Estructura de la materia 4 - 1c 2024
09/05/2024
Máximo Coppola

Guía 5 - Espinores de Dirac

Sabemos como transforma un vector ante una transformación de Lorentz Λ. ¿Pero cómo transforma un espinor ψ? Empecemos repasando cosas que sabemos del grupo de Lorentz.

Grupo de Lorentz

Representación Espacial

De relatividad especial sabemos que la velocidad de la luz es invariante para cualquier observador, lo que se cumple si (en notación matricial)

$$ds^2 = ds'^2 \;\Leftrightarrow\; \mathbb{X}^t.\mathbb{\eta}.\mathbb{X} = \mathbb{X}'^t.\mathbb{\eta}.\mathbb{X}' \tag{1}$$

con $\mathbb{X}^t = (t, x, y, z)$ (c=1) y $\mathbb{\eta} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ es la métrica de Minkoswki. Ante una transformación de Lorentz (TL) $\mathbb{X}' = \mathbb{\Lambda}.\mathbb{X}$ esto implica que

Grupo de Lorentz

$$\mathbb{\Lambda}^t.\mathbb{\eta}.\mathbb{\Lambda} \;=\; \mathbb{\eta} \tag{2}$$

Esta ecuación por si sola determina un grupo. En nuestro caso la hallamos representando al grupo por matrices reales de 4x4: $\mathbb{\Lambda}$.

El *álgebra* del grupo lo podemos obtener exponenciando y considerando transformaciones infinitesimales $\mathbb{\Lambda} = e^{\alpha\mathbb{A}} \simeq \mathbb{1} + \alpha\mathbb{A}$. Como $\mathbb{\eta}$ es su propia inversa tenemos que

$$\begin{aligned} &(\mathbb{1} + \alpha\mathbb{A}^t).\mathbb{\eta}.(\mathbb{1} + \alpha\mathbb{A}) \simeq \cancel{\mathbb{\eta}} + \alpha(\mathbb{A}^t.\mathbb{\eta} + \mathbb{\eta}.\mathbb{A}) = \cancel{\mathbb{\eta}} \\ \Leftrightarrow \quad &\mathbb{A} = -\mathbb{\eta}.\mathbb{A}^t.\mathbb{\eta} \end{aligned} \tag{3}$$

Para una matriz genérica $\mathbb{A}$ de componentes A^μ_ν, muestren que esto implica

$$\mathbb{A} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & A^0_1 & A^0_2 & A^0_3 \\ A^0_1 & 0 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^0_2 & -A^1_2 & 0 & A^2_3 \\ A^0_3 & -A^1_3 & -A^2_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Hay 6 grados de libertad: 3 Rotaciones + 3 Boost !

Los boost mezclan las componentes temporales y espaciales, así que corresponden a la parte simétrica de la matriz, mientras que las rotaciones mezclan sólo componentes espaciales y corresponden a la parte antisimétrica. Podemos encontrar los generadores descomponiendo la matriz en una base. Por cuestiones puramente convencionales de cómo se suele deducir esto en la literatura, donde parten de (3) pero usando que $(\eta.\mathbb{A}) = -(\eta.\mathbb{A})^t$ es antisimétrica y definen $\mathbb{W} \equiv \eta.\mathbb{A}$, definamos en cambio

$$\mathbb{A} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & -\omega_{12} & -\omega_{13} \\ \omega_{02} & \omega_{12} & 0 & -\omega_{23} \\ \omega_{03} & \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

donde le cambié el signo a las componentes puramente espaciales. Descomponiendo

$$\mathbb{A} \;=\; \omega_{01} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbb{M}^{01}} +\ldots+ \omega_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbb{M}^{12}} +\ldots \tag{6}$$

Llamemos a estos generadores $\mathbb{M}^{\mu\nu}$, con $\mu < \nu$ (notar que μ, ν etiquetan a la matriz, no son sus índices!). Para utilizar la convención de Einstein (índice repetido se suma), extendamos la cantidad de matrices y parámetros definiendo a $\mathbb{M}$ y ω como antisimétricos: $\mathbb{M}^{\nu\mu} = -\mathbb{M}^{\mu\nu}$ y $\omega_{\nu\mu} = -\omega_{\mu\nu}$. Con esto podemos definir la notación (el α se puede reabsorber en los $\omega_{\mu\nu}$)

$$\mathbb{A} \;=\; \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbb{M}^{\mu\nu} \quad\Rightarrow\quad \Lambda \;=\; e^{\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbb{M}^{\mu\nu}} \tag{7}$$

para una transformación general de Lorentz.

