta}^2 - Y \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]$$

– **Donde la variable dinámica es η(x,t) que es el campo de desplazamientos**

Formalismo Lagrangiano para medios contínuos

– **Esto nos permite definir una "densidad lagrangiana"**

$$\mathscr{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{Y}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \qquad L = \int \mathscr{L}\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial t}\right) dx$$

Formalismo Lagrangiano para medios contínuos

– **Esto nos permite definir una "densidad lagrangiana"**

$$\mathscr{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{Y}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 \qquad L = \int \mathscr{L}\left(\eta, \frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial\eta}{\partial t}\right) dx$$

– **Y por supuesto podemos definir un campo canónico conjugado**

$$\pi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\eta}} \qquad \pi = \mu\dot{\eta}$$ **en este caso**

– **Y una densidad Hamiltoniana**

$$\mathscr{H} \stackrel{\text{def}}{=} \pi\dot{\eta} - \mathscr{L}$$

Principio de minima acción

- El siguiente paso sería aplicarle el principio de mínima acción para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange (η → η + δη(x,t) fija en los extremos tal que la variación en la acción sea nula)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathscr{L} \to \text{Acción}$$

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\, dt \right] = 0$$

- Donde los extremos son fijos
- Es decir

$$\delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\, dt \right] = \int dt \int dx \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta} \delta\eta + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \right] = 0$$

Principio de minima acción

– **Integrando por partes**

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)} \delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) dx = \underbrace{\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)} \delta\eta\right]_{x_1}^{x_2}}_{\equiv 0 \text{ por definición}} - \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}\right) \delta\eta \\ \displaystyle\int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)} \delta\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) dt = \text{ lo mismo pero con } t \end{cases}$$

– **Nos queda (recordar que la variación en los extremos es nula)**

$$\delta\left[\int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\, dt\right] = \int dt \int dx \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta}\right] \delta\eta = 0$$

Principio de minima acción

- Como la variación entre los extremos es arbitraria el integrando debe ser nulo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta}=0$$

- En nuestro ejemplo:

$$\mathscr{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu}{2}\dot{\eta}^2-\frac{Y}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \longrightarrow -Y\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}=0$$

La ecuación de ondas que esperábamos

Principio de minima acción

– **Como la variación entre los extremos es arbitraria el integrando debe ser nulo:**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta}=0$$

– **En nuestro ejemplo:**

$$\mathscr{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu}{2}\dot{\eta}^2-\frac{Y}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \longrightarrow -Y\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}=0$$

La ecuación de ondas que esperábamos

– **Podemos generalizar a 3D**

$\phi(\boldsymbol{x},t) \rightarrow \text{Un campo}$ $\quad \mathscr{L}(\phi,\partial_\mu\phi,t)$ $\quad \partial_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$$\boxed{\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi}=0}$$

Algunos lagrangianos simpáticos

- **Consideremos el siguiente lagrangiano función de un campo escalar real ϕ(x,t)**

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2\right)$$

  - **Y determinemos la dinámica que describe calculando su ecuación de Euler-Lagrange**

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)}\right) &= \partial_\mu \left(\frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)}\left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi\right)\right) \\
&= \partial_\mu \frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \delta_{\mu\nu}\right)\right] \\
&= \partial_\mu \left[\frac{1}{2}\left(\partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi\right)\right] \\
&= \partial_\mu \partial^\mu \phi
\end{aligned}$$

Algunos lagrangianos simpáticos

- **Consideremos el siguiente lagrangiano función de un campo escalar real ϕ(x,t)**

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right)$$

  - **Y determinemos la dinámica que describe calculando su ecuación de Euler-Lagrange**

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} = 0$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\right) &= \partial_\mu\left(\frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right)\right)\\
&= \partial_\mu\frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\phi + \partial_\mu\phi\delta_{\mu\nu}\right)\right]\\
&= \partial_\mu\left[\frac{1}{2}\left(\partial^\mu\phi + \partial^\mu\phi\right)\right]\\
&= \partial_\mu\partial^\mu\phi
\end{aligned}$$

$$\left(\Box^2 + m^2\right)\phi = 0$$

¡K-G!

Algunos lagrangianos simpáticos

- El lagrangiano, en principio real, puede venir dado en términos de un campo complejo y su conjugado

$$\begin{cases} \phi = \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi^* = \phi_1 - i\phi_2 \end{cases}$$

- Que podemos expresar en términos de sus componentes reales

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi \phi^* \\ &= \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - m^2 \phi_1^2 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 \phi_2^2 \\ &= \mathscr{L}(\phi_1) + \mathscr{L}(\phi_2) \end{aligned}$$

- Equivalente a dos lagrangianos desacoplados como en el slide anterior

Otro lagrangiano simpático

– **El campo no solo no tiene porqué ser real sino que tampoco necesita ser escalar**
– **Puede, por ejemplo, ser espinorial**

$$\mathscr{L}\left(\overline{\Psi},\Psi\right)=\overline{\Psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\Psi$$

– **Donde ψ es una función de 4 componentes y** $\overline{\Psi}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\Psi^{\dagger}\gamma^{0}$

Otro lagrangiano simpático

- El campo no solo no tiene porqué sdr real sino que tampoco necesita ser escalar
- Puede, por ejemplo, ser espinorial

$$\mathscr{L}\left(\overline{\Psi},\Psi\right)=\overline{\Psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\Psi$$

- Donde ψ es una función de 4 componentes y $\overline{\Psi}\stackrel{\text{def}}{=}\Psi^{\dagger}\gamma^{0}$

- Podemos entonces tomar la ecuación de Euler-Lagrange para cada uno de estos campos

$$\partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\overline{\Psi}\right)}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\overline{\Psi}}=0\quad\Longleftrightarrow\quad\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\Psi=0$$

¡Dirac!

Otro lagrangiano más

– **Uno más:** $\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ **con** $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

– **En este caso veamos como obtener la ec. de movimiento minimizando la acción**

$$\delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_V \mathscr{L}\, d^3x\, dt\right) = 0 \longrightarrow \delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_V -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\; d^3x\, dt\right) = 0$$

$$\delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_V -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) d^3x\, dt\right) = 0 \longrightarrow \delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_V \left(-\frac{\partial^\mu A^\nu\, \partial_\mu A_\nu}{2} + \frac{\partial^\mu A^\nu\, \partial_\nu A_\mu}{2}\right) d^3x\, dt\right) = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V \left[\frac{\partial^\mu(\delta A^\nu)\, \partial_\mu A_\nu}{2} + \frac{\partial^\mu A^\nu\, \partial_\mu(\delta A_\nu)}{2} - \frac{\partial^\mu(\delta A^\nu)\, \partial_\nu A_\mu}{2} - \frac{\partial^\mu A^\nu\, \partial_\nu\left(\delta A_\mu\right)}{2}\right] d^3x\, dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V \left[\frac{\partial^\mu \partial_\mu\, A_\nu\, \delta A^\nu}{2} + \frac{\partial^\mu \partial_\mu\, A_\nu\, \delta A^\nu}{2} - \frac{\partial^\mu \partial_\nu\, A_\mu\, \delta A^\nu}{2} - \frac{\partial^\mu \partial_\nu\, A_\nu\, \delta A^\mu}{2}\right] d^3x\, dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V [\partial^\mu \partial_\mu\, A_\nu - \partial^\mu \partial_\nu\, A_\mu]\, \delta A^\nu\, d^3x\, dt = 0 \longrightarrow \partial^\mu\left(\partial_\mu\, A_\nu - \partial_\nu\, A_\mu\right) = 0$$

Otro lagrangiano más

- Uno más: $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ con $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

- En este caso veamos como obtener la ec. de movimiento minimizando la acción

$$\delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_V \mathcal{L}\, d^3x\, dt\right) = 0 \longrightarrow \delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_V -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\, d^3x\, dt\right) = 0$$

$$\delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_V -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) d^3x\, dt\right) = 0 \longrightarrow \delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_V \left(-\frac{\partial^\mu A^\nu\, \partial_\mu A_\nu}{2} + \frac{\partial^\mu A^\nu\, \partial_\nu A_\mu}{2}\right) d^3x\, dt\right) = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V \left[\frac{\partial^\mu(\delta A^\nu)\, \partial_\mu A_\nu}{2} + \frac{\partial^\mu A^\nu\, \partial_\mu(\delta A_\nu)}{2} - \frac{\partial^\mu(\delta A^\nu)\, \partial_\nu A_\mu}{2} - \frac{\partial^\mu A^\nu\, \partial_\nu\left(\delta A_\mu\right)}{2}\right] d^3x\, dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V \left[\frac{\partial^\mu \partial_\mu\, A_\nu\, \delta A^\nu}{2} + \frac{\partial^\mu \partial_\mu\, A_\nu\, \delta A^\nu}{2} - \frac{\partial^\mu \partial_\nu\, A_\mu\, \delta A^\nu}{2} - \frac{\partial^\mu \partial_\nu\, A_\nu\, \delta A^\mu}{2}\right] d^3x\, dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V [\partial^\mu \partial_\mu\, A_\nu - \partial^\mu \partial_\nu\, A_\mu]\, \delta A^\nu\, d^3x\, dt = 0 \longrightarrow \partial^\mu\left(\partial_\mu\, A_\nu - \partial_\nu\, A_\mu\right) = 0 \longrightarrow \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$$

¡Maxwell!

