Guía de masa y energía

Estructura de la materia 4
1º Cuatrimestre 2024
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

Guía 4

14) Tenemos un proceso en el que la colisión de dos partículas crea otras dos distintas: $1+2 \rightarrow 3+4$.

El ejercicio pide encontrar la energía mínima para que el proceso sea posible, esta energía se conoce como energía umbral. El primer paso es entender conceptualmente qué es la energía umbral y definir cómo afecta a las cuentas trabajar en ese régimen de energía.

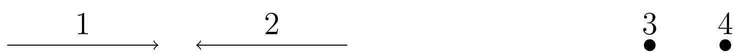
En la colisión, la energía de las partículas 1 y 2 se usa para crear las partículas 3 y 4. En en el sistema de referencia solidario al centro de masa 1 y 2 colisionan con momentos $\vec{p_1} = -\vec{p_2}$. De esta colisión se crean las partículas 3 y 4 con el mismo balance de momentos: $\vec{p_3} = -\vec{p_4}$.

Acá es en donde tenemos que imponer la condición de energía umbral: la energía mínima E_{um} que deben tener 1 y 2 **tiene que ser suficiente para crear las nuevas partículas en reposo**, el excedente de energía que supere este umbral será utilizada para darle energía cinética a 3 y a 4. Antes de plantear esto, notemos que si las masas de 3 y 4 fuesen menores que las de 1 y 2 no tiene sentido hablar de energía umbral, 1 y 2 siempre tendrán suficiente energía para crear las partículas 3 y 4 (De hecho tendrán energía de sobra, creando 3 y 4 con energía cinética no nula).

Para plantear una situación de energía umbral vamos a considerar el siguiente sistema:

$\boxed{\text{Sistema de referencia fijo al CM:}}$

$\boxed{\text{Situación inicial:}}$ $\boxed{\text{Situación final:}}$



Planteamos los momentos de las partículas desde el SR solidario al Centro de Masa:

$$\begin{cases} P_1^\mu = (E_{um,1}, \vec{p_1}) \\ P_2^\mu = (E_{um,2}, \vec{p_2}) \\ P_3^\mu = (E_3, \vec{0}) \\ P_4^\mu = (E_4, \vec{0}) \end{cases}$$

Recordemos que la energía de las partículas cuando están en reposo es:
$E = \sqrt{m^2 + \cancelto{0}{|\vec{p}|^2}} \Rightarrow E = m$. Además, como en el sistema CM $\vec{p_1} = -\vec{p_2}$, nos queda:

$$\begin{cases} P_i^\mu = P_1^\mu + P_2^\mu = (E_{um,1} + E_{um,2}, \vec{0}) \\ P_f^\mu = P_3^\mu + P_4^\mu = (m_3 + m_4, \vec{0}) \end{cases}$$

Para simplificar cuentas, nos dicen que:
$m_1 = m_2$ y $m_3 = m_4 \Rightarrow E_{um,1} = \sqrt{m_1^2 + |\vec{p_1}|^2} = \sqrt{m_2^2 + |\vec{p_2}|^2} = E_{um,2} \equiv E = T_{um} + m_1$.

Y por conservación de la energía $2E_1 = 2m_3 \Rightarrow 2T_{um} = 2m_3 - 2m_1$

En este resultado se ve lo que discutimos antes, cuando $m_1 > m_3$ es imposible crear dos partículas en reposo y no tiene sentido hablar de energía umbral.

Nos podemos preguntar (es el inciso b) de este ejercicio) con qué energía tiene que incidir la partícula 2 sobre la 1 cuando esta está en reposo. A este sistema lo llamamos SR del laboratorio y esquemáticamente lo vemos así (No conocemos $\vec{p_3}$ ni $\vec{p_4}$, sólo sabemos que sumados son $\vec{p_2}$):

$\boxed{\text{Sistema de referencia fijo al laboratorio:}}$

$\boxed{\text{Situación inicial:}}$ $\boxed{\text{Situación final:}}$

En este sistema las partículas 3 y 4 no están en reposo y hacer las cuentas en este SR resulta engorroso porque **tenemos momentos no nulos para casi todas las partículas**. Acá es en donde es muy útil recordar que **tenemos una magnitud invariante de Lorentz**. Fíjense que **sólo sabemos escribir la condición de energía umbral en el sistema CM**, por eso es necesario seguir trabajando en ese sistema en la situación final.