Dadas las matrices $(\mathbb{M}^{\mu\nu})^{\rho}_{\ \sigma} = \eta^{\mu\rho}\delta^{\nu}_{\sigma} - \eta^{\nu\rho}\delta^{\mu}_{\sigma}$, el álgebra del grupo, dado por la Ec. (3), puede escribirse en términos de los conmutadores como

Álgebra de Lorentz

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] \;=\; \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} \tag{8}$$

Físicamente, los parámetros $\omega_{\mu\nu}$ tienen que estar relacionados con los grados de libertad de rotaciones y boosts (ángulos y velocidades), mientras que los generadores $\mathbb{M}^{\mu\nu}$ espaciales se deben reducir a los generadores de rotación que ya conocemos. Sabemos como son las matrices de rotación y boost. Comparando ambas expresiones infinitesimalmente para una rotación en $\hat{3}$ y un boost en $\hat{1}$

$$\text{ROT} \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\omega_{12}\mathbb{M}^{12}+\frac{1}{2}\omega_{21}\mathbb{M}^{21}} \;=\; e^{\omega_{12}\mathbb{M}^{12}} \;\simeq\; \mathbb{1}+\omega_{12}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \;\equiv\; \mathbb{1}+\omega_{12}\mathbb{M}^{12} \\ \\ \mathbb{R}_3 \;=\; \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta_3&-\sin\theta_3&0\\0&\sin\theta_3&\cos\theta_3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \;\simeq\; \mathbb{1}+\theta_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \;\equiv\; \mathbb{1}+\theta_3\mathbb{L}_3 \end{cases} \tag{9}$$

entonces $\omega_{12}=\theta_3$ y $\mathbb{M}^{12}=\mathbb{L}_3$. Para los boosts

$$\text{BOOST} \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\omega_{01}\mathbb{M}^{01}+\frac{1}{2}\omega_{10}\mathbb{M}^{10}} \;=\; e^{\omega_{01}\mathbb{M}^{01}} \;\simeq\; \mathbb{1}+\omega_{01}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \;\equiv\; \mathbb{1}+\omega_{01}\mathbb{M}^{01} \\ \\ \mathbb{B}_1 \;=\; \begin{pmatrix}\gamma&-\gamma\beta_1&0&0\\-\gamma\beta_1&\gamma&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \;\simeq\; \mathbb{1}-\beta_1\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \;\equiv\; \mathbb{1}-\beta_1\mathbb{K}_1 \end{cases} \tag{10}$$

y de acá uno concluiría rápido que $\omega_{01}=-\beta_1$. Pero resulta que eso está *mal*.
Miremos la transformación completa, donde un boost general lo escribimos como una sucesión de n boosts de velocidad ξ_1/n. Muestren que (ejercicio 9.c)

$$\text{BOOST}\quad\begin{cases} e^{\omega_{01}\mathbb{M}^{01}} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega_{01}\mathbb{M}^{01})^n}{n!} \;=\; \begin{pmatrix}\cosh\omega_{01} & \sinh\omega_{01} & 0 & 0\\ \sinh\omega_{01} & \cosh\omega_{01} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ \\ \mathbb{B}_1 \;=\; \begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta_1 & 0 & 0\\ -\gamma\beta_1 & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{1}-\frac{\xi_1}{n}\mathbb{K}_1\right)^n \;=\; e^{-\xi_1\mathbb{K}_1}\end{cases} \tag{11}$$

y por lo tanto $\omega_{01} = -\xi_1$ y $\mathbb{M}^{01} = \mathbb{K}_1$, con

$$\bullet\ \cosh\xi_1 = \gamma\,,\qquad \bullet\ \sinh\xi_1 = \gamma\beta_1\,,\qquad \bullet\ \tanh\xi_1 = \beta\,,\qquad \bullet\ \cosh\xi_1^2 - \sinh\xi_1^2 = 1\ \checkmark \tag{12}$$

