Álgebra de $su(N)$

Estructura de la Materia 4, 1°C 2024

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

1. Repaso

La clase pasada se emepezó a trabajar con la noción de grupo. La definición de grupo es un conjunto de elementos $\mathbb{G}$ y una operación "$*$" definida. La operación es binaria y asociativa. Más aún, dada la operación, el conjunto de elementos debe tener el neutro e de la misma y para cada elemento $a \in \mathbb{G}$ debe existir su inverso $a^{-1} \in \mathbb{G}$ tal que

$$a * a^{-1} = e. \tag{1}$$

Se habían visto algunos ejemplos particulares, entre ellos

- $\mathbb{G} = \mathbb{R} - \{0\}$ y $*$ siendo la multiplicación.
- $O(N) = \{M/M^T M = \mathbb{I}\}$
- $SO(N) = \{M \in O(N)/\det(M) = 1\}$
- $U(N) = \{M/M^\dagger M = \mathbb{I}\}$
- $SU(N) = \{M \in U(N)/\det(M) = 1\}$

También vimos el concepto de dimensión del grupo. Esto significaba la cantidad de parámetros reales que me determinaban un elemento particular dentro del grupo. Para $U(N)$ tenemos N^2 parámetros, para $SU(N)$, $N^2 - 1$, etc.

Por ejemplo, las matrices del grupo SO(2) se definen con 1 solo parámetro real. Esto es porque

$$dim(SO(N)) = \frac{N(N-1)}{2}$$

y para $N = 2$, vale 1.

Las matrices de SO(2) se pueden escribir como:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{2}$$

que corresponden a rotaciones de vectores en un plano.

Los otros grupos mencionados también actúan sobre distintas representaciones de estado con sus transformaciones correspondientes.

Teniendo en cuenta la asociación entre grupo y transformación, recordemos algunas cositas de Teorica 2.

2. Grupo, álgebra y generadores

2.1. Ejemplo: Traslaciones lineales

Si uno recuerda. En FT2 se trabajaba con la noción de **generadores** de transformaciones. Por ejemplo. Uno puede (o no) recordar que el generador de las traslaciones lineales en el eje x de una función es el momento $\hat{p}_x$, donde

$$\hat{T}_a = e^{-i\hat{p}a} = e^{-a\frac{\partial}{\partial x}} \tag{3}$$

el segundo igual viene de recordar que $\hat{p}_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$.

Si se le aplica a una función esta transformación, puede ver explícitamente que traslada todo el sistema por una unidad de a.

$$\hat{T}_a f(x) = e^{-a\frac{\partial}{\partial x}} f(x). \tag{4}$$

La clave está en expandir esta exponencial como serie

$$\begin{aligned} e^{-a\frac{\partial}{\partial x}} f(x) &= \left(1 - a\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2!}\left(-a\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-a\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 \dots\right) f(x) \\ &= f(x) - a\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_x + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_x - \frac{a^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\bigg|_x \\ &= f(x-a) \end{aligned} \tag{5}$$

donde en el último igual reconocemos que estamos mirando al polinomio de taylor de f centrado en x evaluado en $x - a$.

La expresión propuesta en (4) se puede extender a otras transformaciónes, con sus generadores correspondientes.

2.2. Ejemplo: SU(2)

Para los elementos del grupo $SU(2)$, sus generadores son las matrices de Pauli. Recordando que $dim(SU(2)) = 2^2 - 1 = 3$, hace falta solo 3 parámetros para definir a un elemento del grupo $SU(2)$.

Cada generador tiene su parámetro asociado (o viceversa) que nos dice cuanto efectuamos esa transformación dada por ese generador. Estos 3 generadores de $SU(2)$ pueden describirse con matrices proporcionales a las de Pauli.

$$S_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tal que

$$U = e^{-i\vec{\theta}.\vec{S}} = e^{-i\frac{\vec{\theta}}{2}.\vec{\sigma}} \tag{6}$$

donde definimos $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ nuestros 3 parámetros de la transformación y $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ nuestros 3 generadores.

Tomemos la expresión (6) en un caso sencillo, con $\vec{\theta} = (0, \theta_2, 0) \equiv (0, \theta, 0)$.