En resumen

- **Los dos ejemplos que vimos corresponden a Lagrangianos invariantes relativistas que dan ecuaciones explícitamente covariantes**
  - **¡Pero nadie dijo que están cuantizados!**
  - **Son campos clásicos en el sentido que no especificamos reglas de conmutación**
- **¿De dónde salió la cuántica relativista en este formalismo clásico?**
  - **Claramente la información está codificada en el lagrangiano original**
  - **Pero recuerden que el campo $\phi(x,t)$ es una entidad que permite albergar infinitos grados de libertad**
  - **Vamos a ver esto con más detalle la clase que viene**

19/05: Teorema de Noether y 2da cuantificación

Resumen de la clase pasada

- Vimos argumentos para desarrollar un formalismo que incluya a la cuántica y la relatividad especial pero donde la función de onda no es sólo la de una partícula
  - Necesitamos una cuántica-relativista que permita describir un sistema con, potencialmente, infinitos grados de libertad, ¡aunque se trate de UNA partícula!
  - Este formalismo debe recuperar la ecuación de Dirac para una partícula libre en algún límite
  - Vamos a ir construyendo una teoría cuántica de campos (Quantum Field Theory) que permita describir a las interacciones EM, fuerte y débil de manera consistente
  - ¡El grueso del formalismo ya lo conocen!
  - Repasamos el Lagrangiano de medios continuos y cómo se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange
  - Vimos tres lagrangianos particulares que en este formalismo (clásico) nos dieron las ecuaciones de Klein-Gordon, Dirac y Maxwell (¡¿?!)
- Hoy vamos a ver el teorema de Noether en este contexto
- Y también que significa “segunda cuantificación” (para bosones)

Pero antes de eso…

- **¿De dónde salió la cuántica-relativista (ecuaciones de K-G y Dirac) si utilizamos un formalismo clásico (lagrangiano de medios continuos)?**
  - **Por supuesto la información estaba contenida en los lagrangianos de los cuales partimos**
  - **Es interesante ver la forma que tienen estos lagrangianos, los más simples que a uno se le pueda ocurrir**
- **En el caso de K-G:**
  - **Queríamos un lagrangiano que fuera real, invariante de Lorentz y escrito en términos de la variable dinámica y su derivada**
  - **Esto no deja mucho margen de elección**
  - **De la variable sola no puede depender porque no es real, pero si de $\phi^*\phi$**
  - **Algo similar para las derivadas pero para que el término sea real e invariante de lorentz debe ir como $\partial_\mu\phi^* \partial^\mu\phi$**
  - **Juntamos estos términos con una constante relativa y ¡listo!**

$$\mathscr{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi^*\phi$$

- **Estas estructuras minimalistas (lagrangianos) contienen mucha información**

Teorema de Noether

- **En Mecánica Clásica la clave para entender la relación entre simetrías y leyes de conservación es el teorema de Noether**
  - **Vale en cuántica y ¡también en teorías de campos!**
  - **La idea es analizar transformaciones continuas de la variable dinámica (el campo) que en forma infinitesimal se escribe como**

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta\phi(x) + \mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$$

  - **donde α es un parámetro infinitesimal y $\Delta\phi$ es la deformación del campo**

Teorema de Noether

- **En Mecánica Clásica la clave para entender la relación entre simetrías y leyes de conservación es el teorema de Noether**
  - **Vale en cuántica y ¡también en teorías de campos!**
  - **La idea es analizar transformaciones continuas de la variable dinámica (el campo) que en forma infinitesimal se escribe como**

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta\phi(x) + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

  - **donde α es un parámetro infinitesimal y $\Delta\phi$ es la deformación del campo**
  - **Decimos que una transformación es de simetría si deja invariantes las ecuaciones de movimiento**
  - **Esto ocurre cuando la acción es invariante o cambia solo en un término de superficie (estos términos no modifican las ecuaciones de Euler-Lagrange)**
  - **Es decir, siempre que el lagrangiano se modifique sólo como una cuadri-divergencia, las ecuaciones de movimiento no cambian**

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L}' = \mathscr{L} + \partial_\mu k^\mu$$

Teorema de Noether

– **Comparemos este tipo de variación del lagrangiano con lo que sería una variación respecto de los campos**

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L}' = \mathscr{L} + \alpha \Delta \mathscr{L}$$

$$\alpha \Delta \mathscr{L} \quad = \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_\mu \phi \right)} \partial_\mu \left(\alpha \Delta \phi \right) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} \left(\alpha \Delta \phi \right)$$

Teorema de Noether

- **Comparemos este tipo de variación del lagrangiano con lo que sería una variación respecto de los campos**

$$\mathscr{L} \rightarrow \mathscr{L}' = \mathscr{L} + \alpha\Delta\mathscr{L}$$

$$\alpha\Delta\mathscr{L} \quad = \quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\partial_\mu\left(\alpha\Delta\phi\right) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\left(\alpha\Delta\phi\right)$$

- **Donde α es el parámetro que regula la variación**
- **Usando el truco de la clase pasada:**

$$\Delta\mathscr{L} = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\Delta\phi\right] - \left(\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\right)\Delta\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\Delta\phi$$

Teorema de Noether

- Comparemos este tipo de variación del lagrangiano con lo que sería una variación respecto de los campos

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L}' = \mathscr{L} + \alpha\Delta\mathscr{L}$$

$$\alpha\Delta\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\alpha\Delta\phi) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}(\alpha\Delta\phi)$$

- Donde α es el parámetro que regula la variación
- Usando el truco de la clase pasada:

$$\Delta\mathscr{L} = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right] - \underbrace{\left(\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\Delta\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\Delta\phi}_{\equiv 0 \text{ por Euler-Lagrange}}$$

Teorema de Noether

– **Podemos entonces definir una "corriente de Noether":**

$$J^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)} \Delta\phi - k^\mu .$$

– **de modo tal que si la transformación es de simetría entonces existe una corriente conservada**

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Teorema de Noether

– **Podemos entonces definir una "corriente de Noether":**

$$J^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\phi\right)}\Delta\phi - k^{\mu}$$

– **de modo tal que si la transformación es de simetría entonces existe una corriente conservada**

$$\partial_{\mu}J^{\mu} = 0$$

– **La componente cero de esta corriente integrada a todo el espacio es independiente de "t"**

$$\partial_{\mu}J^{\mu} = \frac{\partial J^{0}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} = 0$$

$$\int \frac{\partial J^{0}}{\partial t}\, d^{3}x = \int \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}\, d^{3}x \equiv 0 = \frac{\partial Q}{\partial t} \qquad Q \stackrel{\text{def}}{=} \int J^{0}\, d^{3}x$$

"carga conservada"

Veamos un ejemplo trivial

- Consideremos un lagrangiano que es pura energía cinética $\mathscr{L} = \frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}{2}$
- Y una transformación que cambie el campo en una constante $\phi \to \phi' = \phi + \alpha$
- En este caso el lagrangiano es explícitamente invariante $\mathscr{L} \to \mathscr{L}' = \mathscr{L}$
- es decir $k^\mu = 0$
- Entonces esta es una transformación de simetría para este lagrangiano y Noether nos dice que existe una cantidad conservada

$$J^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi = \partial^\mu \phi$$

- que es el momento, como uno espera

Ejemplo con el lagrangiano de K-G

– **Otro ejemplo sencillo** $$\mathscr{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi$$

– **Y consideremos una transformación de fase**

$$\phi \to \phi' = e^{i\alpha q} \phi$$

– **En este caso también el lagrangiano es invariante ante esta transformación**

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L}' = \mathscr{L} \qquad k^\mu = 0$$

– **Es decir, el lagrangiano de K-G es invariante ante una transformación de fase y entonces existe una corriente conservada**

Ejemplo con el lagrangiano de K-G

– **Otro ejemplo sencillo** $\mathscr{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi$

– **Y consideremos una transformación de fase**

$$\phi \to \phi' = e^{i\alpha q} \phi$$

– **En este caso también el lagrangiano es invariante ante esta transformación**

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L}' = \mathscr{L} \qquad\qquad k^\mu = 0$$

– **Es decir, el lagrangiano de K-G es invariante ante una transformación de fase y entonces existe una corriente conservada**

$$\alpha\Delta\phi = \left(\phi e^{i\alpha q\phi} - \phi\right) \cong i\alpha q\phi + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$\alpha\Delta\phi^* = \left(\phi^* e^{-i\alpha q\phi} - \phi^*\right) \cong -i\alpha q\phi^* + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$J^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi - k^\mu$$

Ejemplo con el lagrangiano de K-G

– **Otro ejemplo sencillo** $$\mathscr{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* \phi$$

– **Y consideremos una transformación de fase**

$$\phi \to \phi' = e^{i\alpha q} \phi$$

– **En este caso también el lagrangiano es invariante ante esta transformación**

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L}' = \mathscr{L} \qquad\qquad k^\mu = 0$$

– **Es decir, el lagrangiano de K-G es invariante ante una transformación de fase y entonces existe una corriente conservada**

$$\alpha\Delta\phi = \left(\phi e^{i\alpha q\phi} - \phi\right) \cong i\alpha q\phi + \mathcal{O}(\alpha^2)$$
$$\alpha\Delta\phi^* = \left(\phi^* e^{-i\alpha q\phi} - \phi^*\right) \cong -i\alpha q\phi^* + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$J^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi - k^\mu \longrightarrow J^\mu = iq\left[\partial^\mu \phi^* \phi - \partial^\mu \phi \phi^*\right]$$

¡La corriente de K-G!