La línea inferior nos cuenta que hacer n boosts sucesivos de velocidad ξ_1/n no da un boost de velocidad ξ_1, sino $\beta_1 = \tanh\xi_1$.
Esto se debe a la ley de adición de velocidades relativistas, que no es simplemente sumar velocidades, ya que sino podría pasarme de la velocidad de la luz. La ley dice que al hacer dos boost sucesivos, la velocidad resultante es

$$\beta \;=\; \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} \quad\Rightarrow\quad \tanh\xi \;=\; \tanh(\xi_1+\xi_2) \quad\Rightarrow\quad \xi \;=\; \xi_1+\xi_2 \tag{13}$$

Lo que sí se adiciona es este parámetro $\tanh\xi = \beta$, llamado *rapidez*.

Haciendo este ejercicio en todas las direcciones, identificamos (omitiendo la doble raya para la notación matricial)

$$\begin{cases} K_i = M^{0i} \\ L_i = \epsilon_{ijk}M^{jk}/2 \end{cases}\quad,\quad \begin{cases} \xi_i = -\omega_{0i} \\ \theta_i = \epsilon_{ijk}\omega_{jk}/2 \end{cases} \tag{14}$$

que cumplen las reglas de conmutación

$$\bullet\,[L_i, L_j] \;=\; \epsilon_{ijk}L_k \quad,\quad \bullet\,[K_i, K_j] \;=\; -\epsilon_{ijk}L_k \quad,\quad [L_i, K_j] \;=\; \epsilon_{ijk}K_k \tag{15}$$

Las rotaciones son cerradas (devuelven otra rotación) y forman un subgrupo. En cambio los boosts se mezclan; hacer 2 boosts me da una combinación entre rotar y hacer un boost. Así que para formar el grupo completo de Lorentz necesito de ambos.

Notar el signo menos en la segunda ecuación! Mientras que $0 \le \theta \le 2\pi$, para los boosts el grupo es no compacto: si $-1 \le \beta \le 1$ entonces $-\infty \le \xi \le \infty$. Estas transformaciones no son unitarias.

Grupo de Lorentz: Representación Espacial

$$\Lambda \;=\; e^{\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} \;=\; e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}} \;=\; e^{\vec{\theta}\vec{L}-\vec{\xi}\vec{K}} \quad\rightarrow\quad \Lambda^t.\eta.\Lambda \;=\; \eta \tag{16}$$

Los generadores cumplen

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] \;=\; \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}$$

Separándolos en generadores de rotaciones y boosts

$$\begin{cases} K_i = M^{0i} \\ L_i = \epsilon_{ijk}M^{jk}/2 \end{cases} , \quad \begin{cases} \xi_i = -\omega_{0i} \\ \theta_i = \epsilon_{ijk}\omega_{jk}/2 \end{cases} , \quad J^{\mu\nu} \;=\; iM^{\mu\nu}$$

- $L_1 = M^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ • $L_2 = -M^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ • $L_3 = M^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $K_1 = M^{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ • $K_2 = M^{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ • $K_3 = M^{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• $[L_i, L_j] \;=\; \epsilon_{ijk}L_k$, • $[K_i, K_j] \;=\; -\epsilon_{ijk}L_k$, $[L_i, K_j] \;=\; \epsilon_{ijk}K_k$

Una rotación o boost general vienen dados por

$$\begin{cases} \Lambda_R = \mathbb{1} + \sin\theta(\hat{n}.\vec{L}) + (1-\cos\theta)(\hat{n}.\vec{L})^2 \\ \Lambda_B = \mathbb{1} - \sinh\xi(\hat{n}.\vec{K}) + (\cosh\xi - 1)(\hat{n}.\vec{K})^2 \end{cases}$$

