ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2023

PRÁCTICA 7A: TEORÍAS DE GAUGE (CASO ABELIANO)

En esta guía y la que sigue consideraremos un concepto muy importante para el modelo estándar que es el de la simetría de gauge, que refleja una redundancia en la descripción de la física del modelo. Consideraremos primero la invariancia de gauge abeliana, que aparece en el electromagnetismo y luego la no-abeliana, que esta presente en las interacciones débil y fuerte.

Gauge symmetry is not a symmetry..A better phrase is Gauge redundancy

Nathan Seiberg

1. Considere la acción de un campo de Klein-Gordon complejo:

$$L = (\partial^\mu \phi)^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

(a) Verifique que el lagrangiano no queda invariante ante la transformación $\phi \to e^{i\alpha(x)}\phi$, siendo α una función arbitraria del espacio-tiempo. Es decir, verifique que este lagrangiano no tiene *invariancia local* ante $U(1)$.

(b) Considere ahora una modificación del caso anterior, en el que el campo escalar interactúa con otro campo cuadrivectorial A_μ :

$$L_{gauge} = D^*_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + \ldots$$

donde los punto suspensivos denota un términos cinéticos en A_μ, que en breve se introducirá a fin de darle dinámica a este campo. D_μ es la llamada *derivada covariante* $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$, con g una constante. Halle la forma en que debe transformar A_μ (transformación de gauge) para que el primer término de este lagrangiano quede invariante para todo α cuando $\phi \to e^{i\alpha(x)}\phi$.

(c) Muestre que el tensor $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ resulta ser invariante ante la transformación de A_μ hallada en el punto anterior. Esto permite proponer un término cinético para A_μ de la forma $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, *invariante de gauge*. ¿Porqué este término no describe interacciones para el campo A_μ.

(d) Halle las ecuaciones de movimiento del lagrangiano completo así obtenido, invariante ante $U(1)$-local:

$$L_{gauge} = D^*_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

y verifique que g hace las veces de "carga eléctrica", comparando estas ecuaciones con las de Maxwell con una fuente j^μ e identificando A_μ con el campo de Maxwell.

2. Verifique que un término de masa para el fotón (la partícula asociada a la cuantización de A_μ)

$$m^2 A_\mu A^\mu$$

rompe la invariancia local considerada en el ejercicio anterior.

3. Considere el Lagrangiano anterior con la adición de un término $\lambda(\phi^*\phi)^2$.

   (a) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción. Para ello, expanda el primer término diferenciando el término cinético del campo escalar y los términos cúbicos y cuarticos de interacción.

   (b) Si llamamos h y $\bar{h}$ a la partícula y antipartícula que surge de la cuantización del campo ϕ, dibuje los diagramas intervinientes en el scattering partícula-antipartícula $h+\bar{h} \to h+\bar{h}$. Por simplicidad, considere sólo los órdenes que no incluyan lazos en los diagramas. Especifique la potencia de g con la que viene pesado el diagrama.

4. A fin de fijar la idea de que el campo A_μ contiene un redundancia en los grados de libertad, considere la siguiente configuración:

$$A_0 = \alpha t^2 \quad A_1 = \beta x_1^4 \quad A_2 = 0 \quad A_3 = \gamma\, Senh(\delta x_3)$$

Muestre que el campo $F_{\mu\nu}$ es cero para esta configuración. Halle la transformación de gauge que lleva a A_μ a la forma $\tilde{A}_\mu = 0$. ¿Cual sería la forma mas general de A_μ cuyo $F_{\mu\nu}$ sea cero en todo punto? ¿Cual es la expresión de A_μ para el caso de un campo electrico constante en el eje z? (para ello debe recordar la relación entre $F_{\mu\nu}$ y las componentes del campo electrico y magnético)

5. Considere el campo de Dirac acoplado al campo electromagnético,

$$\mathscr{L}_{QED} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

siendo $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ (q es la carga del electrón en este caso, es decir, $-e$). El modelo que resulta de cuantizar esta lagrangiano es lo que se conoce como QED (quantum electrodynamics). La simetría ante $U(1)$ local es exactamente la del caso escalar.

   (a) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los vértices de interacción.

   (b) Dibuje los diagramas de Feynman, al orden árbol (es decir, sin loops) y al orden mas bajo en e, para los procesos:

   Scattering de Bahba: $e^-e^+ \to e^-e^+$

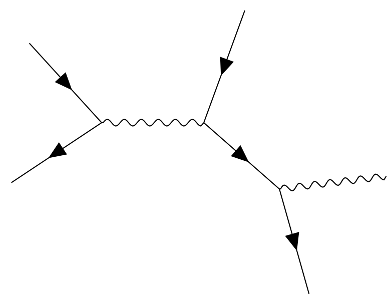
   Scattering de Møller: $e^-e^- \to e^-e^-$

6. Para el scattering de fotones $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$, dibuje el diagrama al orden mas bajo, permitiendo incluir loops, que contribuyen a este proceso. (ver Nota sobre scattering de fotones)

7. Considere de nuevo el scattering de un electrón y positrón. A nivel clásico se espera que estas partículas cargadas se acelerarán como consecuencia de su atracción y por ende emitirán radiación. El proceso más adecuado para describir eso sería de la forma:

$$e^- e^+ \to e^- e^+ \gamma$$

, con al menos un fotón en el estado final. Un diagrama posible sería el siguiente:



   (a) Dibuje otros diagramas de Feynman correspondiente a ese proceso, al orden más bajo posible y a nivel árbol.

   (b) Recordando las consideración de energía y masa de la guía 4, argumente que no existe un limite para la cantidad de fotones en el estado final. Es decir, argumente que procesos de la forma

   $$e^- \; e^+ \to e^- \; e^+ \; \gamma....$$

   donde los puntos suspensivos indican adiciones de fotones, son posibles desde el punto de vista de la conservación de energía y momento. Halle diagramas de Feynman para algunos casos (3 o 4 fotones finales). ¿Que pasa en el caso en que hay un solo fotón en el estado final?

   (c) Dibuje un diagrama de Feynman para el caso en que hay dos fotones en el estado final.

8. La invariancia $U(1)$ local de un lagrangiano requiere un solo campo de gauge (A_μ), aunque el lagrangiano contenga varios campos escalares o de Dirac acoplados a A_μ. A fin de ilustrar esto:

   (a) Escriba el Lagrangiano invariante $U(1)$ local que describe a dos campos de Dirac acoplados con A_μ, siendo sus constantes de acoplamiento q_1 y q_2.

   (b) Reescriba este lagrangiano organizando los dos campos de Dirac en un doblete Ψ. Muestre que la expresión de la derivada covariante puede reescribirse de esta forma: $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu Q$, con $Q \equiv \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$ y que la transformación de gauge puede escribirse en la forma:

   $$\Psi \to \Psi' = e^{i\alpha(x)Q}\Psi$$

   (c) Justifique porque este Lagrangiano es invariante ante $U(1)_{local}$ y no ante $U(1) \times U(1)$, a pesar de que la transformación se implemente por medio de una matriz de 2×2.

9. A fin de entrenarnos en la escritura del lagrangiano del modelo estándar , considere ahora solo las partículas fermionicas del modelo standard (las que conoce). Escriba la parte del lagrangiano que describe la interacción de estas con el campo electromagnético.