ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

PRIMER CUATRIMESTRE 2024

PRÁCTICA 4: MASA, ENERGÍA, COLISIONES Y DECAIMIENTOS EN EL MARCO RELATIVISTA

De la conjunción de la relatividad especial y la mecánica cuántica surgieron modelos que materializan la posibilidad de convertir la energía en reposo en energía cinética y viceversa. Los ejercicios que siguen ayudarán a repasar nociones relativistas vistas en materias correlativas y ver las restricciones impuestas por las leyes de conservación de la energía y el momento, que se desprenden de una simetría exacta de la teoría cuántica relativista subyacente.

1 Preliminares: invariantes de Lorentz, notación cuadridimensional

Esta sección pretende repasar cosas elementales del lenguaje de relatividad especial.

1. Dados dos eventos en el espacio tiempo de coordenadas x_a^μ y x_b^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3; x^0 = ct$) :

   (a) Muestre que la cantidad

   $$s_{ab}^2 \equiv (x_a^0 - x_b^0)^2 - (x_a^1 - x_b^1) - (x_a^2 - x_b^2) - (x_a^3 - x_b^3) \tag{1}$$

   es invariante ante un *boost de Lorentz* en alguna dirección (basta para el ejercicio que elija una dirección coincidente con alguno de los ejes $1, 2, 3$)

   (b) Indique la condición sobre s_{ab}^2 para que los eventos a y b estén o no causalmente conectados. Note que la expresión s_{ab}^2 no significa que esta cantidad tenga que ser mayor o igual a cero. Es solo una notación.

   (c) Reescriba la expresión de s_{ab}^2 utilizando la matriz diagonal η la matriz diagonal de 4×4, con $\eta_{00} = 1$ y $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$. Esta matriz , que permite establecer una noción análoga a la de distancia ordinaria, se la conoce como *métrica de Minkowksi*.

2. Considere el diagrama de la figura.

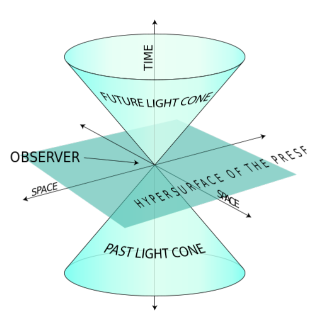

Figure 1: Cono de luz: ayuda para clasificar los eventos según su conexión causal

Dibuje curvas que, pasando por el origen, representen la trayectoria de una partícula que se mueve a velocidades iguales o menores a la de la luz. Como serian las curvas de partículas que se muevan mas rápido que la luz?

3. Considere dos eventos A y B causalmente conectados y un observador O que, moviéndose a velocidad constante, parte del punto A y llega al B. Desde un sistema inercial S los eventos A y B tienen coordenadas $(t_A, \vec{x}_A)$ y $(t_B, \vec{x}_B)$. Para O, el evento A y el B ocurren en el mismo punto del espacio, con alguna diferencia de tiempo τ. A partir de la invariancia de la distancia Minkowskiana, re obtenga la relación conocida entre el tiempo τ medido por O y el intervalo de tiempo $T = t_B - t_A$ medido en S. Déjelo expresado en términos del modulo de la velocidad V de O respecto a S.

   Para bajar a tierra esa relación, halle la velocidad para la cuál $\tau = \frac{T}{2}$.

4. Para los ejercicios siguientes será útil saber manipular cuadrivectores, construyendo invariantes. Por definición, las componentes V^μ de un cuadrivector cambian ante transformaciones de Lorentz en forma idéntica a como lo hacen las coordenadas x^μ. Se define una suerte de producto escalar entre cuadrivectores V y W como:

$$V.W = V^\mu V^\nu \eta_{\mu\nu}$$

   .

   El producto de un cuadrivector V consigo mismo se denota con V^2, lo cual no debe confundirse con la norma al cuadrado de su parte tridimensional, que la denotaremos así: $\mid \vec{V} \mid^2$. V^2 es una generalización de la noción de norma al cuadrado de un vector, sustituyendo la métrica Euclideana por la de Minkowski.

   (a) Proponga vectores tales que V^2 sea positivo (tipo tiempo), negativo (tipo espacio) o nulo (tipo Luz). Dibuje estos vectores en un plano (considerando solo las componentes $0,1$), con ayuda del cono de luz.