Representación Espinorial

Vieron en la teórica que si transformamos un espinor $\psi'(x') = S_\Lambda \psi(x)$, la ecuación de Dirac mantiene su forma (es covariante) si

$$S_\Lambda^{-1}\,\gamma^\mu\, S_\Lambda \;=\; \Lambda^\mu_{\ \nu}\,\gamma^\nu \tag{17}$$

Como S_Λ representa una transformación de Lorentz, debe tener la forma vista anteriormente, aunque sea con otros generadores. Elijamos la forma

$$S_\Lambda \;=\; e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}} \tag{18}$$

donde los parámetros físicos $\omega_{\alpha\beta}$ se identifican con $\vec{\theta}$ y $\vec{\xi}$ como antes, ver Ec. (14). Tenemos que encontrar la nueva representación de los generadores para este espacio vectorial espinorial.

Haciendo transformaciones infinitesimales de $S_\Lambda \simeq \mathbb{1} - \omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}/2$ y $\Lambda^\mu_{\ \nu} \simeq \delta^\mu_\nu + \omega_{\alpha\beta}(M^{\alpha\beta})^\mu_{\ \nu}/2$, reemplazando en la condición (17) se puede mostrar que

$$\Sigma^{\alpha\beta} \;=\; \frac{i}{4}\,[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \tag{19}$$

Estos generadores efectivamente satisfacen las reglas de conmutación (3) (ajustar factor i) del álgebra de Lorentz!

La deducción hasta ahora fue intuitiva, partiendo de bases físicas llegamos a la ecuación del grupo de Lorentz (2) con matrices $\mathbb{\Lambda}$ reales de 4x4. Pero podríamos pensar al revés: el grupo de Lorentz está *definido* por la Ec. (2), con $\mathbb{\Lambda}$ un objeto cualquiera que satisfaga la ecuación. Lo mismo con su álgebra (3). Ahora, hay muchos objetos que satisfacen esas relaciones: constituyen distintas representaciones. Recién vimos dos casos específicos de representaciones que cumplen esas relaciones: la espacial (o vectorial) –matrices 4x4 aplicadas sobre cuadrivectores x^μ– y la espinorial –matrices de 4x4 aplicadas sobre campos $\psi(x)$.

Otra representación podría ser la trivial: $M^{\mu\nu} = 0 \to \Lambda = 1$ satisfacen las ecuaciones (3) y (2), pudiendo ser números o matrices. Esta es la representación de los campos escalares de Klein-Gordon: ante una transformación de Lorentz, $\phi'_\alpha(x') = \phi_\alpha(x)$.

Otra representación podría ser la tensorial, formada por el producto tensorial directo de copias de representaciones vectoriales, donde los generadores y elementos serían matrices de 16x16 $\Lambda^{\rho\sigma}_{\ \ \rho'\sigma'}$ tal que $T'^{\rho\sigma} = \Lambda^{\rho\sigma}_{\ \ \rho'\sigma'} T^{\rho'\sigma'} = \Lambda^\rho_{\ \rho'}\Lambda^\sigma_{\ \sigma'} T^{\rho'\sigma'}$. O la representación adjunta, de matrices de 6x6. Y así infinito. La teoría de grupos es la encargada de explicarnos como organizar estas representaciones de los objetos físicos, partiendo de las simetrías del espacio-tiempo.

Grupo de Lorentz: Representación Espinorial

$$S_\Lambda \;=\; e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}} \;=\; e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}.\vec{\Sigma}-\frac{1}{2}\vec{\xi}.\vec{\alpha}} \quad\rightarrow\quad S_\Lambda^{-1}\,\gamma^\mu\,S_\Lambda \;=\; \Lambda^\mu_\nu\,\gamma^\nu \tag{20}$$

Los generadores cumplen

$$[\Sigma^{\mu\nu},\Sigma^{\rho\sigma}] \;=\; i\,(\eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma}-\eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma}+\eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\nu\rho}-\eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\mu\rho})$$