De esta manera, vemos que

$$U(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma_2} \tag{7}$$

nuevamente, expandimos la exponencial

$$e^{-i\theta\sigma_2} = \mathbb{1} - i\frac{\theta}{2}\sigma_2 + \frac{1}{2!}\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_2\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_2\right)^3 \dots \tag{8}$$

donde viene bien hacer el calculo auxiliar que

$$\sigma_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2 = \mathbb{1}.$$

De esta manera, todos los términos seran proporcional a la identidad o a σ_2. Hago las cuentas de algunos términos, me convenzo de cuanto valen los otros, y agrupo términos por las matrices.

$$\begin{aligned} e^{-i\theta\sigma_2} &= \left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 \dots\right)\mathbb{1} + \left(i\theta - \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^5 \dots\right)\sigma_2 \\ &= \cos(\frac{\theta}{2})\mathbb{1} + i\sin(\frac{\theta}{2})\sigma_2 \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

Si comparamos con la matriz genérica que nos mostró Mauricio la clase pasada,

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{i\beta}\cos(\gamma) & e^{i\alpha}\sin(\gamma) \\ -e^{-i\alpha}\sin(\gamma) & e^{i\beta}\cos(\gamma) \end{pmatrix}$$

se ve directamente que $\alpha = \beta = 0$ para este caso y $\gamma = \frac{\theta}{2}$.

Me parece haberlos convencido de que dado un grupo de elementos $\{M\}$, existe una cierta cantidad de parámetros α_j y sus generadores B_j asociados tal que el elemento genérico del grupo de pueda representar como

$$M = e^{-i\alpha^j B_j} \tag{10}$$

M se llama un elemento del **grupo**, mientras que los $\{B_j\}$ los empezamos a llamar elementos del **algebra**.

Por ejemplo, dado las matrices del grupo $SU(2)$, $\{M\}$, los elementos del álgebra de $su(2)$ son las 3 matrices de Pauli.

Para las matrices del grupo $SU(N)$, habrán $N^2 - 1$ generadores o **elementos del álgebra** $su(N)$.

3. Acción de los elementos del álgebra

Consideremos una matriz M de un grupo donde actua sobre vectores e_1 y e_2 tal que

$$M(e_1) = e_2, \quad M(e_2) = -e_1$$

Veamos como actúan los elementos de grupo M y los elementos del álgebra B a un sistema de tipo $2 \otimes 2$, donde cada sistema puede tomar los estados e_1 o e_2. Los estados posibles son

$$\begin{aligned} w_1 &= e_1 \otimes e_1 \\ w_2 &= e_1 \otimes e_2 \\ w_3 &= e_2 \otimes e_1 \\ w_4 &= e_2 \otimes e_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Ante cualquiera de estos estado ligados, o una superposicion de ellos, consideramos un operador $\widetilde{M}$ tal que

$$\widetilde{M}(e_1 \otimes e_2) = M(e_1) \otimes M(e_2) = -e_2 \otimes e_1 \tag{12}$$

opera sobre cada vector por separado al mismo tiempo. Esto es como pensar que, si roto un sistema de dos vectores, el resultado son los dos vectores rotados por igual.

Ahora veamos como actúan los elementos del álgebra sobre los estados. Sin perdida de generalidad, tomemos un solo generador tal que

$$M = e^{-i\alpha B}. \tag{13}$$

Partiendo de (12)

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(e_1 \otimes e_2) &= M(e_1) \otimes M(e_2) \\ &= e^{-i\alpha B} e_1 \otimes e^{-i\alpha B} e_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Si consideramos una transformación infinitesimal, donde $\alpha \ll 1$, podemos aproximar a primer orden la transformación.

$$e^{-i\alpha B} e_1 \otimes e^{-i\alpha B} e_2 \approx (1 + i\alpha B) e_1 \otimes (1 + i\alpha B) e_2$$

si distribuimos y agrupamos por ordenes de α.

$$(1 + i\alpha B) e_1 \otimes (1 + i\alpha B) e_2 = e_1 \otimes e_2 + i\alpha (B e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes B e_2) + O(\alpha^2) \tag{15}$$

es decir que, a orden infinitesimal, los elementos del grupo actúan en un sistema ligado aplicando la regla de Leibnitz.