   (b) Dados dos cuadrivectores V^μ y W^μ y definiendo $S^\mu = W^\mu + V^\mu$, halle explícitamente S^2 en términos de W^2, V^2 y $W.V$. Muestre que si W y V son de tipo tiempo, con componente cero no-negativa, S será también de tipo tiempo. Basta con una demostración grafica. Que pasa con S si V y W son de tipo luz, con componente temporal no negativa?

2 Momento y energía

5. A partir de la definición del cuadrimomento $p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$ de una partícula de masa m (siendo τ el tiempo propio asociado a una partícula en movimiento, $x^0 \equiv ct$, y $\mu = 0, ..., 3$):

   (a) Verifique el carácter de cuadrivector de esta cantidad. Es decir, que ante una transformación de Lorentz, p^μ transforma igual que las coordenadas espacio-temporales x^μ. Escriba explicitamente la relación entre las componentes del cuadrimomento en dos sistemas de referencia que se desplazan con velocidad relativa de modulo V en alguna dirección (que puede acomodar a uno de los ejes por simplicidad)

   (b) Escriba la expresión del momento y energía $E \equiv cp^0$ relativista de una partícula en términos de la masa m y velocidad $\mathbf{v}$ y derive a partir de ella las relaciones:
   $E^2/c^2 - \mid \vec{p} \mid^2 = m^2c^2 \qquad \vec{p} = E\frac{\mathbf{v}}{c^2}$.

   (c) Reescriba la primera relación en la forma $p^2 \equiv p^\mu p^\nu \eta_{\mu\nu} = m^2c^2$, siendo η la matriz diagonal mencionada anteriormente ($\eta_{00} = 1$ y $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$).

   (d) Definiendo la energía cinética $T \equiv E - mc^2$, obtenga una expansión en potencias de $\beta \equiv \mid \vec{v} \mid$ y re obtenga el límite no relativista de ésta.

Nota: a partir de ahora usaremos $c = 1$.

6. Para el caso $m = 0$, la partícula se mueve a la velocidad de la luz y por tanto la definición $p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$ carece de sentido). Un ejemplo importante es el fotón, la partícula asociada a la cuantización del campo electromagnético.

   (a) Encuentre en este caso la relación entre energía y momento, como limite del caso masivo.

   (b) Considere el caso con masa distinta de cero *ultrarelativista*, en el que la energía cinética T es mucho mas grande que la energía en reposo m. Halle la relación entre $\frac{E}{|\vec{P}|}$ como una expansión en potencias de $m/|\vec{P}|$, re-obteniendo el caso sin masa en el término dominante.

   (c) A fin de tener alguna noción de escalas, encuentre a que velocidad debería moverse una partícula de masa m para que su energía cinética sea igual a su energía en reposo.

7. **Masa de un sistema de partículas**: En el marco Newtoniano, la masa de un sistemas compuesto por N objetos de masas m_i es simplemente: $M_{sistema} = \sum_{i=1}^{N} m_i$. En el marco relativista, es diferente. Para comenzar, muestre que las tres siguientes definiciones de masa de un sistema M_T son equivalentes:

   (a) $M_T^2 = P_T^2$, siendo $P_T^\mu = \sum_i p_i^\mu$. Esta definición imita la relación entre masa y momento de una sola partícula.

   (b) $M_T = E_{cm}$, siendo $E_{cm} = \sum_i p_i^{0(CM)}$ la energía total vista desde el sistema centro de masa. Este sistema de referencia se define al igual que en el caso Newtoniano, como aquel desde el cual la suma de las componentes espaciales se anula.

   (c) M_T definida como : $P_T^i = \gamma(V_{cm}) M_T V^i{}_{cm}$, siendo γ el factor usual $\gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Esta última definición expresa que el sistema se puede pensar como un partícula de masa M_T con una velocidad igual V_{cm}, tal como ocurre en el marco Newtoniano.

8. ** A partir de lo anterior, podemos ir a ejercicio clave de de esta guía:

   (a) Muestre que la masa de un sistema de 2 partículas de masas m_1 y m_2 es mayor o igual a la suma $m_1 + m_2$. Halle la diferencia entre la masa total y $m_1 + m_2$. Aplíquelo al caso de dos fotones, no colineales.

   (b) El resultado anterior se extiende al caso de N partículas. Escriba la expresión de la masa de una caja que contiene fotones cuyas energías son E_i (asuma que no son colineales).