Una rotación general viene dada por

$$\Sigma^{ij} \;=\; \frac{\epsilon_{ijk}}{2}\begin{pmatrix}\sigma_k & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & \sigma_k\end{pmatrix} \;\equiv\; \frac{\epsilon_{ijk}}{2}\,\Sigma_k \quad\longrightarrow\quad S_R \;=\; e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}.\vec{\Sigma}} = \begin{pmatrix}e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}.\vec{\sigma}} & \mathbb{0}\\ \mathbb{0} & e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}.\vec{\sigma}}\end{pmatrix}$$

donde recordemos que $e^{-i\vec{\theta}.\vec{\sigma}/2} = \cos(\theta/2) - i\,\hat{n}.\vec{\sigma}\,\sin(\theta/2)$.

Un boost general viene dado por

$$\Sigma^{0i} \;=\; \frac{i}{2}\begin{pmatrix}\mathbb{0} & \sigma_i\\ \sigma_i & \mathbb{0}\end{pmatrix} \;\equiv\; \frac{i}{2}\,\alpha_i \quad\longrightarrow\quad S_B \;=\; e^{-\frac{1}{2}\vec{\xi}.\vec{\alpha}} = \begin{pmatrix}\cosh(\xi/2) & -\hat{n}.\vec{\sigma}\,\sinh(\xi/2)\\ -\hat{n}.\vec{\sigma}\,\sinh(\xi/2) & \cosh(\xi/2)\end{pmatrix}$$

Separando los generadores de rotaciones y boosts

$$\begin{cases}\mathcal{K}_i = \Sigma^{0i} = i\alpha_i/2\\ S_i = \epsilon_{ijk}\Sigma^{jk}/2 = \Sigma_i/2\end{cases} \quad , \quad \begin{cases}\xi_i = -\omega_{0i}\\ \theta_i = \epsilon_{ijk}\omega_{jk}/2\end{cases}$$

$$\bullet\,[S_i,S_j] \;=\; i\epsilon_{ijk}S_k \quad , \quad \bullet\,[\mathcal{K},\mathcal{K}_j] \;=\; -i\epsilon_{ijk}S_k \quad , \quad [S_i,\mathcal{K}_j] \;=\; \epsilon_{ijk}\mathcal{K}_k$$

$$\underline{\text{Paridad}}:\quad \mathcal{P}^\mu_{\ \nu} \;=\; \begin{pmatrix}1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{pmatrix} = \delta^\mu_{\ 0}\delta^0_{\ \nu} - \delta^\mu_{\ i}\,\delta^i_{\ \nu} \quad\Rightarrow\quad S_{\mathcal{P}} \;=\; \gamma^0$$

Spin en espinores

Recién vimos que en el espacio de Dirac las rotaciones intrínsecas (osea sobre el campo ψ, en contraste con rotaciones espaciales sobre la dependencia espacial x del campo) se escriben como una suma de directa de rotaciones $e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}.\vec{\sigma}}$, que son las rotaciones de spin que vimos en Teórica 2 para el caso no-relativista. Esto da una primera pista de la ecuación de Dirac y sus soluciones ya contienen spin, no como en la ec. de Schrodinger que se lo agregábamos aparte.

Es más, los generadores de rotación $S_i = \Sigma_i/2$ satisfacen las mismas reglas de conmutación que las matrices de spin de SU(2) ($J_i = \sigma_i/2$): $[S_i, S_j] \; = \; i\epsilon_{ijk}S_k$.

Para verlo sobre las soluciones mismas, consideremos las soluciones en reposo ($\vec{p} = 0$)

$$\psi^{(1)} \; = \; e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\quad \psi^{(2)} \; = \; e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\quad \psi^{(3)} \; = \; e^{+imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\quad \psi^{(4)} \; = \; e^{+imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Aunque (1)-(2) y (3)-(4) están degeneradas en energía ($+m$ y $-m$), los puedo distinguir mediante el mismo operador $S_z = \Sigma_z/2$

$$S_z \; = \; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_z \, \psi^{(1,3)} \; = \; +\frac{1}{2} \, \psi^{(1,3)} \\ S_z \, \psi^{(2,4)} \; = \; -\frac{1}{2} \, \psi^{(2,4)} \end{cases} \tag{22}$$

Es decir, representan partículas y antipartículas con $s_z = \pm 1/2$.