Una vez hecho todo el repaso general de los elementos del álgebra, veamos particularmente el caso del grupo de SU(N) y su álgebra asociada.

4. álgebra de su(N)

Ahora vamos a analizar especificamente el álgebra de su(N), las propiedades que tienen y algunos casos particulares para $N = 2, 3$.

4.1. Propiedades

Conociendo las propiedades del los elementos del grupo $SU(N)$, veamos como se traducen a los elementos del álgebra.

Recordamos que

$$SU(N) = \{M / M^{\dagger} M = \mathbb{1}, \det(M) = 1\}.$$

Es decir que tenemos dos propiedades a chequear. ¿Como influye en los elementos del álgebra que M sea unitaria? y ¿como afecta que tenga determinante 1?.

Para la primera propiedad, veamos que

$$M M^{\dagger} = \mathbb{1} \iff M^{\dagger} = M^{-1}$$

Reemplazando $M = e^{-i\alpha B}$, tenemos

$$e^{i\alpha (B)^{\dagger}} = e^{i\alpha B}$$

es decir que

$$B = (B)^{\dagger}$$

es hermítica.

En la segunda propiedad, necesitamos la propiedad de matrices

$$\det(e^{A}) = e^{(tr(A))}$$

Censiderando esto, dado que

$$det(M) = 1,$$

llegamos a que

$$det(M) = det(e^{-i\alpha B}) = e^{-i\alpha tr(B)} = 1 \iff tr(B) = 0$$

Para resumir, las propiedades de los elementos del grupo SU(N) se traduce a que los elementos del álgebra su(N) son hermiticos y tienen una traza nula.

Los $N^2 - 1$ generadores del álgebra de su(N) forman una base para construir todo elemento del álgebra. Con los elementos de la base $t_i, \quad i = 1, 2, \ldots N^2 - 1$ se construyen todos los otros elementos con una combinacion lineal. Más aún, estos elementos de la base cumplen con una regla de conmutación de la forma

$$[t_l, t_m] = 2if_{lmn}t_n \tag{16}$$

donde f_{lmn} se llama la constante de estructura. Se ve que el conmutador de dos elementos de la base se puede representar como una combinacion lineal de todos los elementos de la base, definida por las constantes de estructura f_{lmn}.

Ahora veamos dos casos específicos de este álgebra, para $N = 2$ y $N = 3$.

4.2. álgebra su(2)

Los elementos del álgebra su(2) se pueden describir con la base de las matrices

$$S_i = \frac{\sigma_i}{2} \qquad i = 1, 2, 3.$$

Las matrices de Pauli cumplen ser hermíticas y de traza nula, lo cual también se cumple para las $\{S_i\}$. Ademas, los elementos de la base cumplen las reglas de conmutación ya conocidas de las matrices de Pauli

$$[S_i, S_j] = 2i\epsilon_{ijk}S_k, \qquad f_{ijk} = \epsilon_{ijk}$$

Estas matrices las conocemos de haber trabajado ya con spin e isospin. Asi que podemos recordar con facilidad como actúan en estados de tipo p, n representados con los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Existe también una base de generadores conveniente para actuar sobre los estados p, n, que son los elementos

$$S_3, \quad S_\pm = S_1 \pm iS_2$$

con

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que S_3 contiene los autovalores de proyección de isospin de los estados p, n respectivamente y las matrices $S_\pm$ me permiten transformar un estado a otro, donde

$$S_+n = p, \quad S_-n = 0 \tag{17}$$

y

$$S_+p = 0, \quad S_-p = n \tag{18}$$

la accion de estas dos matrices en los estados con autovalores dados por S_3 se puede visualizar en un gráfico como el siguiente

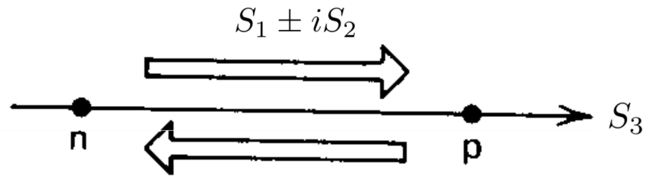

Figura 1: Visualización de las acciónes de los distintos elementos del álgebra de su(2), para los estados p, n

4.3. álgebra su(3)

Con el álgebra de su(2) bien caracterizada, podemos extender facilmente al álgebra de su(3).

