Ejercicio μ_p resuelto y ejemplo de mesón

Estructura de la materia 4

Verano 2022

Como no llegamos a resolver un ejemplo explícito de cálculo de momento magnético ni mostrar un ejemplo de mesones, les dejo esta nota por completitud para tener a mano.

1) Cálculo del momento magnético del protón:
Recordemos que la función de onda del protón con espín arriba es

$$\begin{aligned}|P,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}}\Bigg[&|uud\rangle \otimes (2\,|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \\ &+ |udu\rangle \otimes (2\,|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \\ &+ |duu\rangle \otimes (2\,|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)\Bigg]\end{aligned} \tag{1}$$

Como vimos, es fácil verificar que esta función es totalmente simétrica. Nos queda calcular entonces el valor medio de expectación del operador $\mu = \sum_q \mu_q \sigma_3 = \sum_q Q_q \frac{e}{2m_q}\sigma_3$ aplicado al estado $|P,+\rangle$. Para esto notemos 3 cosas: primero, todos los kets que forman el estado del protón, son autoestados de este operador (pero no así el estado total del protón). Segundo, cuando hallemos el bra $\langle P,+|$, todos los coeficientes de los bras que lo componen tendrán los mismos signos que en el ket respectivo. Tercero, todos los estados son mutuamente ortogonales, por lo que no habrá términos cruzados. Esto simplifica mucho las cuentas, ya que sólo tendremos que tener en cuenta los coeficientes al cuadrado y el autovalor del espín. Entonces, para el primer renglón tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{18}\sum_q \langle uud| \otimes (2\,\langle\uparrow\uparrow\downarrow| - \langle\uparrow\downarrow\uparrow| - \langle\downarrow\uparrow\uparrow|)\,\mu_q\sigma_3\,|uud\rangle \otimes (2\,|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \\ = \frac{1}{18}\left[4\,(2\mu_u - \mu_d) + \mu_d + \mu_d\right] = \frac{1}{9}\,(4\mu_u - \mu_d)\end{aligned} \tag{2}$$

Es fácil convencerse de que las demás permutaciones dan el mismo resultado, por lo que tenemos finalmente:

$$\mu_P = \frac{4\mu_u - \mu_d}{3} \tag{3}$$

2) Ejemplo de mesones:
Para entender los mesones, necesitamos saber algunas cosas. Recordemos que teníamos las relaciones de conmutación para el álgebra $su(3)$:

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right] = i f_{ijk}\frac{\lambda_k}{2} \tag{4}$$

donde los f_{ijk} eran las llamadas 'constantes de estructura' (cabe quizás aclarar que son reales). Si definimos $T_i \equiv \frac{\lambda_i}{2}$ y conjugamos (NO dagueamos, sólo conjugamos término a término) estas relaciones de conmutación, tenemos que:

$$\left[T_i^\star, T_j^\star\right] = -i f_{ijk} T_k^\star \tag{5}$$

Definimos entonces a la representación conjugada o antifundamental como $\bar{T}_i \equiv -T_i^\star$. Entonces, esta representación también representa su(3), ya que $\left[\bar{T}_i, \bar{T}_j\right] = i f_{ijk}\bar{T}_k$.

Algunas observaciones generales:

$$\begin{aligned} \bar{T}_i &= -T_i \quad para\ i = 1,3,4,6\ y\ 8 \\ \bar{T}_i &= T_i \quad para\ i = 2,5\ y\ 7 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{\lambda}_3}{2} = -\frac{\lambda_3}{2} \tag{7}$$

$$\bar{Y} = \frac{\bar{\lambda}_8}{\sqrt{3}} = -\frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} \tag{8}$$

$$\bar{I}_\pm = \frac{1}{2}\left(\bar{\lambda}_1 \pm i\bar{\lambda}_2\right) = -\frac{1}{2}\left(\lambda_1 \mp i\lambda_2\right) \tag{9}$$

$$\bar{U}_\pm = \frac{1}{2}\left(\bar{\lambda}_6 \pm i\bar{\lambda}_7\right) = -\frac{1}{2}\left(\lambda_6 \mp i\lambda_7\right) \tag{10}$$

$$\bar{V}_\pm = \frac{1}{2}\left(\bar{\lambda}_4 \pm i\bar{\lambda}_5\right) = -\frac{1}{2}\left(\lambda_4 \mp i\lambda_5\right) \tag{11}$$

