

Resolución parcial del ejercicio 13, guía 3

13. Muestre que con las funciones de onda de protón y neutrón totalmente antisimétricas se predice $\mu_n/\mu_p = -2$, y que el momento magnético del protón es negativo, en total contradicción con los resultados experimentales, mientras que con las simétricas se obtienen los valores correctos.

En esta nota vamos a ver como construir la función de onda correcta, dejando la incorrecta como ejercicio.

Este ejercicio nos baja a tierra la idea de la simetría y anti-simetría de la función de onda de sabor/spin y nos muestra lo restrictiva que es conexión spin-estadística

Sistema de partículas de spin semi-entero---> Función de onda anti-simétrica (Estadística de Fermi)

Sistema de partículas de spin entero---> Función de onda simétrica (Estadística de Bose)

Escribamos la parte de sabor y de spin que corresponde al protón con su proyección de spin $+1/2$.

$$\Psi_{sabor}^{MS,proton} = \frac{1}{\sqrt{6}} ((ud + du)u - 2uud)$$

$$\Psi_{spin}^{MS,+} = \frac{1}{\sqrt{6}} ((\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \uparrow - 2 \uparrow\uparrow\downarrow)$$

$$\Psi_{sabor}^{MS,proton} = \frac{1}{\sqrt{2}} ((ud - du)u)$$

$$\Psi_{spin}^{MA,+} = \frac{1}{\sqrt{2}} ((\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \uparrow)$$

Es importante aclarar que del protón solo puedo decirse que su spin total es $1/2$. Su proyección es arbitraria. Si quisieran representar al protón con proyección $-1/2$ deberían modificar su parte de spin.

Seria bueno que escriba la parte de sabor del neutrón y las partes de spin con proyección $-1/2$.

Ahora bien, la función de onda total del protón (parte de sabor, spin y color) debe ser antisimétrica respecto a la permutación de cualquier par de casilleros. Esto es así porque el protón es un sistema de quarks y cada uno de ellos es una partícula de spin semi-entero (1/2) que siguen la estadística de Fermi.

Ahora bien, sabemos que la parte de color de los bariones del decuplete y octete es totalmente antisimétrica. Esto ya fue discutido y se considera en un ejercicio de la guía (ej 7 y 8). Por lo tanto, la función de onda de sabor x spin debe ser totalmente simétrica.

La combinación producto de la parte de sabor con la de spin que resulta totalmente antisimétrica es esta:

$$\psi_{\text{protón}}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{\text{sabor}}^{MS, \text{proton}} \psi_{\text{spin}}^{MS, +} + \psi_{\text{sabor}}^{MA, \text{proton}} \psi_{\text{spin}}^{MA, +})$$

La completa anti-simetría antisimetría no es evidente. Solo puede verse fácilmente la simetría ante el intercambio de los primeros dos casilleros. ¿Se ve eso último?

El supra índice + indica que hemos construido la función de onda con proyección de spin +1/2

Para exhibir la simétrica completa debemos hacer distributiva y poner de manifiesto que cada flecha que indica spin up o down se refiere a cada quark de de la parte de sabor, en el orden en que se halla escrito. Es decir, tendremos 4 posibilidades segun la flecha de spin este hacia arriba o hacia bajo y el quark sea u o d.

Para que no se dificulte la visualización de la expresión completa, utilizaremos la siguiente notación:

$$\begin{array}{cc}
 \uparrow u = 1 & \uparrow d = 3 \\
 \downarrow u = 2 & \downarrow d = 4
 \end{array}$$

Ejemplifiquemos esta notación en algún término que podría aparecer:

$$\begin{array}{c}
 \uparrow \uparrow \downarrow \\
 uud = 114
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \uparrow \uparrow \\
 udu = 231
 \end{array}$$

Ya tenemos todos los elementos. Debemos hacer la distributiva en esta expresión

$$\psi_{\text{protón}}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{\text{sabor}}^{MS,proton} \psi_{\text{spin}}^{MS,+} + \psi_{\text{sabor}}^{MA,proton} \psi_{\text{spin}}^{MA,+})$$

escribiendo el resultado como una lista de numeros de tres digitos que pueden ser 1, 2, 3 y 4.