Cuantización del campo

- El formalismo lagrangiano es clásico sobre las variables dinámicas que son el campo y su momento conjugado
  - En ningún momento impusimos ninguna restricción en cuanto a sus propiedades de conmutación
  - Sigamos entonces el programa estándar de cuantización: promover a “operadores” las variables dinámicas e imponer reglas de conmutación

Cuantización del campo

- **El formalismo lagrangiano es clásico sobre las variables dinámicas que son el campo y su momento conjugado**
  - **En ningún momento impusimos ninguna restricción en cuanto a sus propiedades de conmutación**
  - **Sigamos entonces el programa estándar de cuantización: promover a “operadores” las variables dinámicas e imponer reglas de conmutación**

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij}$$
$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$$

discreto

$$[\phi(x), \pi(x)] = i\delta_D(x - y)$$
$$[\phi(x), \phi(y)] = 0$$
$$[\pi(x), \pi(y)] = 0$$

continuo

  - **Ahora las variables dinámicas son ϕ y π, funciones continuas de *(x,t)* (pensemos los conmutadores a igual tiempo)**

Cuantización del campo

- Para seguir es conveniente pensar ϕ y π en términos de sus componentes de Fourier

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\; e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{p})$$

- Reemplazando en la ecuación de Klein-Gordon

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(p^2 + m^2\right)\right]\phi(\boldsymbol{p}) = 0$$

- Esta es la ecuación de un oscilador armónico de frecuencia

$$\omega^2 = p^2 + m^2$$

- ¡El carácter de oscilador armónico está asociado con la relación de dispersión relativista!

Otra vez el oscilador armónico…

- **¿Cómo se resolvía un problema de este tipo?**

$$\mathscr{H}_{\text{Oscilador armónico}} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

- **Una linda manera es usar el cambio de variables**

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a + a^\dagger\right) \\ p = -i\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}\left(a - a^\dagger\right) \end{cases}$$

- **Con las siguientes reglas de conmutación** $\left[a, a^\dagger\right] = 1 \quad \Rightarrow \quad [x, p] = i\hbar$

- **Esto nos lleva a el Hamiltoniano** $\boldsymbol{H_{oa} = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)}$ **que nos permite definir un estado fundamental y cada estado exitado está espaciado en ω vía el operador creación**

$$|n\rangle = a^{\dagger n}\,|0\rangle$$

En este caso (K-G):

- Intentamos algo parecido para ϕ y π (en lugar de ***x*** y ***p***)
- Lo más simple es pensar que cada modo de Fourier tiene su propio **a$_p$ a$^\dagger_p$**

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a + a^\dagger\right) \\ p = -i\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}\left(a - a^\dagger\right) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \phi(x) = \displaystyle\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(a_p + a_p^\dagger\right) \\ \pi(x) = \displaystyle\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} (-i)\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(a_p - a_p^\dagger\right) \end{cases}$$

- Y según las reglas de conmutación de ϕ y π:

$$\left[a_p, a_{p'}^\dagger\right] = \delta_D\left(p - p'\right)(2\pi)^3 \qquad \Rightarrow \qquad \left[\phi(x), \pi(x')\right] = i\delta_D\left(x - x'\right)$$

- Y finalmente el hamiltoniano queda:

$$\mathscr{H} = \int d^3x\, \mathcal{H} = \int d^3x\, \left(\pi(x)\,\dot{\phi}(x) - \mathscr{L}\right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\omega_p\left(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2}\left[a_p, a_p^\dagger\right]\right)$$

Cuantización del campo (K-G)

– **Encontramos entonces el hamiltoniano de Klein-Gordon en este formalismo:**

$$\begin{cases} \mathscr{H}_{\text{oscilador armónico}} = \omega\left(a^\dagger a + \dfrac{1}{2}\right) \\ \mathscr{H}_{\text{de Klein-Gordon}} = \displaystyle\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\omega_p\left(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2}\left[a_p, a_p^\dagger\right]\right) \end{cases}$$

– **El primer término es el operador de número para cada "*p*"**

– **Pero el segundo es un problema porque** $\left[a_p, a_p^\dagger\right] = i\delta_D(0)$ **que es la energía del fundamental para cada componente de Fourier, pero integrada diverge**

– **Sin embargo, pensemos que solo se miden diferencias de energía y entonces podemos simplemente ignorar este término**

Cuantización del campo (K-G)

- Con este hamiltoniano es inmediato ver cómo es el espectro
- $|0\rangle$ representa al vacío y tiene asociada una energía cero y nos permite generar el espectro según:

$$a_p^{\dagger n}\left|0\right\rangle = \left|n \text{ partículas con momento } p\right\rangle$$

- Estados con energía $\boldsymbol{\omega_p} = \sqrt{\boldsymbol{p^2} + \boldsymbol{m^2}}$
- Es natural entonces llamar a estas excitaciones "partículas", como entidades discretas

Cuantización del campo (K-G)

- Con este hamiltoniano es inmediato ver cómo es el espectro
- $|0\rangle$ representa al vacío y tiene asociada una energía cero y nos permite generar el espectro según:

$$a_p^{\dagger n}\,|0\rangle = |n \text{ partículas con momento } p\rangle$$

- Estados con energía $\boldsymbol{\omega_p} = \sqrt{\boldsymbol{p^2 + m^2}}$
- Es natural entonces llamar a estas excitaciones "partículas", como entidades discretas
- Es interesante que este formalismo determina la estadística ya que además:

$$\left.\begin{matrix} a_p^\dagger a_q^\dagger\,|0\rangle \\ a_q^\dagger a_p^\dagger\,|0\rangle \end{matrix}\right\} = |\text{una partícula con momento } p \text{ y una con momento } q\rangle$$

- Es decir, podemos crear indefinidos estados con el mismo "***p***" y no importa el orden en que creamos un estado con "***p***" y "***q***"

Cuantización del campo (K-G)

- Con este hamiltoniano es inmediato ver cómo es el espectro
- $|0\rangle$ representa al vacío y tiene asociada una energía cero y nos permite generar el espectro según:

$$a_p^{\dagger n}\,|0\rangle = |n \text{ partículas con momento } p\rangle$$

- Estados con energía $\boldsymbol{\omega_p = \sqrt{p^2 + m^2}}$
- Es natural entonces llamar a estas excitaciones "partículas", como entidades discretas
- Es interesante que este formalismo determina la estadística ya que además:

$$\left.\begin{array}{l} a_p^\dagger a_q^\dagger\,|0\rangle \\ a_q^\dagger a_p^\dagger\,|0\rangle \end{array}\right\} = |\text{una partícula con momento } p \text{ y una con momento } q\rangle$$

- Es decir, podemos crear indefinidos estados con el mismo "*p*" y no importa el orden en que creamos un estado con "*p*" y "*q*"
- ¡O sea que estamos describiendo bosones!
- En el caso de la ecuación de Dirac la cuantización es más complicada pero la idea es la misma, ¡y sigue la estadística de Fermi-Dirac!

24/06: Simetrías de Gauge

¿Qué es una simetría de gauge?

- La clase pasada vimos como el formalismo lagrangiano de campos provee una herramienta sistemática para analizar las simetrías del lagrangiano
  - El teorema de Noether permite obtener la corriente conservada J^μ
  - Y la carga asociada a esa simetría
- También vimos como cuantizar los campos (de K-G)
  - La relación de dispersión relativista nos llevó a una densidad hamiltoniana de un oscilador armónico
  - Aplicamos la receta de cuantización típica: promovimos a operadores las variables dinámicas, que en este caso son los campos, y establecimos reglas de conmutación
  - Observamos que para K-G, este proceso evidencia la descripción de bosones
- Hoy vamos a estudiar una simetría que fue determinante para la física de los últimos 50 años: la "simetría de gauge"
  - No obstante, ésta es conocida como simetría del electromagnetismo desde el siglo XIX
  - Aunque en ese contexto se la veía más como un "inconveniente"
  - ¿Recuerdan las distintas elecciones de gauge para las ecuaciones de Maxwell en Teórica 1?