Por lo que las 'pirámides de quarks' quedarían:

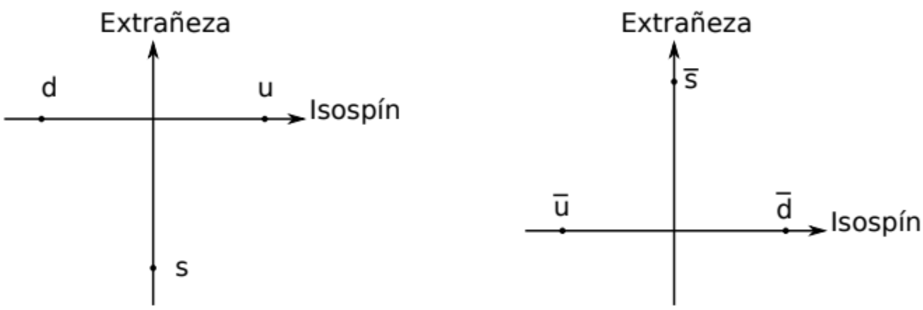

Figure 1: Izquierda: Quarks en la representación fundamental. Derecha: antiquarks en la representación anti-fundamental.

Se puede ver entonces que los operadores anti-escalera operan sobre los anti-quarks de la siguiente manera:

$$\bar{I}_+\bar{u} = -\bar{d} \quad , \quad \bar{I}_+\bar{d} = 0 \quad , \quad \bar{I}_+\bar{s} = 0 \tag{12}$$

$$\bar{I}_-\bar{u} = 0 \quad , \quad \bar{I}_-\bar{d} = -\bar{u} \quad , \quad \bar{I}_-\bar{s} = 0 \tag{13}$$

$$\bar{U}_+\bar{u} = 0 \quad , \quad \bar{U}_+\bar{d} = -\bar{s} \quad , \quad \bar{U}_+\bar{s} = 0 \tag{14}$$

$$\bar{U}_-\bar{u} = 0 \quad , \quad \bar{U}_-\bar{d} = 0 \quad , \quad \bar{U}_-\bar{s} = -\bar{d} \tag{15}$$

$$\bar{V}_+\bar{u} = -\bar{s} \quad , \quad \bar{V}_+\bar{d} = 0 \quad , \quad \bar{V}_+\bar{s} = 0 \tag{16}$$

$$\bar{V}_-\bar{u} = 0 \quad , \quad \bar{V}_-\bar{d} = 0 \quad , \quad \bar{V}_-\bar{s} = -\bar{u} \tag{17}$$

Se tiene que el espacio de los mesones es $3 \times \bar{3} = 8 \oplus 1$. Los operadores en este espacio $(q\bar{q})$ son de la forma $\Lambda = \Lambda \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \bar{\Lambda}$.
El estado del singlete es

$$|\eta\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\left(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}\right) \tag{18}$$

y es fácil ver que cumple $\lambda_i \left|\eta\right\rangle = o$ para todo i.
Tenemos en total 9 elementos: $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$, $u\bar{d}$, $u\bar{s}$, $d\bar{u}$, $d\bar{s}$, $s\bar{u}$ y $s\bar{d}$. Para formar el octete, podemos partir del de proyección máxima de isospín y, pidiendo ortogonalidad con el singlete en cada paso, armarnos todos los estados operando con los operadores escalera (que son un producto de los escalera por los anti-escalera).