ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2023

PRÁCTICA 7B: TEORÍAS DE GAUGE (CASO NO-ABELIANO)

Q: Is it true what M.E. Mayer said in 1977: A reading of the Yang-Mills paper shows that the geometric meaning of the gauge potentials must have been clear to the authors since they use the gauge invariant derivative and the curvature for the connection ...

Yang: Totally false. What Mills and I were doing in 1954 was generalizing Maxwells theory. We knew of no geometrical meaning of Maxwells theory and were not looking in this direction. Connection is a geometrical concept which I only learned around 1970.

Q: An interesting question is whether you understood in 1954 the tremendous importance of your original paper ...

Yang: No. In 1950 we felt our work was elegant. I realized its importance in the 1960s and its great importance to physics in the 1970s. Its relation to deep mathematics became clear to me only after 1974.

Q: Is it important for a physicist to learn a lot of mathematics? Yang: No, if a physicist learns too much of mathematics, he or she is likely to be seduced by the value judgment of mathematics, and may loose his or her physical intuition. I have likened the relation between physics and mathematics to a pair of leaves. They share a small common part at the base, but mostly they are separate.

de una entrevista a Chen Nin Yang.

Figure 1: Robert Mills (derecha) y Chen Nin Yang

1. Considere el siguiente lagrangiano

$$\mathscr{L}_G = \left(\partial_\mu \Phi\right)^\dagger \left(\partial^\mu \Phi\right) - m^2 \Phi^\dagger \Phi$$

donde Φ es un doblete $\begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix}$ de campos escalares complejos [1] . Este Lagrangiano es invariante ante transformaciones de $U(2)$:

$$\Phi(x) \longrightarrow e^{-i(\beta \mathbf{1} + \alpha^a \cdot \frac{\sigma_a}{2})} \Phi(x)$$

donde β y los α^a ($a = 1,2,3$) son 4 constantes arbitrarias (reales). $\mathbf{1}$ es la matriz identidad de $2x2$.

   (a) A fin de asegurarse de que entiende que significa esta transformación, halle explícitamente como transforman los ϕ_A y ϕ_B en el doblete en los casos en que la única constante no nula es a) β b) α^3 c) α^2.

   (b) Considere ahora que quiere *gaugear*[2] el subgrupo $SU(2)$ que se obtiene fijando $\beta = 0$, es decir, que quiere obtener un lagrangiano nuevo, acoplando Φ a nuevos campos tales que el nuevo lagrangiano sea invariante ante $SU(2)$ pero con los α_a ahora funciones arbitrarias del espacio-tiempo. Para ello, la receta estándar comienza con sustituir ∂_μ en el término cinético del lagrangiano por $D_\mu \equiv \partial_\mu + igA^a_\mu T_a$ ($T_a \equiv \frac{\sigma_a}{2}$) y g una constante. Halle como deben transformar los A^a_μ para que $D_\mu \Phi$ transforme igual que Φ, es decir, para que

$$D_\mu \Phi \rightarrow e^{-i\alpha^a(x)\cdot \frac{\sigma_a}{2}} D_\mu \Phi$$

   de forma tal que $\left(D_\mu \Phi\right)^\dagger \left(D^\mu \Phi\right)$ quede invariante. Note que en este punto y lo que sigue en el próximo ejercicio no es necesario usar nada del caso $SU(2)$, el cuál fue elegido solo para fijar ideas. Observación: Puede ser útil pensar esa propiedad de transformación de $D_\mu \Phi$ como una propiedad de transformación del operador D_μ en si mismo: $D_\mu \rightarrow \Omega(x) D_\mu \Omega^{-1}(x)$ siendo $\Omega(x) \equiv e^{-i\alpha^a(x)\cdot \frac{\sigma_a}{2}}$).

2. A fin de construir el término que dará dinámica a los campos de gauge A^a_μ, necesitaremos un análogo al $F_{\mu\nu}$ del campo de Maxwell.

   (a) Muestre que el conmutador $G_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{ig}(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)$ es una combinación de los generadores del álgebra ($G_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu} T_a$) y que $G_{\mu\nu}$ transforma como $G_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^{-1}(x) G_{\mu\nu} \Omega(x)$.

   (b) Halle la forma explicita de $G_{\mu\nu}$ en términos de los campos A^a_μ y las constantes de estructura.

   (c) Muestre que $-\frac{1}{2} tr(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu})$ es invariante de gauge y es igual a $-\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a$ (aquí la posición distinta de los indices a en $G_{\mu\nu}$ no implica ningún cambio de signo).