Para terminar de convencerse está el ejercicio 7.b, sobre la conservación del momento angular. Allí tienen que mostrar que el momento angular orbital $L_i \; = \; (\vec{r} \times \vec{p})_i \; = \; \epsilon_{ijk} r_j (-i\partial_k)$ no se conserva porque no conmuta con el Hamiltoniano ($\mathcal{H}\psi = i\partial_t\psi$)

$$[\mathcal{H}, \vec{L}] \; = \; -\vec{\alpha} \times \vec{\nabla} \; = \; -i\, \vec{\alpha} \times \vec{p} \tag{23}$$

Guiado por lo anterior, si probamos con el spin definido como $\vec{S} = \vec{\Sigma}/2$ podemos chequear que tampoco se conserva. Sin embargo el momento angular total de la partícula, dado por la suma de su parte orbital más spin, si se conserva:

Conservación de momento angular total

$$Si \;\; \vec{J} \; = \; \vec{L} + \vec{S} \; = \; \vec{L} + \frac{\vec{\Sigma}}{2} \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{H}, \vec{J}\,] \; = \; 0 \tag{24}$$

Helicidad: Aunque el spin no se conserva, la *helicidad* sí

$$h \; = \; \vec{J}.\hat{p} \; = \; \cancel{(\vec{r} \times \vec{p}).\vec{p}} + \vec{S}.\hat{p} \; = \; \vec{S}.\hat{p} \; = \; \frac{\vec{\Sigma}}{2}.\hat{p} \; = \; cte \tag{25}$$

Transformaciones espinoriales

Armados con las transformaciones de Lorentz espaciales $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ y espinoriales $\psi' = S_{\Lambda}\psi$ tal que $S_{\Lambda}^{-1}\gamma^{\mu}S_{\Lambda} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$, podemos construirnos objetos espinoriales que transformen como escalares, cuadrivectores, etc. Esto es lo que pide justamente el ejercicio 11.

(a) Probar que $S^{\dagger}\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$.

Dagueando la condición (17) y usando que $(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})^{\dagger} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ porque son números reales (no estoy dagueando una matriz, sino sus componentes) junto con la propiedad $(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0$ tenemos

$$(S^{-1}\gamma^{\mu}S)^{\dagger} \;=\; (\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu})^{\dagger} \;\Leftrightarrow\; S^{\dagger}\gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0(S^{-1})^{\dagger} \;=\; \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^0\gamma^{\nu}\gamma^0 \tag{26}$$

Multiplicando a izquierda y derecha por γ^0 y usando que $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$

$$[\gamma^0 S^{\dagger}\gamma^0]\,\gamma^{\mu}\,[\gamma^0(S^{-1})^{\dagger}\gamma^0] \;=\; \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu} \;=\; S^{-1}\gamma^{\mu}S \tag{27}$$

Igualando componente a componente a la derecha e izquierda del γ^{μ} probamos lo pedido.

(b) Usando (a), el campo $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^0$ transforma como

$$\bar{\psi}' \;=\; \psi'^{\dagger}\gamma^0 \;=\; \psi^{\dagger}S^{\dagger}\gamma^0 \;=\; \psi^{\dagger}\gamma^0 S^{-1} \;=\; \bar{\psi}\,S^{-1} \tag{28}$$

(c) El **escalar** de Lorentz no es $\psi^{\dagger}\psi$ como uno esperaría, sino

$$(\bar{\psi}\psi)' \;=\; \bar{\psi}'\psi' \;=\; \bar{\psi}\,S^{-1}\,.\,S\,\psi \;=\; \bar{\psi}\psi \tag{29}$$

Yendo a teoría de campos, $\psi^{\dagger}\psi \sim N + \bar{N}$ está relacionado con el número total de partículas, que no se conserva. En cambio la diferencia entre el número de partículas y antipartículas, $\bar{\psi}\psi \sim N - \bar{N}$, sí se conserva.