Para el álgebra de su(3) necesitamos $3^2 - 1 = 8$ elementos de la base, lo que vamos a llamar las matrices de Gell-Mann. Estas matrices tienen una analogía muy fuerte con las de Pauli.

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

noten que las matrices $\lambda_{1,2,3}$ se pueden pensar como las matrices de pauli y una tercera columna y fila llena de ceros. Esto tambien se extiende para las matrices $\lambda_{4,5,6,7}$

El ejercicio 2) de la guía nos pide que probemos que sean hermíticas y de traza nula, se los dejo para que se convenzan, y por otro lado pide que, tal como se tiene la terna en su(2) por las matrices de Pauli, encontremos 3 ternas determinadas por las reglas de conmutacion de (16).

A primera vista, por el paralelismo directo entre $\lambda_{1,2,3}$ y $\sigma_{1,2,3}$, encontramos facilmente la primera terna.

Existen dos ternas mas a encontrar. La pista que nos dan son 2 elementos de cada terna. Con eso, sacamos el tercer elemento.

Por ejemplo, con la terna de las matrices $\lambda_{4,5}$ calculamos la tercera matriz.

$$\begin{aligned}
[\lambda_4, \lambda_5] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Esta no se asemeja a ninguno de los elementos de la base, pero recordemos que la expresion original dice que el conmutador de dos elementos de la base devuelve una combinación lineal de los elementos. Lo que tenemos que hacer entonces es encontrar la combinacion lineal correspondiente que replique esta matriz, y conseguir las constantes de estructura. Si vemos con cuidado vemos que

$$\begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} = 2i \left[\frac{\sqrt{3}\lambda_8 + \lambda_3}{2} \right]$$

donde identifico las constantes de estructura $f_{4,5,8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $f_{4,5,3} = \frac{1}{2}$

Vamos a ver ahora la acción de los elementos del álgebra su(3) en los estados de una particula. En la representación fundamental se tienen matrices de 3x3 que actúan en vectores de 3 dimensiones. Los elementos de la base de vectores se pasan a llamar u, d, s donde

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tal como se tienen las relaciones (**??**) y (**??**), se puede construir una nueva base de elementos del álgebra en su(3) para actuar sobre u,d,s.

Esta base se compone de los elementos λ_3, λ_8 que como ya esta diagonalizada tiene los autovalores de los vectores u,d,s, y las matrices

$$\begin{aligned} I_\pm &= \frac{\lambda_1 \pm i\lambda_2}{2} \\ U_\pm &= \frac{\lambda_4 \pm i\lambda_5}{2} \\ V_\pm &= \frac{\lambda_6 \pm i\lambda_7}{2} \end{aligned} \tag{19}$$

que operan en los estados u,d,s y los llevan de uno a otro. Calculen explícitamente las matrices y verifiquen que, o lleva de un estado a otro o el resultado es el vector nulo.

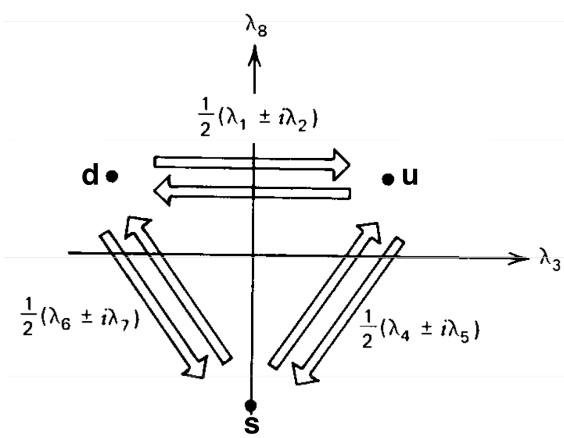

Figura 2: Visualización de las acciónes de los distintos elementos del álgebra de su(3), para los estados u, d, s