[1] no hay modificación substancial si se usa un Lagrangiano para un doblete de espinores

[2] Verbo de dudosa aceptación en la RAE que denota el acto de transformar un lagrangiano invariante ante transformaciones determinado por ciertos parámetros constantes en otro en que esas constantes pasan a ser funciones arbitrarias del espacio-tiempo

Note que lo que está dentro de la traza no es invariante de gauge. El Lagrangiano completo, invariante de gauge, es entonces:

$$L = (D^{\mu}\Phi)^{\dagger} D_{\mu}\Phi - m^2\Phi^{\dagger}\Phi - \frac{1}{2}TrG_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$$

Esencialmente, esta fue la forma en que C.N. Yang y R. Mills hallaron un lagrangiano invariante ante una simetría $SU(2)$ denominada *isotopic invariance*. Ver *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, C. N. Yang and R. L. Mills Phys. Rev. 96, 191 (1954)

3. Para bajar más a tierra el caso anterior:

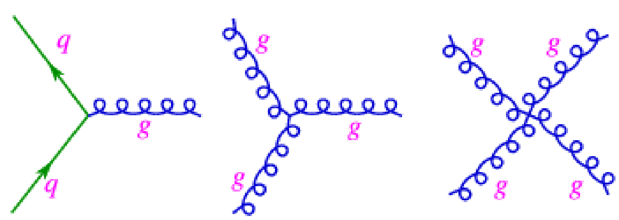
    (a) Halle explícitamente el término de acoplamiento de los campos ϕ_A y ϕ_B con los tres campos de gauge. ¿Como se modifican estos acoplamientos si se hubiese comenzado con un doblete de campos de Dirac?

    (b) Halle explícitamente la expresión de $G^a_{\mu\nu}$ y compare con el $F_{\mu\nu}$ de Maxwell.

    (c) Verifique que los términos cuadráticos en el 'término cinético para el campo de gauge son los de Maxwell para cada A^a_{μ} (con su normalización estándar).

    (d) Halle explícitamente los términos cubico y cuárticos de interacción entre los propios campos de gauge, mostrando que vienen pesados con g y g^2 respectivamente.

    (e) Dibuje los diagramas de Feynman para *todos* los términos de interacción (son muchos; ya lo sabemos. Pero hacerlo una vez ayudará a captar la complejidad de este modelo), mostrando la diferencia entre el caso que se trata de dobletes de campos escalares y de Dirac.



4. Discuta la veracidad de la siguiente afirmación: la diferencia entre los fotones y las partículas asociadas a los campos de Yang-Mills (ejemplo, los gluones) es que los primeros no interactúan entre si, mientras que en el segundo caso hay interacciones no triviales de orden g y g^2.

5. La transformación de gauge de los campos de gauge A^a_{μ} difieren de la del campo de Maxwell, tal como se vio en uno de los ítems del primer ejercicio. A fin de bajarla a tierra:

    (a) Halle la transformación de cada A^a_{μ} a primer orden en los parámetros α^a.

    (b) Halle ahora la transformación finita para el caso en que se gaugea $SU(2)$, usando la expresión

$$e^{i\vec{\theta}\frac{\vec{\sigma}}{2}} = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) 1_{2\times 2} + i\, sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{n}.\vec{\sigma}$$

de una matriz genérica de $SU(2)$, siendo $\vec{n}$ el versor definido por $\vec{\theta} = \theta\vec{n}$. Verifique a partir de la transformación finita, el resultado a primer orden previo.

6. Considere ahora un caso mas general, en que los campos escalares o de Dirac del ejercicio 1 se hallan en la representación fundamental de un grupo $U(n)$. Considere el problema de gaugear el subgrupo $SU(N)$ dado por ciertos generadores T_a, elegidos estos de tal forma que $Tr(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$. Reproduzca la receta del ejercicio 1 en este caso, siendo explicito en cuantos campos de gauge hay (en términos de N y que dimensión tienen las matrices T). Halle la expresión explicita de los $G^a_{\mu\nu}$ dejándolo expresado en términos de los campos y las constantes de estructura f^a_{bc} y dibuje esquemáticamente los tipos vértices de interacción.

7. Consideremos de nuevo el caso de una teoría de gauge de un doblete de fermiones con invariancia $SU(2)$ local. Este es un caso importante que aparecerá en la parte electrodébil del modelo estándar. En ese contexto, a los campos de la parte de $SU(2)$ correspondientes a los generadores $\frac{\sigma 1}{2}, \frac{\sigma 2}{2}, \frac{\sigma 3}{2}$ se los denota como W^1_μ,W^2_μ y W^3_μ respectivamente. Resultará conveniente reescribir todo el lagrangiano usar W^3_μ y otros dos campos $W^\pm_\mu$ que definimos como:

$$W^+_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu - iW^2_\mu)$$
$$W^-_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1_\mu + iW^2_\mu)$$

   No hay un typo aquí. Los signos menos y mas son los correctos.

