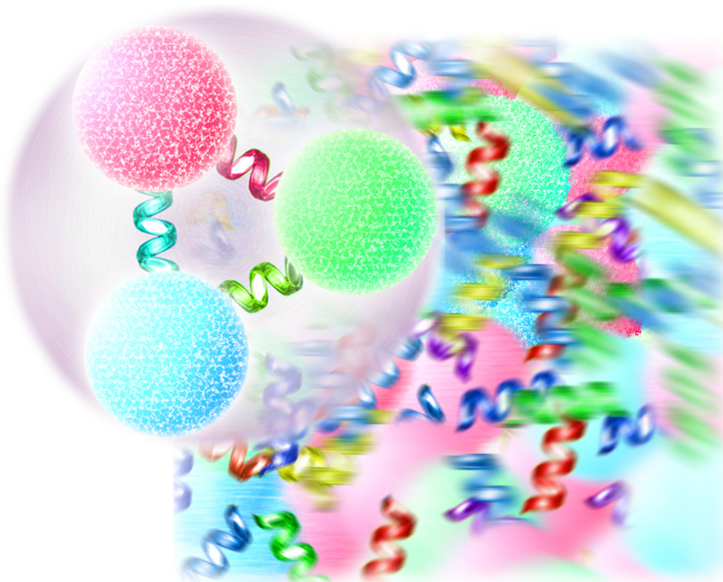
ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

PRIMER CUATRIMESTRE 2024

PRÁCTICA 3: SIMETRÍA $SU(3)$ Y MODELO DE QUARKS



1. Generalidades sobre grupos de Lie relevantes para esta materia

1. Busque la definición de los grupos $U(1)$, $U(2)$ y $U(3)$, $SU(2)$ y $SU(3)$ y diga en cada caso cual es su dimensión. De ejemplos de matrices en cada grupo (que no sean la matriz identidad!).

2. Una matriz arbitraria de SU(3) se puede e¨scribir como

$$M(\vec{\varepsilon}) = e^{i\vec{\varepsilon}.\frac{\vec{\lambda}}{2}}$$

donde $\vec{\varepsilon}$ son parámetros reales que sirven para caracterizar la matriz, y $\vec{\lambda}$ son matrices de 3×3.
a) Muestre que las λ son hermíticas y que tienen traza cero.
b) Muestre que deben ser ocho, ni más ni menos.

Una base posible estándar son las siguientes (análogas de las matrices de Pauli pero para SU(3)):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Verifique que λ_1, λ_2, y λ_3 satisfacen las reglas de conmutación del álgebra de SU(2). En realidad hay dos ternas más con esta propiedad: una está formada por λ_4, λ_5 y...(encuentre la que falta), la otra es λ_6, λ_7 y una tercera que también debe encontrar.
b) Verifique que $I_\pm \equiv \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$, $U_\pm \equiv \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7)$, y $V_\pm \equiv \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5)$ son los elementos análogos de subida y de bajada para el isospín, u-espín, y v-espín (son nombres, nada más). Pero...qué suben y qué bajan?
c) Los generadores λ_a satisfacen ciertas reglas de conmutación $[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}] = i\, f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}$ (relaciones análogas a las de las matrices de Pauli de SU(2)) . Muestre las identidades de SU(3) de la siguiente tabla

$SU(2)$	$SU(3)$
$tr\,\sigma_i = 0$	$tr\,\lambda_a = 0$
$tr\,\sigma_i\sigma_j = 2\delta_{ij}$	$tr\,\lambda_a\lambda_b = 2\delta_{ab}$
$[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}] = i\,\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}$	$[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}] = i\, f_{abc}\frac{\lambda_c}{2}$

donde las constantes de estructura f_{abc} son antisimétricas ante el intercambio de pares cualquier par de índices ($f_{123} = 1$, $f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}$). En general f_{abc} es antisimétrica en los dos primeros índices, pero para SU(N) sucede que la antisimetría se da en cualquier par.