   (c) El protón esta compuesto por 3 partículas llamadas quarks (dos quarks u y un d). El sentido en que se puede considerar compuesto por solo estas dos cosas es una aproximación muy burda pero que será útil ahora. Busque en una tabla la masa del protón y compárela con la suma de sus constituyentes. Asumiendo que el protón puede considerarse meramente como una caja que contiene estas tres partículas no interactuando entre si, estime la contribución de la energía cinética de los quarks, medida en el sistema centro de masas, a la masa del protón.

9. Las consideraciones anteriores se limitaban a sistemas de partículas no interactuantes, donde la energía adicional a la de reposo era solo la cinética. Cuando hay interacción entre partículas en un sistema ligado (como en el núcleo de un átomo), la energía potencial contribuye a la masa pero ya no es valida la conclusión anterior: que la masa del sistema sea mayor o igual a la suma de las masas de los constituyentes.

   A fin de constatar esto, vaya a la pagina Nuclear Wallet Cards Search y compare la masa de los diferentes núcleos, viendo en cuando se apartan de ser simplemente la suma de las masas de sus nucleones. En particular, considere el proceso de fisión:

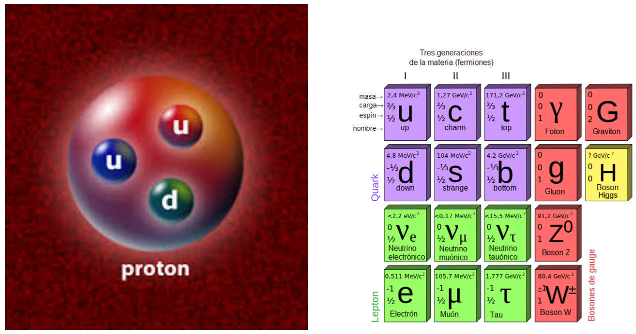

Figure 2: Compare la masa del protón con la suma de las masas de sus constituyentes

$$236U \to 92Kr + 141Ba + 3n$$

.

A partir de la información sobre el "exceso de masa" de cada constituyente en esta fisión, halle la energía liberada. (Más sobre esto en la guía correspondiente a núcleos)

3 Conservación de cuadrimomento. Procesos posibles e imposibles

10. Consideremos ahora un proceso relativista en el que N partículas de masas m_i $(i = 1..N)$ se transforman (mediante procesos que veremos luego) en M partículas de masas m_j $(j = N+1..N+M)$. En un sistema aislado el cuadrimomento total debe conservarse. En base a lo anterior, diga si esta ley de conservación implica que :

    (a) Se debe conservar la masa del sistema: es decir la masa del sistema de N partículas debe ser igual a la masa del sistema de las M partículas.

    (b) Se debe conservar la suma de las masas. Es decir: $\sum_{i=1}^{N} m_i = \sum_{i=N+1}^{N+M} m_j$

    Note que ambas afirmaciones no son equivalentes. Si no nota la diferencia, revise los ejercicios anteriores.

11. Decida si los procesos siguientes son posibles en base a leyes de conservación relativista:

    a) $e^- e^+ \to \gamma \quad b) \; e^- e^+ \to \gamma + \gamma$

    siendo γ un fotón.

12. Considere una desintegración de un cuerpo en el estado inicial, a dos cuerpos en el estado final, i.e. $A \to BC$. Halle las energías de las partículas B y C en el sistema en que la partícula A se halla en reposo. Verifique que estas energías están unívocamente definidas por las masas de A, B y C.

13. **Resonancia**: Considere ahora un proceso en el que una partícula de masa $m1$ incide sobre otra partícula de masa $m2$ en reposo. Para ciertos valore de la energía cinética T de la partícula incidente pueden formarse un estado ligado (o una partícula fundamental, como veremos) inestable, denominado *resonancia*, que llamaremos X. Esta aparición se manifiesta como un pico en la sección eficaz en el proceso 1 2 $\to$ 1 2. Véase por ejemplo el grafico de la Figura 3.

(a) Halle la energía cinética que debe tener la partícula incidente para que se produzca una resonancia de masa M. Como caso particular, considere la energía a la que debe incidir un anti protón sobre un protón en reposo para obtener la resonancia correspondiente al bosón de Higgs.

(b) Considere ahora la situación inversa: obtuvo datos del scattering de 1 y 2 (como el de la figura) y nota que hay picos en la sección eficaz a ciertas energías de las partícula incidente T_i. Halle las masas de la resonancia X_i en cada pico.