¿Qué es una simetría de gauge?

- **La posibilidad de definir al potencial vector a menos de una divergencia parecía una curiosidad accidental**
  - Sin embargo, en el formalismo lagrangiano de campos adquiere un significado muy profundo
  - De hecho, como veremos, la simetría de gauge es el molde con el que uno entiende a las interacciones fundamentales
  - Recuerden también el hecho que en Mecánica Cuántica no relativista, uno puede cambiar arbitrariamente la fase de la función de onda y la física se mantiene invariante

- **Pero olvidemos lo que sabemos sobre invariancia de gauge en el electromagnetismo y planteemos una transformación de fase global de los campos de Dirac**

Transformaciones de fase globales

- Consideremos el lagrangiano de Dirac y una transformación de fase global (constante en todo el espacio)

$$\mathscr{L}_{\text{Dirac libre}} = \overline{\Psi}\,(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\Psi$$

$$\Psi \to \Psi' = e^{i\alpha q}\Psi$$

  – Donde ***q*** es una constante y α es un parámetro de la transformación (ambos reales)

- Estas transformaciones trivialmente forman un grupo
  – La composición de dos transformaciones es también una transformación del mismo tipo
  – Existe inversa para cualquier transformación
  – Existe la identidad
  – Son asociativas
  – También conmutan ⇒ es un grupo abeliano
  – Son unitarias y dependen de un único parámetro ⇒ transformaciones del grupo U(1)

Transformaciones de fase globales

– **El lagrangiano de Dirac es trivialmente invariante ante estas transformaciones ya que**

$$\overline{\Psi} \to \overline{\Psi}' = e^{i\alpha q}\overline{\Psi} \qquad \Rightarrow \qquad \mathscr{L}_{\mathrm{Dirac}} = \mathscr{L}'_{\mathrm{Dirac}}$$

Transformaciones de fase globales

- **El lagrangiano de Dirac es trivialmente invariante ante estas transformaciones ya que**

$$\overline{\Psi} \rightarrow \overline{\Psi}' = e^{i\alpha q}\overline{\Psi} \qquad \Rightarrow \qquad \mathscr{L}_{\text{Dirac}} = \mathscr{L}'_{\text{Dirac}}$$

- **La clase pasada vimos que ante una transformación que deje invariante el lagrangiano (a menos de una cuadri-divergencia) existe una corriente conservada**

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha\Delta\phi(x) + \mathcal{O}\left(\alpha^2\right) \longrightarrow \mathscr{L} \rightarrow \mathscr{L}' = \mathscr{L} + \partial_\mu k^\mu$$

$$J^\mu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)}\Delta\phi - k^\mu \longrightarrow \partial_\mu J^\mu = 0$$

Transformaciones de fase globales

– **En este caso:** $\Psi' = (1 + iq\alpha)\,\Psi \quad \Rightarrow \quad \Delta\Psi = iq\Psi$

$$\left.\begin{aligned} k^\mu &= 0 \\ J^\mu &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)}\Delta\phi - k^\mu \end{aligned}\right\} \quad J^\mu = -q\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$$

¡*-q* x corriente de Dirac!

– **Sugestivamente, la carga conservada (independiente del tiempo) es *-q*:**

$$\int J_0 d^3x = Q = -q$$

Transformaciones de fase locales

– **Consideremos ahora algo un poco más complicado: una transformación de fase "local" donde $\alpha = \alpha(x)$, el parámetro de la transformación es distinto en cada punto del espacio**

$$\Psi' = e^{i\alpha(\boldsymbol{x})q}\Psi$$

– **En este caso, el término de masas sigue siendo invariante pero el de la derivada ya no:**

$$\partial_\mu \psi(x) \to \partial_\mu e^{iq\alpha(x)}\psi(x) = e^{iq\alpha(x)}[\partial_\mu \psi(x) + \mathrm{i}q\partial_\mu \alpha(x)\psi(x)]$$

Transformaciones de fase locales

– Consideremos ahora algo un poco más complicado: una transformación de fase "local" donde $\alpha = \alpha(x)$, el parámetro de la transformación es distinto en cada punto del espacio

$$\Psi' = e^{i\alpha(\boldsymbol{x})q}\Psi$$

– En este caso, el término de masas sigue siendo invariante pero el de la derivada ya no:

$$\partial_\mu\psi(x) \to \partial_\mu e^{iq\alpha(x)}\psi(x) = e^{iq\alpha(x)}[\partial_\mu\psi(x) + \mathrm{i}q\partial_\mu\alpha(x)\psi(x)]$$

– El lagrangiano ahora no es invariante, la transformación no corresponde a una simetría y se entiende porque en cada punto del espacio modificamos el campo arbitrariamente

Transformaciones de fase locales

- **Consideremos ahora algo un poco más complicado: una transformación de fase "local" donde $\alpha = \alpha(x)$, el parámetro de la transformación es distinto en cada punto del espacio**

$$\Psi' = e^{i\alpha(\boldsymbol{x})q}\Psi$$

- **En este caso, el término de masas sigue siendo invariante pero el de la derivada ya no:**

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \partial_\mu e^{iq\alpha(x)}\psi(x) = e^{iq\alpha(x)}[\partial_\mu \psi(x) + \mathrm{i}q\partial_\mu \alpha(x)\psi(x)]$$

- **El lagrangiano ahora no es invariante, la transformación no corresponde a una simetría y se entiende porque en cada punto del espacio modificamos el campo arbitrariamente**

- **Pero resulta que sí podríamos inventarnos un lagrangiano que fuera invariante ante transformaciones de fase locales (transformaciones de Gauge o de medida)**

Transformaciones de fase locales

- Necesitaríamos que en lugar de la derivada hubiera un artefacto que transforme de la misma manera que el campo

$$\Psi' = e^{i\alpha(\boldsymbol{x})q}\Psi \qquad\qquad (D_\mu\Psi)' = e^{i\alpha(\boldsymbol{x})q}D_\mu\Psi$$

- Esto cancelaría la transformación de $\overline{\psi}$
- A este artefacto lo llamaremos "derivada covariante" y debería ser la derivada ordinaria ∂_μ más algo que debe transformar como un cuadrivector ante transformaciones de Lorentz

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$$

Transformaciones de fase locales

- **Necesitaríamos que en lugar de la derivada hubiera un artefacto que transforme de la misma manera que el campo**

$$\Psi' = e^{i\alpha(\boldsymbol{x})q}\Psi \qquad\qquad (D_\mu\Psi)' = e^{i\alpha(\boldsymbol{x})q}D_\mu\Psi$$

- **Esto cancelaría la transformación de $\overline{\boldsymbol{\psi}}$**
- **A este artefacto lo llamaremos "derivada covariante" y debería ser la derivada ordinaria ∂_μ más algo que debe transformar como un cuadrivector ante transformaciones de Lorentz**

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$$

- **Pero $\mathbf{A}_\mu(\mathbf{x})$ debe transformar (ante transformaciones de fase local) de modo de no estropear la invariancia, es decir:**

$$\begin{aligned}
(D_\mu\Psi)' &= (\partial_\mu\Psi - iqA_\mu\Psi)' \\
&= e^{i\alpha(x)q}\partial_\mu\Psi + iq\partial_\mu\alpha\,(x)\,e^{i\alpha(x)q}\Psi - iqA'_\mu e^{i\alpha(x)q}\Psi \\
&= e^{i\alpha(x)q}\left[\partial_\mu\Psi + iq\partial_\mu\alpha\Psi - iqA'_\mu\Psi\right].
\end{aligned}$$

Transformaciones de fase locales

- **Necesitaríamos que en lugar de la derivada hubiera un artefacto que transforme de la misma manera que el campo**

$$\Psi' = e^{i\alpha(\boldsymbol{x})q}\Psi \qquad\qquad (D_\mu\Psi)' = e^{i\alpha(\boldsymbol{x})q}D_\mu\Psi$$

- **Esto cancelaría la transformación de $\overline{\psi}$**
- **A este artefacto lo llamaremos “derivada covariante” y debería ser la derivada ordinaria ∂_μ más algo que debe transformar como un cuadrivector ante transformaciones de Lorentz**

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$$

- **Pero Aμ(x) debe transformar (ante transformaciones de fase local) de modo de no estropear la invariancia, es decir:**

$$\begin{aligned}(D_\mu\Psi)' &= (\partial_\mu\Psi - iqA_\mu\Psi)' \\ &= e^{i\alpha(x)q}\partial_\mu\Psi + iq\partial_\mu\alpha(x)\,e^{i\alpha(x)q}\Psi - iqA'_\mu e^{i\alpha(x)q}\Psi \\ &= e^{i\alpha(x)q}\left[\partial_\mu\Psi + iq\partial_\mu\alpha\Psi - iqA'_\mu\Psi\right].\end{aligned}$$

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha(x)$$

Invariancia de Gauge U(1)

