

ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2022

PRÁCTICA 7A: TEORÍAS DE GAUGE (CASO ABELIANO)

Gauge symmetry is not a symmetry..A better phrase is Gauge redundancy

Nathan Seiberg

1. 🐰 Considere la acción de un campo de Klein-Gordon complejo:

$$L = (\partial^\mu \phi)^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

- (a) Verifique que el lagrangiano no queda invariante ante la transformación $\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi$, siendo α una función arbitraria del espacio-tiempo. Es decir, verifique que este lagrangiano no tiene *invariancia local* ante $U(1)$.
- (b) Considere ahora una modificación del caso anterior, en el que el campo escalar interactúa con otro campo cuadvectorial A_μ :

$$L_{gauge} = D_\mu^* \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + \dots$$

donde los puntos suspensivos denota un términos cinéticos en A_μ , que en breve se introducirá a fin de darle dinámica a este campo. D_μ es la llamada *derivada covariante* $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$, con g una constante. Halle la forma en que debe transformar A_μ (transformación de gauge) para que el primer término de este lagrangiano quede invariante para todo α cuando $\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi$.

- (c) Para esa transformación hallada, muestre que este tensor $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ resulta ser invariante. Esto permite proponer un término cinético para A_μ de la forma $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, *invariante de gauge*. Diga porque este término no describe interacciones para el campo A_μ .
- (d) Verifique que un término de masa para el fotón (la partícula asociada a A_μ): $m^2 A_\mu A^\mu$ rompe esta invariancia local.
- (e) Halle las ecuaciones de movimiento del lagrangiano completo así obtenido, invariante ante $U(1)$ -local:

$$L_{gauge} = D_\mu^* \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

y verifique que g hace las veces de "carga eléctrica", comparando estas ecuaciones con las de Maxwell con una fuente j^μ e identificando A_μ con el campo de Maxwell.

2. Considere el Lagrangiano anterior con la adición de un término $\lambda(\phi^* \phi)^2$.

- (a) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción. Para ello, expanda el primer término diferenciando el término cinético del campo escalar y los términos cúbicos y cuárticos de interacción.
- (b) Si llamamos h y \bar{h} a la partícula y antipartícula que surge de la cuantización del campo ϕ , dibuje los diagramas intervinientes en el scattering partícula-antipartícula $h + \bar{h} \rightarrow h + \bar{h}$. Por simplicidad, considere sólo los órdenes que no incluyan lazos en los diagramas. Especifique la potencia de g con la que viene pesado el diagrama.

3. Considere el campo de Dirac acoplado al campo electromagnético,

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

siendo $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ (q es la carga del electrón en este caso, es decir, $-e$). El modelo que resulta de cuantizar esta lagrangiano es lo que se conoce como QED (quantum electrodynamics). La simetría ante $U(1)$ local es exactamente la del caso escalar.

- (a) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción.
- (b) Dibuje los diagramas de Feynman, al orden árbol (es decir, sin loops) y al orden mas bajo en e , para los procesos:

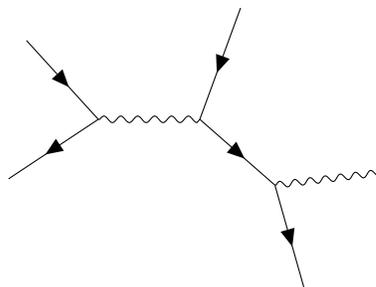
$$\text{Scattering de Bahba: } e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$$

$$\text{Scattering de Møller: } e^- e^- \rightarrow e^- e^-$$

4. Para el scattering de fotones $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$, dibuje el diagrama al orden mas bajo, permitiendo incluir loops. (ver Nota sobre scattering de fotones)
5. Considere de nuevo el scattering de un electrón y positrón. A nivel clásico se espera que estas partículas cargadas se aceleran como consecuencia de su atracción y por ende emitirán radiación. El proceso más adecuado para describir eso sería de la forma:

$$e^- e^+ \rightarrow e^- e^+ \gamma$$

con al menos un fotón en el estado final. Un diagrama posible sería el siguiente:



- (a) Dibuje otros diagramas de Feynman correspondiente a ese proceso, al orden más bajo posible y a nivel árbol.
- (b) Recordando las consideración de energía y masa de la guía 4, verifique que no existe un limite para la cantidad de fotones en el estado final. Es decir, argumente que procesos de la forma

$$e^- e^+ \rightarrow e^- e^+ \gamma \gamma \gamma..$$

, donde los puntos suspensivos indican adiciones de fotones, son posibles desde el punto de vista de la conservación. Halle diagramas de Feynman para algunos casos (3 o 4 fotones finales)

- (c) Dibuje un diagrama de Feynman para el caso en que hay dos fotones en el estado final.

6. La invariancia $U(1)$ local de un lagrangiano requiere un solo campo de gauge (A_μ), aunque este lagrangiano contenga varios campos escalares o de Dirac acoplados a A_μ . A fin de ilustrar esto:

- (a) Escriba el Lagrangiano invariante $U(1)$ local que describe a dos campos de Dirac acoplados con A_μ , siendo sus constantes de acoplamiento q_1 y q_2 .
- (b) Reescriba este lagrangiano organizando los dos campos de Dirac en un doblete Ψ . Muestre que la expresión de la derivada covariante puede reescribirse de esta forma: $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu Q$, con $Q \equiv \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$ y que la transformación de gauge puede escribirse en la forma:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\alpha(x)Q}\Psi$$

- (c) Justifique porque este Lagrangiano es solo invariante ante $U(1)_{local}$ y no ante $U(1) \times U(1)$, a pesar de que la transformación se implemente por medio de una matriz de 2×2 .

7. Considere ahora solo las partículas fermionicas del modelo standard (las que conoce). Escriba la parte del lagrangiano que describe la interacción de estas con el campo electromagnético.