El resultado final es este (haga la cuenta):

$$\psi_{\text{protón}}^+ = \frac{1}{3\sqrt{2}} (2 \cdot (141 + \text{perm}) - (123 + \text{perm}))$$

perm= permutaciones. Ej: 141+perm= 141+114+411

123+perm= 123+132+312+213+231+321

"las siguientes lineas se adhieren al paro de transporte"

Noten que la normalización es la correcta: al tomar la norma del numerador obtenemos un 18, que se cancela con el del denominador.

Es interesante notar

que cuando hacen la distributiva en cada uno de los dos sumandos de la función de onda uno no da dos pesos por la simetría total. Esta recién se exhibe cuando se combinan todos los términos

Nos queda por ver el momento magnético del protón. Para ello también sería bueno usar una notación que simplifique la escritura. Nosotros queremos calcular un valor medio. Pero resulta que cada término de la suma es un autovector del operador $\hat{\mu}$. Así, por ejemplo:

$$\hat{\mu}|113\rangle = (\mu_u + \mu_u + \mu_d)|113\rangle$$

$$\hat{\mu}|123\rangle = (\mu_u - \mu_u + \mu_d)|123\rangle = \mu_d|123\rangle$$

Aquí μ_u y μ_d denotan al momento magnético de los quarks u y d con su proyección de spin up. La correspondiente con spin down será naturalmente opuesta

Por último, si bien la función de onda total tiene muchos términos (unos 9) al calcular el valor medio no hay 81 términos sino... simplemente 9. Esto es así porque todos los estados de la suma son ortogonales.

$$\langle \psi_{\text{protón}}^+ | \hat{\mu} | \psi_{\text{protón}}^+ \rangle = \frac{1}{18} (24\mu_u - 12\mu_d + 6\mu_d) = \frac{1}{3} (4\mu_u - \mu_d)$$

¿Cuál será el momento magnético del neutrón? No hace falta hacer todo de nuevo. Solo basta cambiar u por d, dada la simetría en el tratamiento de la función de onda.

$$\langle \psi_{\text{neutrón}}^+ | \hat{\mu} | \psi_{\text{neutrón}}^+ \rangle = \frac{1}{3} (4\mu_d - \mu_u)$$

Si queremos cocientar ambos momentos magnéticos y comparar con el valor observado, podemos usar la aproximación en la que la masa de los quarks u y d son iguales. En este caso, en la expresión del momento magnético la única diferencia estaría en su carga. Por lo cual vale que:

$$\mu_u = -2\mu_d$$

En esa aproximación resulta que:

$$\langle \psi_{\text{protón}}^+ | \hat{\mu} | \psi_{\text{protón}}^+ \rangle = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d) \simeq -3\mu_d$$

$$\langle \psi_{\text{neutrón}}^+ | \hat{\mu} | \psi_{\text{neutrón}}^+ \rangle = \frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u) \simeq 2\mu_d$$

$$\frac{\mu_{\text{proton}}}{\mu_{\text{neutron}}} \simeq -\frac{3}{2}$$

Queda como ejercicio la construcción de la función de onda incorrecta: aquella que es totalmente anti-simétrica en sabor x spin

Recordemos como era la totalmente simétrica

↗ Simétrica

$$\psi_{\text{protón}}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{\text{sabor}}^{MS, \text{protón}} \psi_{\text{spin}}^{MS, +} + \psi_{\text{sabor}}^{MA, \text{protón}} \psi_{\text{spin}}^{MA, +})$$

Se puede ver que la siguiente construcción es anti-simétrica

$$\psi_{\text{sabor}}^{\text{antisimétrica}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{\text{sabor}}^{MS} \psi_{\text{spin}}^{MA} - \psi_{\text{sabor}}^{MA} \psi_{\text{spin}}^{MS})$$

Como antes, la parte de spin debe elegirse con la misma proyección (+1/2 o -1/2) en ambos términos. Solo resta hacer la distributiva y repetir el cálculo anterior del momento magnético