- **Es decir, ante una transformación $e^{iq\alpha(x)}$ para la fase del campo de Dirac, el lagrangiano es invariante**

$$\mathscr{L} = \overline{\Psi}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m\right)\Psi \qquad \mathscr{L}_{\text{Dirac}} = \mathscr{L}'_{\text{Dirac}}$$

- **siempre y cuando introduzca un nuevo campo $A_{\mu}(x)$**

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - iqA_{\mu} \qquad A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\alpha\left(x\right)$$

Invariancia de Gauge U(1)

– **Es decir, ante una transformación $e^{iq\alpha(x)}$ para la fase del campo de Dirac, el lagrangiano es invariante**

$$\mathscr{L} \quad = \quad \overline{\Psi}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m\right)\Psi \qquad\qquad \mathscr{L}_{\text{Dirac}} = \mathscr{L}'_{\text{Dirac}}$$

– **siempre y cuando introduzca un nuevo campo $A_\mu(x)$**

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - iqA_{\mu} \qquad\qquad A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\alpha\left(x\right)$$

– **El nuevo lagrangiano es entonces invariante ante una transformación de fase local (*invariante de gauge*)**

$$\mathscr{L} \quad = \quad \overline{\Psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\Psi + q\overline{\Psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\Psi \quad = \quad \mathscr{L}_{\text{Dirac libre}} + \mathscr{L}_{\text{interacción}}$$

– **El lagrangiano de Dirac más un término donde el campo $A_\mu(x)$ "compensa" el efecto de haber introducido una fase arbitraria**

Invariancia de Gauge U(1)

- **El lagrangiano de Dirac es invariante de gauge**
  - Cambiamos la fase arbitrariamente en un punto y el campo $\mathbf{A}_\mu$ ("campo de gauge") "emparcha" la situación de modo que el lagrangiano sea invariante
  - Es muy interesante notar que la forma que tiene el nuevo término es exactamente la forma que tenía el acoplamiento de las partículas de Dirac con el campo electromagnético

$$\partial_\mu \to D_\mu \qquad \sim \qquad p_\mu \to p_\mu + qA_\mu$$

Invariancia de Gauge U(1)

- **El lagrangiano de Dirac es invariante de gauge**
  - **Cambiamos la fase arbitrariamente en un punto y el campo A_μ ("campo de gauge") "emparcha" la situación de modo que el lagrangiano sea invariante**
  - **Es muy interesante notar que la forma que tiene el nuevo término es exactamente la forma que tenía el acoplamiento de las partículas de Dirac con el campo electromagnético**

$$\partial_\mu \to D_\mu \qquad \sim \qquad p_\mu \to p_\mu + qA_\mu$$

  - **Es decir: imponer la simetría de gauge U(1) a nivel del lagrangiano para los campos de materia nos obliga a introducir un campo de gauge A_μ que se acopla exactamente como dice la prescripción clásica y que transforma de manera de dejar invariante las ecuaciones de Maxwell**

Invariancia de Gauge U(1)

- **El lagrangiano de Dirac es invariante de gauge**
  - Cambiamos la fase arbitrariamente en un punto y el campo $\mathbf{A}_\mu$ ("campo de gauge") "emparcha" la situación de modo que el lagrangiano sea invariante
  - Es muy interesante notar que la forma que tiene el nuevo término es exactamente la forma que tenía el acoplamiento de las partículas de Dirac con el campo electromagnético

$$\partial_\mu \to D_\mu \qquad \sim \qquad p_\mu \to p_\mu + qA_\mu$$

  - Es decir: imponer la simetría de gauge U(1) a nivel del lagrangiano para los campos de materia nos obliga a introducir un campo de gauge $\mathbf{A}_\mu$ que se acopla exactamente como dice la prescripción clásica y que transforma de manera de dejar invariante las ecuaciones de Maxwell

  - Nos queda aun algo más a definir si queremos el lagrangiano más general posible en este caso: podríamos agregar un término más al lagrangiano que dependa solamente de $\mathbf{A}_\mu$

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{Dirac libre}} + \mathscr{L}_{\text{interacción}} + \mathscr{L}_{\text{gauge}}$$

El lagrangiano del electro-magnetismo

- Si quisiéramos agregar un término adicional al lagrangiano que solo dependa de A_μ, le vamos a pedir que será invariante de gauge y de Lorentz (A_μ contraído con algo)
- $m^2 A^\mu A_\mu$ no sirve porque $A_\mu{}' = A_\mu + \partial\mu\alpha$ y quedan derivadas por todos lados
- $\partial_\mu A_v$ tampoco es invariante de gauge así que tampoco sirve $\partial_\mu A_v\, \partial^\mu A^v$

El lagrangiano del electro-magnetismo

- Si quisiéramos agregar un término adicional al lagrangiano que solo dependa de **A_μ**, le vamos a pedir que será invariante de gauge y de Lorentz (**A_μ** contraído con algo)
- $m^2 A^\mu A_\mu$ no sirve porque $A_\mu{}' = A_\mu + \partial\mu\alpha$ y quedan derivadas por todos lados
- $\partial_\mu A_v$ tampoco es invariante de gauge así que tampoco sirve $\partial_\mu A_v\, \partial^\mu A^v$
- Pero $\partial_\mu A_v - \partial_v A_\mu = F_{\mu v}$ es invariante de gauge y $F_{\mu v} F^{\mu v}$ es invariante de Lorentz
- ¡Y es exactamente el término que nos da como ecuaciones de Euler-Lagrange las ecuaciones de Maxwell!

El lagrangiano del electro-magnetismo

- Si quisiéramos agregar un término adicional al lagrangiano que solo dependa de **A**μ, le vamos a pedir que será invariante de gauge y de Lorentz (**A**$_\mu$ contraído con algo)
- $m^2 A^\mu A_\mu$ no sirve porque $A_\mu{}' = A_\mu + \partial\mu\alpha$ y quedan derivadas por todos lados
- $\partial_\mu A_v$ tampoco es invariante de gauge así que tampoco sirve $\partial_\mu A_v\, \partial^\mu A^v$
- Pero $\partial_\mu A_v - \partial_v A_\mu = F_{\mu v}$ es invariante de gauge y $F_{\mu v} F^{\mu v}$ es invariante de Lorentz
- ¡Y es exactamente el término que nos da como ecuaciones de Euler-Lagrange las ecuaciones de Maxwell!
- En resumen: como consecuencia de imponer invariancia de gauge U(1) a los campos de materia, "inventamos" todo el electromagnetismo, las ecuaciones de Maxwell, el acoplamiento de los campos EM con las partículas y entendemos de donde sale la prescripcion $p_\mu \to p_\mu + qA_\mu$
- ¡La interacción electromagnética es simplemente una simetría de los campos de materia!

$$\mathscr{L}_{\text{QED}} = \underbrace{\overline{\Psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\Psi}_{\mathscr{L}_{\text{Dirac libre}}} + \underbrace{q\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi}_{\mathscr{L}_{\text{interacción}}} - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\mathscr{L}_{\text{EM libre}}}$$

El lagrangiano del electro-magnetismo

- Si quisiéramos agregar un término adicional al lagrangiano que solo dependa de A_μ, le vamos a pedir que será invariante de gauge y de Lorentz (A_μ contraído con algo)
- $m^2 A^\mu A_\mu$ no sirve porque $A_\mu{}' = A_\mu + \partial\mu\alpha$ y quedan derivadas por todos lados
- $\partial_\mu A_v$ tampoco es invariante de gauge así que tampoco sirve $\partial_\mu A_v\, \partial^\mu A^v$
- Pero $\partial_\mu A_v - \partial_v A_\mu = F_{\mu v}$ es invariante de gauge y $F_{\mu v} F^{\mu v}$ es invariante de Lorentz
- ¡Y es exactamente el término que nos da como ecuaciones de Euler-Lagrange las ecuaciones de Maxwell!
- En resumen: como consecuencia de imponer invariancia de gauge U(1) a los campos de materia, "inventamos" todo el electromagnetismo, las ecuaciones de Maxwell, el acoplamiento de los campos EM con las partículas y entendemos de donde sale la prescripcion $p_\mu \rightarrow p_\mu + qA_\mu$
- ¡La interacción electromagnética es simplemente una simetría de los campos de materia!

$$\mathscr{L}_{\mathrm{QED}} = \underbrace{\overline{\Psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\Psi}_{\mathscr{L}_{\text{Dirac libre}}} + \underbrace{q\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi}_{\mathscr{L}_{\text{interacción}}} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\mathscr{L}_{\text{EM libre}}}$$

- Notar que en las ecuaciones de Lorentz ($\partial^\mu \partial_\mu A^\mu = 0$), cada componente de A^μ satisface una ecuación de K-G para $m = 0$ y que entonces se puede cuantizar como bosones sin masa (los fotones!)