2. Quarks y representaciones de $SU(3)$

3. Como todo grupo de Lie, SU(3) y su álgebra su(3) tienen varias representaciones (ver guía complementaria). La elección de arriba es una representación de dimensión 3 y se llama la fundamental (matrices de 3×3) y es la de dimensión más baja (veremos más adelante otra similar, la antifundamental). Veamos cómo SU(3) actúa en los quarks. Formemos un espacio vectorial de dimensión 3:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) De un ejemplo de una transformación de SU(3) que mande u a d, a menos de una fase. Ahora

encuentre otra que manda u a s, a menos de una fase. No necesita aprender ninguna técnica para esto. Es solo cuestión de probar.
b) Ubique los autovalores de $\lambda_8/\sqrt{3}$ y $I_3(\lambda_3/2)$ correspondientes a los 3 quarks, en un diagrama bidimensional.
c) Dibuje con flechas cómo se conectan estos quarks mediante los operadores de subida y bajada del ejercicio anterior.
Ojo: Note la diferencia conceptual entre las transformaciones que conectan quarks del item a), y aquellas del item c).

4.  (**Precalentando para el ejercicio siguiente**) Considere la simetría $\mathrm{SU}(2)$ y tres partículas en la representación $j = 1/2$.

   a)Muestre (construyéndolo explícitamente) que el espacio de Hilbert total se descompone en suma de representaciones irreducibles, dos $j = 1/2$ y una $j = 3/2$:

   $$2 \otimes 2 \otimes 2 = 2_{MA} \oplus 2_{MS} \oplus 4$$

   donde MS y MA refieren a mixto simétrico y mixto antisimétrico respectivamente.

   b) Ahora vamos a considerar que cada partícula tiene spin e isospin. Como más tarde agregaremos el color que viene siempre con antisimetría, queremos ahora que la función de onda (spin$\times$isospin) sea totalmente simétrica. Muestre que, a fin de que la función de onda total tenga la simetría adecuada para un sistema de fermiones, al isospin 3/2 le corresponde necesariamente spin 3/2 y su función de onda de spin isospin debe hallarse en la $4 \otimes 4$; mientras que para el caso isospin total $1/2$ la función de onda de spin-isospin debe estar en $2_{MA}^{(spin)} \otimes 2_{MA}^{(isospin)} + 2_{MS}^{(spin)} \otimes 2_{MS}^{(isospin)}$.

5.  Los bariones están constituídos por tres quarks, y cada uno lo representamos en la representación fundamental de $\mathrm{SU}(3)$ (simetría de sabor). En analogía al ejercicio anterior, se puede obtener la siguiente descomposición de productos de tres representaciones de $\mathrm{SU}(3)$, y los bariones quedan descritos en el espacio total:

   $$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8_{MA} \oplus 8_{MS} \oplus 10$$

   a) Considere aquellos bariones formados solo por u y d. Aprovechando que podemos aplicar la descomposición del ejercicio anterior (pensando en el $\mathrm{SU}(2)$ subgrupo de $\mathrm{SU}(3)$ que mezcla solo estos quarks), construya las funciones de onda de dichos bariones (neutrón y protón en el octete y Deltas en el decuplete).

   b) Utilizando los operadores de subida y bajada de $\mathrm{su}(3)$, o por argumentos de simetría, construya las restantes funciones de onda del decuplete. Verifique que por distintos caminos llega a la misma partícula.

6. Muestre que el singlete del ejercicio anterior debe ser totalmente antisimétrico. A fin de ver esto, siga estos pasos:

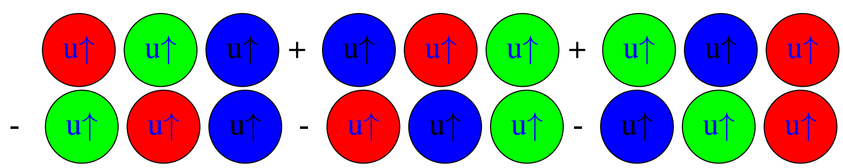
a) Escriba la combinación totalmente antisimétrica y muestre que esta es aniquilada por todos los operadores de subida y bajada

b) Muestre que esto implica que es aniquilada por cualquier combinación de matrices de Gell-Mann y por ende, un elemento del grupo $SU(3)$ lo deja invariante. Esto es equivalente a decir que es un singlete de $SU(3)$. Es importante que entienda porque son equivalentes esas 2 nociones.

c) Habiendo hecho estos pasos, plantee ahora una combinación arbitraria de productos de a 3 elementos (u, d, s) y deduzca que la única combinación aniquilada por todos los operadores de subida y bajada es la completamente antisimétrica

7. Sabiendo que la función de onda de la parte de color es antisimétrica, concluya que el singlete de sabor del ítem anterior no sirve para construir bariones.

