Simetrías abelianas y no abelianas globales en lagrangianos

June 15, 2024

Un breve resumen del apunte

En esta segunda parte de la materia, vamos a trabajar principalmente con lagrangianos que describan interacciones entre distintos campos, con el objetivo final de entender al lagrangiano del modelo estandar. Para ello, hay que entender en principio los lagrangianos mas sencillos con los que vamos a trabajar; el de K-G (real y complejo) y el de Dirac. De cada lagrangiano que se estudie a futuro hay muchas cosas a entender, entre ellas, algunas preguntas fundamentales son:

- ¿Cuántos campos hay?
- ¿De que tipo son cada uno?
- ¿Hay términos de interaccion? ¿Entre que campos?
- ¿Que simetrías cumple este lagrangiano?
- ¿Que conservaciones tiene en consecuencia?

La idea es que el apunte este y la práctica los ayude a responder estas preguntas con mayor facilidad. Para responder estas preguntas, vamos a introducir en la sección 4, 5 formas de reescribir los lagrangianos para que las respuestas a estas preguntas estén bien compactas y a la vista. Antes de ver estas secciones, vamos a pasar por los lagrangianos de Klein-Gordon y de Dirac una vez más, para repasar las simetrías en los distintos lagrangianos y las implicancias de cada una.

1 Introducción y repaso a corrientes de Noether

Ya vimos en la teórica y en la práctica que dado un lagrangiano dependiendo de un campo y de sus derivadas primeras,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{1}$$

y si se le aplican las transformaciones

$$\phi \to \phi' = \phi + \Delta\phi \qquad \partial_\mu \phi \to \partial_\mu \phi' = \partial_\mu \phi + \partial_\mu \Delta\phi \tag{2}$$

tal que

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \to \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \tag{3}$$

entonces existe una conservación en el sistema de la forma de una cuadricorriente J^μ tal que

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{4}$$

esta cuadricorriente se puede calcular como

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi. \tag{5}$$

Si la transformación (2) se le aplica a N campos ϕ_i, donde $i = 1, 2 \dots N$, entonces la corriente se calcula como

$$J^\mu = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \Delta\phi_i. \tag{6}$$

Esto es un mini repaso para empezar a ver ejemplos que ya vieron en la teorica y práctica pero son fundamentales de volver a repasar para tener el ojo afilado a futuro.

2 Conservación en el lagrangiano de K-G complejo

En este ejercicio se trabaja con el lagrangiano complejo de K-G,

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \tag{7}$$

Donde sabemos que las ecuaciones de movimiento ya nos dan las ecuaciones de K-G para el campo ϕ y ϕ^*.

Este lagrangiano, cumple una simetría del tipo (3). particularmente la transformación que se le aplica al campo de K-G, y a su conjugado, es una transformación de tipo U(1). Es decir que

$$\begin{aligned} \phi &\to e^{i\alpha}\phi \approx (1 + i\alpha)\phi \\ \phi^* &\to e^{-i\alpha}\phi^* \approx (1 - i\alpha)\phi^* \end{aligned} \tag{8}$$

donde α es un parámetro constante. De la misma manera, sus derivadas también se transforman como

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi &\to e^{i\alpha} \partial_\mu \phi \\ \partial_\mu \phi^* &\to e^{-i\alpha} \partial_\mu \phi^*(x) \end{aligned}$$

Si insertamos estas transformaciones en $\mathcal{L}_{K-G}$ vemos que volvemos a tener exactamente la misma expresión que antes. Es decir que el lagrangiano es invariante ante transformaciones de tipo U(1). Particularmente, como α es constante, le vamos a decir que esta transformación es de tipo $U(1)_{\text{global}}$.

Ahora, que corriente es la que se conserva ante este tipo de transformación? Volviendo a la expresión generica de J_μ e identificando las transformaciones de los campos a nivel infinitesimal, podemos calcular la corriente de Noether para el lagrangiano de K-G como

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \Delta\phi^* = (\partial^\mu \phi^* \phi)(i\alpha) - \partial^\mu \phi^* \phi (i\alpha) = (i\alpha)((\partial^\mu \phi^*)\phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi) \tag{9}$$

donde reconocemos la corriente de K-G que se calcula a partir de la ecuacion de K-G.

No es trivial saber que esta corriente implica una conservación que afortunadamente es facil de recordar. La conservación de esta corriente es la diferencia de la cantidad de partículas con la cantidad de antiparticulas del campo de K-G. Esto sale de la cuantización del campo, que vieron muy por arriba en la práctica y no vamos a demostrar en esta clase.

En resumen, la magnitud

$$\Delta N = N - \overline{N} \tag{10}$$

se conserva para la ecuación del campo de K-G libre.

3 Conservaciones en el lagrangiano de Dirac

Bien! Hicimos la primera introducción a corrientes conservadas dentro de un lagrangiano. Ahora podemos hacer un segundo ejemplo, para terminar de entrar en calor. Volvmemos a nuestro querido lagrangiano de Dirac.