Simetrías de Gauge

- **Todo esto nos da una idea de cómo aproximar las otras interacciones**
  - Podríamos probar con otras simetrías del lagrangiano de Dirac
  - En lugar de U(1) podemos probar con otros grupos
  - En el caso de las interacciones fuertes vimos que teníamos que agregar un número cuántico adicional para anti-simetrizar las funciones de onda de tres quarks y una manera trivial era usar el grupo SU(3) de color
  - En el caso de la interacción débil recuerden que las interacciones donde aparecían neutrinos estaban asociadas a su respectivo leptón: (e, ν_e) (μ, ν_μ) [¿como dobletes de SU(2)?]
  - La respuesta a esto la veremos en las clases siguientes

- **Vamos entonces a generalizar la implementación de una transformación de gauge**

¿Cómo hacer una transformación de Guage?

- La idea fue plantear una transformación unitaria $\boldsymbol{U(x)}$ tal que aplicada sobre un campo $\boldsymbol{\psi}$ me lleve a $\boldsymbol{\psi}'$
- Asociada con una derivada covariante $\boldsymbol{D_\mu}$ que sobre el campo transforme de la misma manera

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = U\Psi(x) \qquad\qquad D_\mu \rightarrow (D_\mu\Psi)' = UD_\mu\Psi$$

¿Cómo hacer una transformación de Guage?

- **La idea fue plantear una transformación unitaria $\boldsymbol{U(x)}$ tal que aplicada sobre un campo $\boldsymbol{\psi}$ me lleve a $\boldsymbol{\psi'}$**
- **Asociada con una derivada covariante $\boldsymbol{D_\mu}$ que sobre el campo transforme de la misma manera**

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = U\Psi(x) \qquad\qquad D_\mu \to (D_\mu\Psi)' = UD_\mu\Psi$$

- **Lo delicado es qué propiedad debe satisfacer lo que agreguemos en la derivada covariante para que deje invariante al lagrangiano** $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$

$$(iqA_\mu\Psi)' = (\partial_\mu\Psi)' - (D_\mu\Psi)'$$

$$iqA'_\mu\Psi' = U\cancel{\partial_\mu\Psi} + (\partial_\mu U)\Psi - U\underbrace{D_\mu}_{(\cancel{\partial_\mu}-iqA_\mu)\Psi}\Psi$$

$$iqA'_\mu\Psi' = (\partial_\mu U)\Psi + iqUA_\mu\Psi$$

$$\boxed{A'_\mu = \frac{1}{iq}(\partial_\mu U)U^{-1} + UA_\mu U^{-1}}.$$

¿Cómo hacer una transformación de Guage?

- La idea fue plantear una transformación unitaria $U(x)$ tal que aplicada sobre un campo ψ me lleve a ψ'
- Asociada con una derivada covariante D_μ que sobre el campo transforme de la misma manera

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = U\Psi(x) \qquad\qquad D_\mu \to (D_\mu \Psi)' = U D_\mu \Psi$$

- Lo delicado es qué propiedad debe satisfacer lo que agreguemos en la derivada covariante para que deje invariante al lagrangiano $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$

$$(iqA_\mu \Psi)' = (\partial_\mu \Psi)' - (D_\mu \Psi)'$$

$$iqA'_\mu \Psi' = U\cancel{\partial_\mu \Psi} + (\partial_\mu U)\Psi - U \underbrace{D_\mu}_{(\cancel{\partial_\mu} - iqA_\mu)\Psi} \Psi$$

$$iqA'_\mu \Psi' = (\partial_\mu U)\Psi + iqUA_\mu \Psi$$

$$\boxed{A'_\mu = \frac{1}{iq}(\partial_\mu U)U^{-1} + UA_\mu U^{-1}}.$$

→ así debe transformar el campo de gauge para dejar invariante al lagrangiano

Una construcción útil

- **La aplicación de derivadas covariantes da objetos covariantes**
  - **Lo mismo ocurre con la aplicación sucesiva de derivadas covariantes**
  - **Veamos el siguiente objeto invariante de Lorentz**

$$[D_\mu, D_\nu]\,\Psi = D_\mu D_\nu \Psi - D_\nu D_\mu \Psi$$

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu \Psi &= (\partial_\mu - iqA_\mu)\,(\partial_\nu - iqA_\nu)\,\Psi \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \Psi - iqA_\mu \partial_\nu \Psi - iq\partial_\mu\,(A_\nu \Psi) - q^2 A_\mu A_\nu \Psi - iq\partial_\mu A_\nu \Psi - iqA_\nu \partial_\mu \Psi \end{aligned}$$

  - **El segundo término en el conmutador es lo mismo pero con los índices intercambiados**
  - **Restando ambos términos, el conmutador queda:**

$$[D_\mu, D_\nu]\,\Psi = -iq\,\underbrace{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}_{F_{\mu\nu}}\,\Psi$$

$$F_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{iq}\,[D_\mu, D_\nu]$$

¿Cómo obtener el $\mathcal{L}_{gauge}$?

– **¿Cómo transforma la derivada covariante?**

$$(D_\mu \Psi)' = U D_\mu \Psi$$

$$D'_\mu \Psi' = D'_\mu (U\Psi) \qquad \Rightarrow \qquad D'_\mu = U D_\mu U^{-1}$$

– **Trivialmente entonces podemos ver como transforma la aplicación sucesiva de derivadas covariantes**

$$(D_\mu D_\nu)' = \cdots = U D_\mu D_\nu U^{-1} \qquad \Rightarrow \boxed{F'_{\mu\nu} = U F_\nu U^{-1}}$$

– **Y en el caso abeliano:**

$$\mathscr{L}_{\text{gauge}} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \qquad \rightarrow \qquad \mathscr{L}'_{\text{gauge}} = U F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} U^{-1} = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

29/05: Gauge no abeliano

Resumen de Simetrías de Gauge

- **La clase pasada discutimos los aspectos relevantes de una simetría de gauge**
  - Todo comenzó observando que el lagrangiano de Dirac trivialmente era invariante ante transformaciones de fase globales ($\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha q}\psi$)
  - Esta transformación (unitaria) no se traduce en un cambio en los observables y el teorema de Noether nos permitió obtener la corriente de Dirac como magnitud conservada ($\partial_\mu J^\mu = 0,\ J^\mu = -q\overline{\psi}\gamma\mu\psi$)
  - En mecánica cuántica la ecuación de continuidad se entiende como un requerimiento de consistencia (la variación de la densidad es igual al flujo)
  - En el formalismo de campos uno piensa la conservación de la corriente como consecuencia de la invariancia ante transformaciones de fase
  - El paso siguiente fue considerar una transformación de fase local ($\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)q}\psi$) donde ahora $\alpha = \alpha(x)$
  - El lagrangiano tal cual lo veníamos usando no era invariante ante esta transformación
  - Pero se recupera la invariancia si uno incorpora un nuevo campo A_μ (cambiamos la derivada ordinaria por la covariante: $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial\mu - iqA_\mu$)

Resumen de Simetrías de Gauge

- Para mantener la invariancia de gauge, este campo $\boldsymbol{A_\mu}$ debía transformar de una manera específica ($\boldsymbol{A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial\mu\alpha(x)}$)
- La sorpresa era que el nuevo lagrangiano, invariante ante transformaciones del grupo $U_q(1)$ era exactamente el de Dirac acoplado a un campo electromagnético
- Más aun, podíamos obtener un lagrangiano más general agregando un término también invariante de gauge y de Lorentz que dependiera únicamente del campo de gauge
- La segunda sorpresa es que este último término era el lagrangiano cuyas ecuaciones de movimiento ¡son las ecuaciones de Maxwell!
- Es decir, la observación que la naturaleza es invariante ante transformaciones de fase local del grupo $U_q(1)$ nos lleva a las ecuaciones del electromagnetismo (Quantum Electro Dynamics)

$$\mathscr{L}_{\text{QED}} = \underbrace{\overline{\Psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\Psi}_{\mathscr{L}_{\text{Dirac libre}}} + \underbrace{q\overline{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi}_{\mathscr{L}_{\text{interacción}}} - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\mathscr{L}_{\text{EM libre}}}$$

- Finalmente extendimos este proceso para el caso de una transformación ***U*** unitaria en general

- Hoy vamos a ver algo similar pero con varios campos en lugar de uno solo

Lagrangiano de varios campos (de Dirac)

- **Supongamos ahora un lagrangiano que depende de varios campos de Dirac ($\boldsymbol{\psi_1(x)} \dots \boldsymbol{\psi_N(x)}$) y un grupo G de transformaciones unitarias que transforman esos campos en combinaciones lineales de los otros**