(d) Esperamos que un **cuadrivector** transforme según $j'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} j^{\nu}$. Resulta ser que

$$(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)' \;=\; \bar{\psi}'\gamma^{\mu}\psi' \;=\; \bar{\psi}\,S^{-1}\,\gamma^{\mu}\,S\,\psi \;=\; \bar{\psi}\,\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}\,\psi \;=\; \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\bar{\psi}\,\gamma^{\nu}\,\psi \tag{30}$$

Aprecien lo ingenioso de la notación: aunque ψ no es un cuadrivector y γ^{μ} es un arreglo de 4 matrices cualquiera, es decir no transforma como un cuadrivector, la combinación $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ sí lo hace. Notar que como $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^0$ entonces $j^0 = \psi^{\dagger}\psi$.

<u>Extra</u>: $\bar{\psi}\Sigma^{\mu\nu}\psi$ transforma como un **tensor** antisimétrico.

Quiralidad

Sabiendo como transforman los campos espinoriales fuimos capaces de construirnos cantidad bilineares tipo $\bar{\psi}(4 \times 4)\psi$ que son covariantes de Lorentz: escalares, cuadrivectores y tensores. Pero nos faltan dos: pseudo-escalares y cuadrivectores axiales.

Para simplificar la notación vamos a introducir la siguiente definición

$$\gamma^5 \;=\; i\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \;=\; \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \{\gamma^5, \gamma^\mu\} \;=\; 0 \\ (\gamma^5)^\dagger \;=\; \gamma^5 \\ (\gamma^5)^2 \;=\; \mathbb{1} \end{cases} \tag{31}$$

Usando que $\gamma^5\, S_{\mathcal{P}} = -S_{\mathcal{P}}\, \gamma^5$ se puede verificar que las cantidades $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ y $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ transforman como escalares y cuadrivectores pero que ante paridad cambian de signo.

Con esta nueva matriz podemos definir proyectores quirales 'Right' y 'Left'

$$P_R \;=\; \frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2}\;, \quad P_L \;=\; \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} P_{R,L}^2 \;=\; P_{R,L} \\ P_R P_L \;=\; P_L P_R \;=\; 0 \\ P_R + P_L \;=\; \mathbb{1} \end{cases} \tag{32}$$

y así separar el espinor de Dirac en sus proyecciones

$$\psi \;=\; (P_R + P_L)\psi \;=\; \psi_R + \psi_L \tag{33}$$

con autovalores definidos de quiralidad

$$\begin{cases} \psi_R \;=\; P_R\psi \\ \psi_L \;=\; P_L\psi \end{cases} \;, \quad \begin{cases} \bar{\psi}_R \;=\; \bar{\psi}P_L \\ \bar{\psi}_L \;=\; \bar{\psi}P_R \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \gamma^5\,\psi_R \;=\; +\psi_R \\ \gamma^5\,\psi_L \;=\; -\psi_L \end{cases} \tag{34}$$

Si estudiamos su conservación veremos que

$$[\gamma^5, \mathcal{H}] \;=\; 2m \begin{pmatrix} \mathbb{0} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{0} \end{pmatrix} \tag{35}$$

Por lo tanto la quiralidad no se conserva si $m \neq 0$, y viceversa.

Veamos como esto afecta la ecuación de Dirac. Usando las propiedades (32)

$$0 \;= (i\,\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \;=\; (i\,\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,(P_R\psi_R + P_L\psi_L) \tag{36}$$

$$= P_L\, i\,\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R + P_R\, i\,\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L - P_R\, m\psi_R - P_L\, m\psi_L \tag{37}$$

$$= P_L\,(i\,\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R - m\psi_L) + P_R\,(i\,\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L - m\psi_R) \tag{38}$$

Como proyectan sobre subespacios diferenes, deben anularse por separado, entonces

$$\spadesuit \quad i\,\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R - m\psi_L \;=\; 0 \qquad , \qquad \clubsuit \quad i\,\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_R \;=\; 0 \tag{39}$$

Vemos que el término de masa mezcla quiralidades: la evolución acopla Left con Right a menos que $m = 0$.