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi \tag{11}$$

y, si queremos escribirlo de una manera mas cómoda para este análisis, distribuimos los términos y quedamos con

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\partial_\mu \gamma^\mu - m\overline{\psi}\psi. \tag{12}$$

Nos volvemos a preguntar que simetría respeta este lagrangiano. Nuevamente, podemos ver que ante la transformación de tipo $U(1)_{global}$,

$$\begin{aligned} \psi &\to e^{i\alpha}\psi \approx (1+i\alpha)\psi \\ \overline{\psi} &\to e^{-i\alpha}\overline{\psi} \approx (1-i\alpha)\overline{\psi} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \partial_\mu\psi &\to e^{i\alpha}\partial_\mu\psi \\ \partial_\mu\overline{\psi} &\to e^{-i\alpha}\partial_\mu\overline{\psi} \end{aligned}$$

el lagrangiano se mantiene invariante. Ahora volvemos a calcular la corriente conservada para este sistema, considerando esta simetría.

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\Delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})}\Delta\overline{\psi} = i\alpha\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{13}$$

esto pasa ya que el lagrangiano de Dirac no depende de $\partial_\mu\overline{\psi}$, lo cual nos facilita las cuentas. La corriente obtenida se ve distinta a la de K-G, pero representa el mismo tipo de conservación. Al cuantizar el campo ψ y $\overline{\psi}$, uno observa la conservación de diferencia entre particulas y antiparticulas del campo de Dirac libre.

Es importante recordar la moraleja que simetrías de tipo U(1) llevan a a la conservación de los ΔN de los campos. Si la transformación de tipo U(1) es para varios campos ψ_i $i = 1, 2, \ldots M$, entonces se conserva

$$\sum_{i=1}^{M} \Delta N_i.$$

Estas simetrías es lo que llamamos de grupos abelianos. Esto significa que hacer una transformación de tipo $e^{i\beta}e^{i\alpha}\psi$ o una transformación de tipo $e^{i\alpha}e^{i\beta}\psi$ es lo mismo porque los elementos de este grupo *conmutan*.

4 Nos abrochamos los cinturones, simetrías de grupos no abelianos

Ahora si, habiendo visto los lagrangianos fundamentales de la materia, con sus simetrías y conservaciones, veamos el caso de un lagrangiano un poco mas complejo. Este lagrangiano es el del ejercicio 6 de la guía 6 y tiene la forma

$$\mathcal{L}_2 = \overline{\psi}_1 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 + \overline{\psi}_2 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\overline{\psi}_1 \phi \psi_1 + g\overline{\psi}_2 \phi \psi_2. \tag{14}$$

Donde los campos $\psi_{1,2}$ son de Dirac, y el ϕ es un campo de Klein-Gordon real. En este lagrangiano se tienen los típicos términos cinéticos y de masa, y los ultimos 2 términos cubicos de los campos, siendo de interacción. Veamos que simetrías acepta el lagrangiano $\mathcal{L}_2$.

En principio, uno podria transfomar a los campos $\psi_i, \overline{\psi_i}$ $i = 1, 2$ con un mismo parámetro α asociado en una transformación análoga a (8), y llega a que el lagrangiano se conserva. Es decir que este lagrangiano tiene una simetría de tipo $U(1)_{\text{global}}$ ya que es un solo parámetro para todos los campos

$$\begin{aligned} \psi_1 &\to e^{i\alpha}\psi_1 \\ \psi_2 &\to e^{i\alpha}\psi_2 \end{aligned} \tag{15}$$

y sus dageados. El campo de K-G, al ser real, no se transforma ante esta transformacion de tipo $U(1)_{\text{global}}$. Si uno asocia este lagrangiano con el de Dirac, ve que la cuadricorriente asociada a esta simetría $U(1)$ se calcula como

$$J_0^\mu = i\alpha(\overline{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_1 + \overline{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_2) \tag{16}$$

es decir que se conserva la suma de las $\Delta N_{1,2}$.

Ahora, veamos una simetría nueva. Hasta ahora solo vimos la simetría de tipo $U(1)_{\text{global}}$. Pero este lagrangiano tiene una simetría adicional que requiere de un poquito de trabajo.

Plantiemos una notación de la siguiente forma

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

y

$$\overline{\Psi} = \gamma^0 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}^\dagger$$

donde la γ^0 se distribuye a cada elemento del **doblete**, no es que actue sobre este objeto de 2 componentes, si no que actua en cada uno de los campos.

Con esta manera de relacionar los campos $\psi_{1,2}$, podemos reescribir el lagrangiano a traves de este doblete.