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{Espinores libres}} &= \sum_{i=1}^{N} \mathscr{L}_{\text{Dirac libre}}\left(\Psi_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \overline{\Psi_i}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\Psi_i\end{aligned}$$

$$\Psi_i \to \Psi_i' = \sum_{j=1}^{N} U_{ij}\Psi_j$$

- **Donde *U* es una matriz de *NxN* y podemos compactar las cosas un poco:**

$$\Phi = \begin{bmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_N\end{bmatrix}$$

$$\Phi \to \Phi' = U\Phi$$

Lagrangiano de varios campos

- Si nos restringimos a una transformación donde además de unitaria es de determinante 1, nos referimos a transformaciones del grupo **SU(N)** y las **U** serían las representaciones matriciales de esos grupos en dimensión **N**
- Para **SU(2)**, la dimensión menor es 2 y las **U** son combinaciones de las N^2-1=3 matrices de Pauli
- En **SU(2)** pero dimensión 3 (recuerden la composición de isospines) las **U** son matrices de 3x3 pero siempre N^2-1=3 matrices
- Para **SU(3)** las **U** son N^2-1=8 matrices de 3x3 (Gell-Mann)
- En general, para **SU(N)** será:

$$\begin{aligned} U\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{N^2-1}\right) &= e^{i\alpha_1(x)T_1+\cdots+i\alpha_{N^2-1}(x)T_{N^2-1}} \\ &= e^{i\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{T}} \\ &= e^{i\alpha_a(x)T_a} \end{aligned}$$

$$T_i = \begin{cases} \dfrac{\sigma_i}{2} & \text{para } \mathbf{SU}\,(2) \\ \dfrac{\lambda_i}{2} & \text{para } \mathbf{SU}\,(3) \\ \vdots & \end{cases}$$

Lagrangiano de varios campos

- Las T_i son los generadores del grupo, son hermíticas y de traza nula
- En general las transformaciones SU(N) no conmutan y esto se refleja en las reglas de conmutación de los generadores

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$$

- Donde f_{abc} son las constantes de estructura del grupo (ε_{ijk} para SU(2), etc)
- La generalización lógica de U(1) a SU(N) sería entonces pedir invariancia ante transformaciones:

$$U(\boldsymbol{\alpha}(x)) = e^{ig\alpha_a(x)T_a}$$

- Con N^2-1 funciones $\alpha_a(\mathbf{x})$ que mezclan los campos arbitrariamente $\boldsymbol{\psi}_1(\boldsymbol{x}) \ldots \boldsymbol{\psi}_N(\boldsymbol{x})$

Lagrangiano de varios campos

- Las T_i son los generadores del grupo, son hermíticas, de traza nula y determinante 1
- En general las transformaciones SU(N) no conmutan y esto se refleja en las reglas de conmutación de los generadores

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$$

- Donde f_{abc} son las constantes de estructura del grupo (ε_{ijk} para SU(2), etc)
- La generalización lógica de U(1) a SU(N) sería entonces pedir invariancia ante transformaciones:

$$U(\boldsymbol{\alpha}(x)) = e^{ig\alpha_a(x)T_a}$$

- Con N²-1 funciones α_a(x) que mezclan los campos arbitrariamente $\psi_1(x) \dots \psi_N(x)$

U ∈ U(1)	U ∈ SU(N)
$\psi \to \psi' = U\psi = e^{iq\alpha(x)}\psi$	$\Phi \to \Phi' = U\Phi = e^{ig\alpha_a(x)T_a}\Phi$
$\partial_\mu\psi \to \partial_\mu\psi' = iq(\partial_\mu\alpha)U\psi + U\partial_\mu\psi$	$\partial_\mu\Phi \to \partial_\mu\Phi' = ig(\partial\mu\alpha_a)T_a U\Phi + U\partial_\mu\Phi$
$D_\mu = \partial\mu - iqA_\mu$	$D_\mu = \partial\mu - igT^a W_\mu^a$

¿Cómo transforman los W_μ^a?

– **El tema es ver cómo transforman los campos de gauge ante transformaciones de SU(N) pero esto ya lo vimos la clase pasada:**

$$A'_\mu = \frac{1}{iq}\left(\partial_\mu U\right)U^{-1} + U A_\mu U^{-1}$$

– **Pero ahora tenemos que analizar haciendo $\boldsymbol{A_\mu = W_\mu^a T^a}$ y recordando que trabajamos con transformaciones infinitesimales**

$$U = 1 + ig\alpha_a\left(x\right)T_a$$

$$\begin{aligned}
\left(W^a{}_\mu T^a\right)' &= \frac{1}{ig} ig\left(\partial_\mu \alpha_a\left(x\right)\right)T_a U U^{-1} + \left(1 + ig\alpha_b\left(x\right)T_b\right)W^a{}_\mu T^a\left(1 - ig\alpha_b\left(x\right)T_b\right) \\
&= \partial_\mu \alpha_a\left(x\right)T_a + W^a{}_\mu T^a + ig\alpha_b\left[T_b T_a - T_a T_b\right]W^a{}_\mu + \mathcal{O}\left(\alpha^2\right) \\
&= \partial_\mu \alpha_a\left(x\right)T_a + W^a{}_\mu T^a - g\alpha f_{abc} T_c W^a{}_\mu + \mathcal{O}\left(\alpha^2\right)
\end{aligned}$$

¿Cómo transforman los W_μ^a?

– **El tema es ver cómo transforman los campos de gauge ante transformaciones de SU(N) pero por suerte ya lo vimos la clase pasada**

$$A'_\mu = \frac{1}{iq}(\partial_\mu U)U^{-1} + UA_\mu U^{-1}$$

– **Pero ahora tenemos que analizar haciendo $\boldsymbol{A_\mu = W_\mu^a T^a}$ y recordando que trabajamos con transformaciones infinitesimales**

$$U = 1 + ig\alpha_a(x)T_a$$

$$\begin{aligned}
(W^a{}_\mu T^a)' &= \frac{1}{ig}ig(\partial_\mu\alpha_a(x))T_a U U^{-1} + (1 + ig\alpha_b(x)T_b)W^a{}_\mu T^a(1 - ig\alpha_b(x)T_b) \\
&= \partial_\mu\alpha_a(x)T_a + W^a{}_\mu T^a + ig\alpha_b[T_bT_a - T_aT_b]W^a{}_\mu + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
&= \partial_\mu\alpha_a(x)T_a + W^a{}_\mu T^a - g\alpha f_{abc}T_c W^a{}_\mu + \mathcal{O}(\alpha^2)
\end{aligned}$$

¡Ojo el truquito con los índices!

$$\boxed{(W^a{}_\mu)' = \partial_\mu\alpha_a(x) + W^a{}_\mu - g\alpha_b f_{abc}W^c{}_\mu}$$

¿Y cómo queda el "$F_{\mu\nu}$"?

– **Esto quiere decir que hay un término más en la transformación del campo que involucra a los otros (porque el grupo es no-abeliano)**

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \longrightarrow ({W^a}_\mu)' = \partial_\mu \alpha_a(x) + {W^a}_\mu - g\alpha_b f_{abc} {W^c}_\mu$$

– **De la misma forma que $[\boldsymbol{D_\mu}, \boldsymbol{D_\nu}] = -\boldsymbol{iqF_{\mu\nu}}$ podemos definir:**

$$G_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{-ig}[D_\mu, D_\nu]$$

¿Y cómo queda el "F$_{\mu\nu}$"?

- Esto quiere decir que hay un término más en la transformación del campo que involucra a los otros (porque el grupo es no-abeliano)

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \longrightarrow (W^a{}_\mu)' = \partial_\mu \alpha_a(x) + W^a{}_\mu - g\alpha_b f_{abc} W^c{}_\mu$$

- De la misma forma que $[D_\mu, D_\nu] = -iqF_{\mu\nu}$ podemos definir:

$$G_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{-ig}[D_\mu, D_\nu]$$

$$\begin{cases} D_\mu D_\nu \Psi = \partial_\mu \partial_\nu \Psi - igW^a{}_\mu T^a \partial_\nu \Psi - ig\Psi \partial_\mu W^a{}_\nu T^a - igW^a{}_\nu T^a \partial_\mu \Psi - g^2 W^a{}_\mu T^a W^b{}_\nu T^b \\ D_\nu D^\mu \Psi = \ldots \quad \text{cambiar los índices} \end{cases}$$

$$[D_\mu, D_\nu]\Psi = -ig\Psi \underbrace{(\partial_\mu W^a{}_\nu - \partial_\nu W^a{}_\mu)}_{\text{Esto es lo que teníamos la clase pasada}} T^a - \underbrace{g^2 W^a{}_\mu W^b{}_\nu [T^a, T^b]}_{\text{Esto es algo nuevo}}$$

¿Y cómo queda el “F$_{\mu\nu}$”?

– **Y de nuevo hacemos el pase mágico con el último término:**

$$
\begin{aligned}
-g^2 W^a{}_\mu W^b{}_\nu \left[T^a, T^b\right] &= -ig^2 W^a{}_\mu W^b{}_\nu f_{abc} T^c \\
\text{cambiamos} \begin{cases} c \to a \\ b \to c \;\to \\ a \to b \end{cases} &= -ig^2 W^b{}_\mu W^c{}_\nu f_{bca} T^a \\
? \to &= -ig^2 W^b{}_\mu W^c{}_\nu f_{abc} T^a
\end{aligned}
$$

– **Y entonces:**

$$
\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= T^a \left[\left(\partial_\mu W^a{}_\mu - \partial_\nu W^a{}_\mu\right) + g f^{abc} W^b{}_\mu W^c{}_\nu \right] \\
&= T^a G^a{}_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

¿Es invariante $G_{\mu\nu}$?