   (a) Reescriba los términos que contienen el acoplamiento de los espinores con estos nuevos W?

   (b) Haga lo mismo para los términos de auto interacción de los campos de gauge.

   Preste atención en ambos casas a que combinaciones de productos aparecen. Dibuje los vértices correspondientes a los términos de interacción. Tenga en cuenta que W^- es el complejo conjugado de W^+, por lo que habrá lineas entrantes y salientes a un vértice. La cuantización del campo W complejo dará lugar a partículas y anti-partículas.

8. Este ejercicio tiene la finalidad de permitir el contacto con una notación habitual en la bibliografía y en particular en el paper de Yang y Mills. En el caso en que el grupo de gauge es $SU(2)$, las expresiones anteriores (tanto los campos de gauge como G) pueden reescribirse en términos de componentes de un vector tridimensional. Organizando los tres campos de gauge, que llamaremos W^a_μ,en un vector $\vec{W}_\mu \equiv (W^1_\mu, W^2_\mu, W^3_\mu)$ muestre que

   (a) Cada componente de $G_{\mu\nu}$ puede leerse de las componentes del vector:

$$\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu + g\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu$$

   (puede que halla un signo incorrecto en el segundo término)

   (b) A primer orden en los parámetros α^a de la transformación de gauge (organizadas ahora en un vector $\vec{\alpha}$), el campo $\vec{W}$ transforma como:

$$\vec{W}'_\mu = \vec{W}_\mu + factor \;\; g\vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu + factor \;\; \partial_\mu \vec{\alpha} \qquad (1)$$

   Verifique que esta transformación coincide con la hallada en un ejercicio anterior.

(c) Usando la forma de la transformación de $G_{\mu\nu}$ del ejercicio 2, verifique que $\vec{G}_{\mu\nu}$ transforma como lo hace un vector ante una rotación. (ayuda: necesitara usar la expresión de $e^{i\alpha^a\sigma_a}\sigma_b e^{-i\alpha^a\sigma_a}$)

(d) El término $-\frac{1}{2}\,Tr`\; G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ se puede reescribir como $-\frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}.\vec{G}^{\mu\nu}$.

La utilidad de esta reformulación está en que, en este ejemplo particular, la invariancia del término cinético del campo de gauge se puede ver como la invariancia más familiar ante rotaciones espaciales de un producto escalar.

9. **¿Qué pasó con el $U(1)$?** En los casos anteriores hemos dejado un $U(1)$ de lado por conveniencia. La razón está en que $U(N)$ se puede pensar como $U(1)\times SU(N)$ de tal forma que los generadores del álgebra de este $U(1)$ conmuten con los de $SU(N)$ [3]

(a) Verifique este es el caso del subgrupo del ejercicio 1 que se obtiene fijando los $\alpha^a = 0$.

(b) Muestre que si propone ahora gaugear el grupo completo, proponiendo $D_\mu = \partial_\mu + g' B_\mu \mathbf{1} + g A^a_\mu T_a$, la invariancia de gauge implica una transformación en la que el campo B_μ *no se mezcla* con los A^a_μ y que la transformación de B_μ es la usual del campo de Maxwell.

Por la razón anterior , el término cinético puede construirse como una suma del término de Maxwell para B_μ y el de Yang-Mills genérico para los A^a_μ. Este será el caso del sector electrodébil del modelos estándar. No lo hemos hecho desde el principio para no enredar la explicación. En general, al gaugear un grupo que se descompone en producto directo de otros, basta aplicar la receta original para cada subgrupo por separado y luego sumar las contribuciones de cada término cinético.

10. **Ejercicio clarificador de potenciales confusiones**: Al acoplar campos de Dirac o escalares a campos de gauge, el número de estos campos no tiene porque coincidir con la dimensión de la *representación fundamental*(que es la de dimensión mas baja) del grupo. El ejemplo anterior podría dar a pensar esto, dado que teníamos un doblete de campos escalares y la dimensión de la representación fundamental de $SU(2)$ es 2. A fin de subsanar este posible mal entendido:

(a) Considere un triplete de campos escalares reales y escriba el término cinético que tenga invariancia ante $SU(2)$.

(b) Sustituya la derivada ordinaria por la covariante adecuada. Vea que la cantidad de campos de gauge sigue siendo tres pero que deben modificarse los generadores al escribir la derivada covariante. (Ayuda: la representación de dimensión 3 del grupo $SU(2)$ es que usa cuando actúa con rotaciones en vectores)

[3] En realidad la relación entre $U(N)$ y $U(1)\times SU(N)$ no es tan obvia como puede parecer a primera vista. No vamos a detenernos en esta cuestión técnica.