8. A fin de entender la relevancia de la parte de color en la construcción de los estados, considere un hadrón formado por tres quarks u: *uuu*. Si su función de onda fuese solo esta y la parte de spin (por simplicidad, consideremos todas las proyecciones de spin $+1/2$), el estado correspondiente no tendría la simetría esperada. Sin embargo, al incluir la parte de color, el estado podría ser este:



Responda ahora porque este estado si es compatible con la estadística esperada para un sistema de fermiones.

9. Ahora armamos el octete. Nuevamente, construya el protón (p) y neutrón (n) como en el ejercicio anterior.

a) A partir de p y n, construya las funciones de onda de las partículas del perímetro del octete usando los operadores de subida y bajada de su(3).

b) Ahora muestre que a partir de un estado del perímetro del octete se llega a Σ^0 solo si se empieza desde Σ^+ o Σ^-. Si se parte de otro estado se llega a una combinación de Σ^0 y Λ^0, (note que tienen los mismos valores de extrañeza S=-1 y componente de isospin I_3=0). En qué se diferencian entonces? ¿Como reflejan sus respectivas funciones de SU(3) esta diferencia? (Sugerencia: recuerde que además de I_3, el otro número cuántico que las caracteriza es el módulo de isospin).

10. Complete el octete y decuplete con los datos empíricos de las masas de los hadrones que representan, y compare el grado de aproximación entre la simetría $su(2)$ y la $su(3)$. Luego compare la masa de cada hadrón con la suma de las masas de sus quarks constituyentes tal como aparecen en las tablas de partículas elementales. Note la diferencia entre los valores de masas de estos con aquellos para los quarks inmersos en un hadrón. Busque en la bibliografía una explicación de esta gran diferencia.

11. Conociendo las cargas de los quarks u, d y s, halle una expresión para la carga Q del hadrón en términos de la proyección de isospin y la extra nesa (o en términos de la hipercarga total $Y = B + S$, siendo B el número barionico, igual a $\frac{1}{3}$ para cada quark), confirmando la formula de Gell-Mann Nishijima: $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$, consistentemente con el grafico del eje Q en la figura.

12. A partir de la función de onda de la partícula Λ en las representaciones correspondientes a los octetes simétrico y antisimétrico, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{mixta}-\text{anti}} &= \frac{1}{\sqrt{12}}(2(ud-du)s+(us-su)d+(sd-ds)u) \\
\Phi_{\text{mixta}-\text{sim}} &= \frac{1}{2}((ds+sd)u-(us+su)d) \\
\chi^{\uparrow}_{\text{mixta}-\text{anti}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow)\uparrow \\
\chi^{\uparrow}_{\text{mixta}-\text{sim}} &= \frac{1}{\sqrt{6}}((\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow)\uparrow-2\uparrow\uparrow\downarrow)
\end{aligned}$$

calcule el momento magnético anómalo de Λ sabiendo que las masas de los quarks son $m_u = m_d =$ 360 MeV, $m_s = 540$ MeV.

13. Muestre que con las funciones de onda de protón y neutrón totalmente antisimétricas se predice $\mu_n/\mu_p = -2$, y que el momento magnético del protón es negativo, en total contradicción con los resultados experimentales, mientras que con las simétricas se obtienen los valores correctos.

---

3. Mesones y representación conjugada

14. (**Representación conjugada**) Dada una representación $\{A's\}$ del álgebra de Lie con una base que satisface las reglas de conmutación $[A_i, A_j] = if_{ij}^k A_k$, con f_{ij}^k reales, se puede definir otra representación $\{B's\}$:

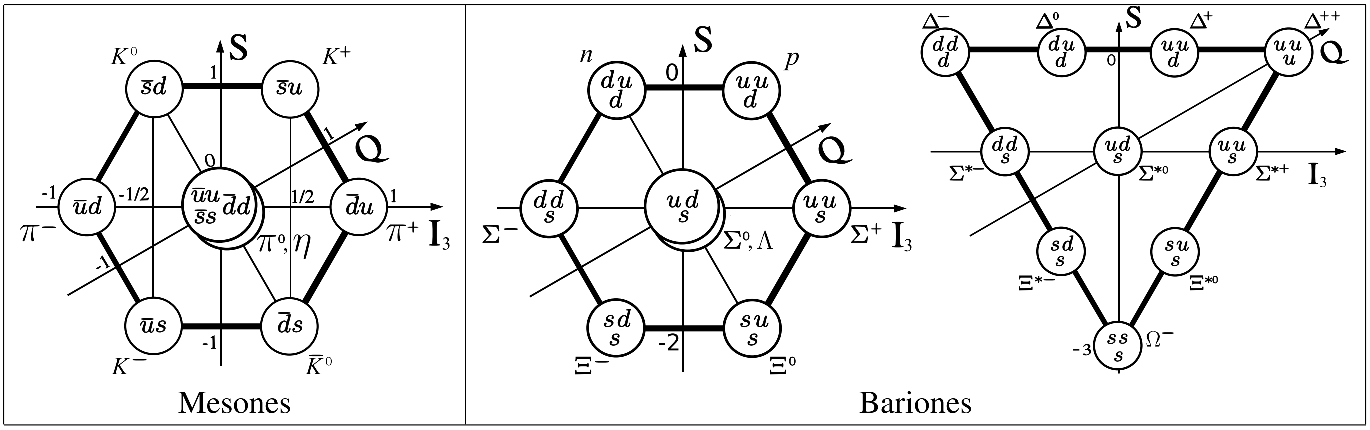
$$B_i := -(A_i)^*$$

que se denomina representación conjugada.
a) Verifique que efectivamente satisface las mismas reglas de conmutación.

b) Para convencerse que esta representación conjugada no es un mero cambio de base, repita el ejercicio 3.b. y note que los autovalores son distintos a los de la representación fundamental (como los autovalores no dependen de la base, mostramos lo que queríamos). En particular note que $\bar{u}$ tiene proyección de isospin $-1/2$ mientras que $\bar{d}$ tiene $1/2$. Esta representación de su(3) se denomina 'antifundamental'.

15. (**Mesones: antifundamental $\otimes$ fundamental**) Los antiquark $\bar{u}$, $\bar{d}$ y $\bar{s}$ los representamos en la antifundamental de la misma manera que sus analogos en el ej. 3.

a) Arrancamos con un ejemplo para fijar ideas: tomemos la combinación $\bar{u}u$ (a modo de ejemplo, aunque difiera de la de los mesones del octete), y queremos aplicarle el operador de bajada de isospin. Esto para un solo u debería dar d. Pero en la antifundamental, o sea sobre $\bar{u}$, da cero, y sobre $\bar{d}$



da $-\bar{u}$ (ver siguiente ítem para la justificación). Muestre que al aplicar el operador de bajada sobre el espacio total la expresión $\bar{u}u$ pasa a $\bar{u}d$.

b) Para justificar el punto anterior, muestre que el elemento de su(3) $1/2(\lambda_1 - i\lambda_2)$ actuando en la fundamental manda $u \to d$ y $d \to 0$, pero en la antifundamental corresponde con actuar con $-1/2(\lambda_1 + i\lambda_2)$ y manda $\bar{d} \to -\bar{u}$ y $\bar{u} \to 0$. Muestre que esto implica que 'bajar' en la fundamental sigue siendo 'bajar' en la antifundamental (con un signo global adicional), pero $\bar{u}$ es de proyección minima y $\bar{d}$ de proyección máxima. Muestre lo mismo para $U_\pm$ y $V_\pm$, incluyendo los quarks y antiquarks s y $\bar{s}$.

c) Muestre que la funcion de onda $\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s$ es un singlete de su(3).

16. (**Octete mesonico**) El producto $\bar{3} \times 3$ se descompone como $1 \oplus 8$ correspondientes a un singlete y octete.

    a) Reconstruya el octete de los mesones de manera análoga a lo que hizo para reconstruir el octete de bariones. En particular verifique que el mesón π^0 se describe como $\bar{u}u - \bar{d}d$.

    b) Halle la función de onda que corresponde al singlete de isospin ubicado en la misma posición que π^0.

    Nota: Las funciones de onda de los mesones η y η' físicos son una mezcla del singlete de isospin en el octete (que se llama η_8) y el singlete de $SU(3)$ (denominado η_1) del ejercicio anterior. Estamos trabajando con el octete de mesones de spin 0. Hay una reconstrucción análoga para spin 1.

Instrucciones para desaprobar fácilmente el parcial

- Decir que la función de onda de un sistema de un número par de fermiones debe ser simétrica.
- Confundir $SU(3)$ de sabor con $SU(3)$ de color.
- Confundirse y pensar que el protón y neutrón están en el octete de mesones.
- Creer que las matrices λ deben tener determinante 1 por creer que son matrices del grupo $SU(3)$.