– **Por construcción (usamos $D_\mu D_\nu$):**

$$(G_{\mu\nu})' = U G_{\mu\nu} U^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad (G_{\mu\nu} G^{\mu\nu})' = U G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} U^{-1}$$

– **¡Pero este objeto no es invariante de gauge! (verifíquenlo)**
– **En el caso de la clase pasada, el grupo U(1) es abeliano y podía conmutar la U con el $F_{\mu\nu}$ pero ahora el grupo es no abeliano y la cosa no funciona de la misma manera**

¿Es invariante $G_{\mu\nu}$?

– Por construcción (usamos $D_\mu D_\nu$):

$$(G_{\mu\nu})' = U G_{\mu\nu} U^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad (G_{\mu\nu} G^{\mu\nu})' = U G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} U^{-1}$$

– ¡Pero este objeto no es invariante de gauge! (verifíquenlo)

– En el caso de la clase pasada, el grupo U(1) es abeliano y podía conmutar la **U** con el $F_{\mu\nu}$ pero ahora el grupo es no abeliano y la cosa no funciona de la misma manera

– Sin embargo, la traza del producto de matrices tiene una linda propiedad:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left((G_{\mu\nu} G^{\mu\nu})'\right) &= \mathrm{Tr}\left(U G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} U^{-1}\right) \\ \text{Propiedad de la traza} \rightarrow &= \mathrm{Tr}\left(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}\right) \leftarrow \text{Es invariante de gauge!} \end{aligned}$$

El lagrangiano de Yang-Mills

– **Poniendo todas las piezas juntas:**

$$\mathscr{L}_{\text{Yang-Mills}} = \underbrace{\overline{\Phi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\Phi}_{\text{Espinores libres}} + \underbrace{g\overline{\Phi}\gamma^\mu T^a \Phi W^a{}_\mu}_{\text{Interacción}} - \underbrace{\frac{1}{2}G^a{}_{\mu\nu}G_a{}^{\mu\nu}}_{\text{Campos de gauge libres}}$$

– **Construimos el lagrangiano de Yang-Mills ([Phys. Rev. 96, 191])**

– **Este lagrangiano es análogo al de la clase pasada (QED) pero ahora tenemos N^2-1 campos de gauge que se acoplan con los campos de Dirac con algo parecido al acoplamiento de QED (la parte espinorial es la misma pero cambia la parte de T_a que es no-diagonal y conecta ψ_i con ψ_j**

– **Sin embargo, la diferencia más espectacular va estar en la dinámica de los campos de gauge**

El lagrangiano de Yang-Mills

– **La "interacción" entre los campos de gauge es similar a la de los fotones en QED pero…**

$$\frac{1}{2} G^a{}_{\mu\nu} G_a{}^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= T^a \left[(\partial_\mu W^a{}_\mu - \partial_\nu W^a{}_\mu) + g f^{abc} W^b{}_\mu W^c{}_\nu \right] \\ &= T^a G^a{}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} (\partial_\mu W^a{}_\nu - \partial_\nu W^a{}_\mu)^2 \\ g\,(\partial_\mu W^a{}_\nu - \partial_\nu W^a{}_\nu)\, f_{abc} W^b{}_\mu W^c{}_\nu \\ g^2 WWWW \end{cases}$$

El lagrangiano de Yang-Mills

– **La "interacción" entre los campos de gauge es similar a la de los fotones en QED pero…**

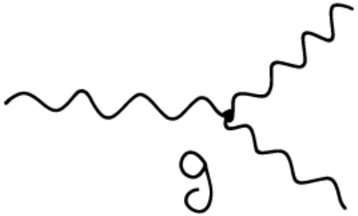
$$\frac{1}{2} G^a{}_{\mu\nu} G_a{}^{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= T^a \left[(\partial_\mu W^a{}_\mu - \partial_\nu W^a{}_\mu) + g f^{abc} W^b{}_\mu W^c{}_\nu \right] \\ &= T^a G^a{}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

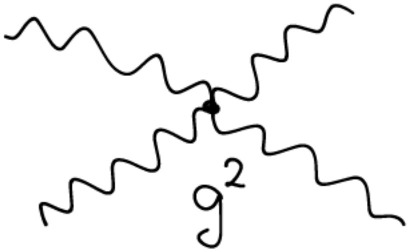
$$\longrightarrow \begin{cases} (\partial_\mu W^a{}_\nu - \partial_\nu W^a{}_\mu)^2 \\ g\,(\partial_\mu W^a{}_\nu - \partial_\nu W^a{}_\nu)\, f_{abc} W^b{}_\mu W^c{}_\nu \\ g^2 WWWW \end{cases}$$

$$\left(\partial_{\bar{\mu}} W^a{}_{\bar{\nu}} - \partial_{\bar{\nu}} W^a{}_{\bar{\mu}}\right)^2$$

$$g\left(\partial_{\bar{\mu}} W^a{}_{\bar{\nu}} - \partial_{\bar{\nu}} W^a{}_{\bar{\nu}}\right) f_{abc} W^b{}_{\bar{\mu}} W^c{}_{\bar{\nu}}$$



$$g^2 WWWW$$



– **… ahora <u>los campos de gauge se acoplan entre sí</u> y eso cambia completamente la dinámica**

QCD

- El ejemplo paradigmático de teoría de Yang-Mills es QCD (Quantum Cromo Dynamics), la teoría de las interacciones fuertes que esta basada en $SU_{COLOR}(3)$
- La idea es que los campos de Dirac están en la representación fundamental de SU(3) $\Phi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_B \\ \psi_G \end{pmatrix}$
- Es decir que un quark puede darse en cualquiera de esos tres colores
- Hay 3^2-1=8 campos de gauge (gluones) que se acoplan a los quarks de manera similar a la que los fotones se acoplan con fermiones con carga eléctrica
- La diferencia está en el vértice de interacción:

$$\bar{\Phi}\gamma^\mu T^6 \Phi = (\bar{\psi}_R \bar{\psi}_B \bar{\psi}_G)\gamma^\mu \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_B \\ \psi_G \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_B \gamma^\mu \psi_G + \bar{\psi}_G \gamma^\mu \psi_B)$$

QCD

- El ejemplo paradigmático de teoría de Yang-Mills es QCD (Quantum Cromo Dynamics), la teoría de las interacciones fuertes que esta basada en $SU_{COLOR}(3)$
- La idea es que los campos de Dirac están en la representación fundamental de SU(3) $\Phi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_B \\ \psi_G \end{pmatrix}$
- Es decir que un quark puede darse en cualquiera de esos tres colores
- Hay 3^2-1=8 campos de gauge (gluones) que se acoplan a los quarks de manera similar a la que los fotones se acoplan con fermiones con carga eléctrica
- La diferencia está en el vértice de interacción:

$$\overline{\Phi}\gamma^\mu T^6 \Phi = (\overline{\psi}_R \overline{\psi}_B \overline{\psi}_G)\gamma^\mu \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_B \\ \psi_G \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\overline{\psi}_B \gamma^\mu \psi_G + \overline{\psi}_G \gamma^\mu \psi_B)$$

$$\widetilde{T}^6 \equiv \frac{1}{2}(T^6 + iT^7) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \overline{\psi}_B \gamma^\mu \psi_G$$

$$\widetilde{T}^7 \equiv \frac{1}{2}(T^6 - iT^7) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \overline{\psi}_G \gamma^\mu \psi_B$$

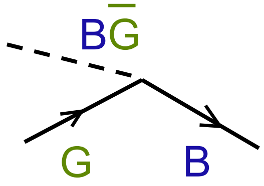
QCD

- El ejemplo paradigmático de teoría de Yang-Mills es **QCD** (**Q**uantum **C**romo **D**ynamics), la teoría de las interacciones fuertes que esta basada en $SU_{COLOR}(3)$
- La idea es que los campos de Dirac están en la representación fundamental de SU(3) $\Phi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_B \\ \psi_G \end{pmatrix}$
- Es decir que un quark puede darse en cualquiera de esos tres colores
- Hay 3^2-1=8 campos de gauge (gluones) que se acoplan a los quarks de manera similar a la que los fotones se acoplan con fermiones con carga eléctrica
- La diferencia está en el vértice de interacción:

$$\bar{\Phi}\gamma^\mu T^6 \Phi = (\bar{\psi}_R \bar{\psi}_B \bar{\psi}_G)\gamma^\mu \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_B \\ \psi_G \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_B \gamma^\mu \psi_G + \bar{\psi}_G \gamma^\mu \psi_B)$$

$$\widetilde{T}^6 \equiv \frac{1}{2}(T^6 + iT^7) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\psi}_B \gamma^\mu \psi_G$$

$$\widetilde{T}^7 \equiv \frac{1}{2}(T^6 - iT^7) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\psi}_G \gamma^\mu \psi_B$$



Los gluones llevan color y anti-color (tienen carga de color)

31/05: Cromodinámica Cuántica