Vamos a **relacionar** las energías del estado inicial en el SR de laboratorio con lo que sabemos del estado final en el SR del CM **por medio de esta ecuación de invariancia**, donde obtenemos el invariante M^2:

$$(P)^2 = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = E^2 - |\vec{p}|^2 = M^2 \qquad \forall \text{ SR}$$

[Notación: las magnitudes primadas corresponden a valores medidos en el SR de laboratorio]

Para la situación inicial vamos a tener la partícula 1 en reposo, los cuadrimomentos quedan:

$$\begin{cases} P_1'^{\mu} = (E'_{um,1}, \vec{p_1'}) \\ P_2'^{\mu} = (m_2, \vec{0}) \\ \Rightarrow P_i'^{\mu} = (E'_{um,1} + m_2, \vec{p_1'}) \end{cases}$$

Ahora si, relacionamos los dos eventos por medio del invariante:

$$\begin{aligned} &(P)^2 = (P_i')^2 = (P_f)^2 = M^2 \\ &(P_i')^2 = (E'_{um,1} + m_2)^2 - |\vec{p_1'}|^2 = E'^2_{um,1} + m_2^2 - |\vec{p_1'}|^2 + 2E'_{um,1} m_2 \\ &(P_f)^2 = (m_3 + m_4)^2 \\ &\Rightarrow M^2 = (m_3 + m_4)^2 \end{aligned}$$

Recordando que $E^2 = m^2 + |\vec{p}|^2$:

$$\begin{aligned} &m_2^2 + m_1^2 + \cancel{|\vec{p_1'}|^2} - \cancel{|\vec{p_1'}|^2} + 2E'_{um,1} m_2 = M^2 \\ &\Rightarrow E'_{um,1} = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2m_2} \\ &\Rightarrow T'_{um,1} = \frac{M^2 - m_2^2 - m_1^2}{2m_2} - m_1 \\ &\Rightarrow T'_{um,1} = \frac{M^2 - (m_2 + m_1)^2}{2m_2} \end{aligned}$$

Notar que $T'_{um,1} \neq T_{um,1}$ como esperábamos, la energía cambia con el SR. Gracias a la **invariancia de** P^2 pudimos obtener la energía umbral para un sistema de referencia en el que no conocemos la condición sobre el estado final.

18) Vamos a usar las cuentas del ejercicio anterior para resolver un problema más concreto.

Se propone la reacción $pp \to ppp\bar{p}$ y se pide que calculemos las energías cinéticas umbrales en los sistemas de CM ($T_{um,1}$) y de laboratorio ($T'_{um,1}$), que tenemos calculadas del ejercicio anterior.

Usamos la misma expresión para la energía del laboratorio, con la diferencia de que en este caso $m_1 = m_2$ y, como tenemos 4 partículas en el estado final, $M = 4m$ (prueben esto planteando los cuadri-momentos de los 3 protones y el anti-protón en el estado final desde el CM). Nos queda $T'_{um,1} = 6m$

Para la energía del centro de masa planteamos conservación de la energía:

$$
\begin{aligned}
&2(E'_{um,1}) = 4m \\
&T'_{um,1} + m = 2m \\
&T'_{um,1} = m
\end{aligned}
$$

Si comparamos las energías cinéticas umbrales medidas desde los distintos SR:

$$
\begin{cases}
T_{um,1} = m \\
T'_{um,1} = 6m
\end{cases}
$$

Esto nos dice que la energía cinética para un sistema en donde hacemos colisionar protones que se mueven en direcciones opuestas necesitamos 6 veces menos energía que si colisionamos un protón en movimiento contra otro fijo.