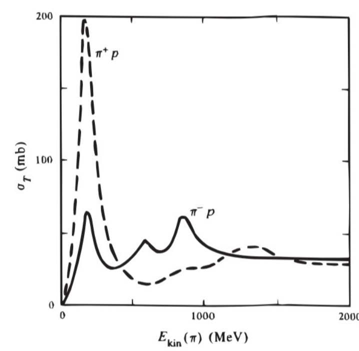

Figure 5.35: Total cross section as a function of pion kinetic energy for the scattering of positive and negative pions from protons. (1 mb = 1 millibarn = 10^{-27} cm^2.)

Figure 3: Sección eficaz en un proceso de scattering entre piones y protón, como función de la energía de los piones incidentes. Los picos indican energías en las cuales se generan nuevos hadrones

14. **Energía umbral**: Este es un concepto importante que permite entender porque a mayores energías de las partículas que colisionan puede observarse nueva física en forma dramática. Considere un proceso del tipo $1+2 \to 3+4$, en el que las identidades de las partículas cambian luego de la interacción. Para simplificar, use que $m_1 = m_2$, $m_3 = m_4$.

    (a) En el sistema centro de masas, ¿cuál es la energía cinética mínima de 1 y 2 para que el proceso sea posible? Considere los casos $m_3 > m_1$ y $m_3 < m_1$

    (b) En el sistema en que la partícula 1 se halla en reposo, halle la energía mínima con la que debe incidir 2 para que el proceso sea posible.

    (c) Como aplicación de esto, halle la energía mínima con la que deben colisionar dos fotones para dar lugar a un par electrón-positrón.

15. En base a las consideraciones anteriores, note que $1+2- > 3$ es posible solo si se da una relación entre las masas $m3$ y $m1+m2$, mientras que $1+2- > 3+4$ puedo ocurrir siempre, independientemente de las relaciones entre las masa, para alguna energía superior a algún umbral.

16. **Tiempo de vida media**: Calcule el impulso del muón en la desintegración $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$, suponiendo que el pión se encuentra inicialmente en reposo. Conociendo el tiempo de vida media del muón, ¿qué distancia recorrería este muón en el vacío (en promedio) antes de desintegrarse? Deje el resultado escrito en términos de las masas de las partículas involucradas y el tiempo de vida media del muón.

    Observación: este ejercicio es una aplicación importante de la relación entre el tiempo propio y el tiempo visto en un sistema genérico, considerada en un ejercicios anterior. El tiempo de vida media de una partícula esta medido desde el sistema en que esta se halla en reposo. Note que cualquier otra opción sería muy poco natural.

4 Aplicaciones de lo anterior

17. En base a los ejercicios anteriores, reconsidere el análisis del decaimiento del neutrón en un electrón y un protón que llevó a suponer la existencia del neutrino discutido en la teórica. Es decir, considere el proceso en el que una partícula decae a estas tres y argumente que si no observa unas energías del electrón y protón únicas sino un rango entonces debe haber una partícula adicional en el estado final.

18. Los primeros antiprotones fueron creados en el Bevatrón (Berkeley) en la reacción $pp \to ppp\bar{p}$. En tal caso se utilizó un haz de protones de energía E que colisiona con un blanco fijo de protones. ¿Cuál debe ser la energía cinética mínima del protón incidente (uno de los dos pp) para que el proceso sea posible? Compare esta con la energía del protón incidente en el sistema centro de masa y diga cuál es mayor.

19. En una teoría relativista, un choque elástico entre dos partículas es definido como aquel en el que no cambia la identidad de las partículas. Es decir, $A+B \to A+B$. En este choque se conserva no solo la energía total sino la cinética. Muestre que en este tipo de colisión, en el sistema centro de masa, los módulos de las velocidades de cada partícula no cambian.

20. Considere el proceso elástico $\bar{\nu}_\mu + e^- \to \bar{\nu}_\mu + e^-$. Demuestre que en el sistema del laboratorio, donde el electrón se halla originalmente en reposo, el ángulo de emisión θ del electrón respecto del antineutrino incidente está dado por
$$\sin^2\theta = \frac{2m}{T+2m}\left(1 - \frac{T}{E_\nu} - \frac{mT}{2E_\nu^2}\right),$$
donde m es la masa del electrón, E_ν la energía del antineutrino incidente y $T = E - m$ la energía cinética del electrón saliente.