El lagrangiano (14) lo podemos reescribir como

$$\mathcal{L}_I = \overline{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\overline{\Psi}\phi\Psi. \tag{18}$$

Notemos que se sigue entendiendo que hay un término de interacción de orden cúbico, pero hay que recordar que dentro de Ψ hay dos otros campos metidos adentro. Esta notación es ventajosa para notar la segunda simetría.

El elemento Ψ puede ser transformado por las conocidas matrices de tipo $e^{-i\overline{\sigma}\cdot\overline{\theta}}$

con los parámetros $\theta_{1,2,3}$ constantes, tal que

$$\begin{aligned} \Psi &\to e^{i\overline{\sigma}\cdot\overline{\theta}}\Psi \\ \overline{\Psi} &\to \overline{\Psi}(e^{i\overline{\sigma}\cdot\overline{\theta}})^\dagger = \overline{\Psi}(e^{-i\overline{\sigma}\cdot\overline{\theta}}) \end{aligned} \tag{19}$$

donde, insertada en (26) se ve directamente la invarianza para esta transformación que es de tipo $SU(2)_{\text{global}}$. Estos elementos son de un grupo no abeliano, es decir que ahora el orden de las distintas transformaciones importan, por el hecho de que los elementos de grupo no conmutan entre ellos

$$e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}}e^{i\vec{\Theta}\cdot\vec{\sigma}} \neq e^{i\vec{\Theta}\cdot\vec{\sigma}}e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}}$$

donde $\vec{\Theta}$ y $\vec{\theta}$ son 2 conjuntos de parametros distintos.

La ventaja de escribir al lagrangiano de la forma (26), con la expresión de los dobletes (17) es que se ve directamente el tipo de simetría que admite este lagrangiano, que en este caso es de tipo $U(1)_{\text{global}} \times SU(2)_{\text{global}} = U(2)_{\text{global}}$.

Ahora veamos que conservaciones se dan en esta simetría. Para esto, notemos que solo tenemos que ver la transformación infinitesimal de Ψ, ya que para la expresión de la cuadricorriente y, considerando el lagrangiano analizado, la falta de derivadas $\partial_\mu\overline{\Psi}$ nos permite ignorar quien es $\Delta\overline{\Psi}$.

$$\Psi \to e^{i\overline{\sigma}\cdot\overline{\theta}}\Psi \approx (1 + i\overline{\sigma}\cdot\overline{\theta})\Psi \tag{20}$$

donde, si explicitamos el doblete, llegamos a las variaciones infinitesimales de cada generador

$$(1 + i\overline{\sigma}\cdot\overline{\theta})\Psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} + i\theta_1\begin{pmatrix}\psi_2\\ \psi_1\end{pmatrix} + \theta_2\begin{pmatrix}-\psi_2\\ \psi_1\end{pmatrix} + i\theta_3\begin{pmatrix}\psi_1\\ -\psi_2\end{pmatrix} \tag{21}$$

donde podemos ver para cada campo y para cada parámetro de la transformación, su $(\Delta\psi_j)^i$ asociado.

Con esto en consideracion, se pueden calcular las 3 corrientes de Noether. Una para cada parámetro de la transformación.

En clase habíamos concluido que este lagrangiano admitía la conservación de ΔN_1 y ΔN_2 por separado. Esto salia que se pueden hacer transformaciones de tipo $U(1)_{\text{global}}$ individualmente a cada campo de Dirac, y el lagrangiano sale invariante. Aca estamos tomando otro camino ¡y deberia darnos los mismos resultados! ¿Como se puede llegar explicitamente a estas conservaciones?

Analicemos 2 corrientes que nos importen. Una es la de la ecuación (16), asociada a la de la transformación de tipo $U(1)_{\text{global}}$ para ambos campos de Dirac por igual, y la otra que nos es de interés es la del parámetro θ_3 de la transformación de tipo $SU(2)_{global}$. Veamos como transforman ambos campos $\psi_{1,2}$ en esta transformación. Es decir, tomemos (21) y pidamos $\theta_1 = \theta_2 = 0$. De esta manera, vemos en la ecuación (21) que

$$\begin{aligned}\Delta\psi_1 &= i\theta_3\psi_1\\ \Delta\psi_2 &= -i\theta_3\psi_2\end{aligned} \tag{22}$$

tal que, si uno calcula la corriente de Noether conservada por esta transformación, llega a ver que

$$J_3^\mu = i\theta_3(\overline{\psi}_1\gamma^\mu\psi_1 - \overline{\psi}_2\gamma^\mu\psi_2) \tag{23}$$

Ahora, notamos que si dos magnitudes se conservan, la combinacion lineal de estas tambien debe ser una magnitud conservada. Este es el último paso para entender que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\alpha}J_0^\mu + \frac{1}{2\theta_3}J_3^\mu &= i\overline{\psi}_1\gamma^\mu\psi_1\\ \frac{1}{2\alpha}J_0^\mu - \frac{1}{2\theta_3}J_3^\mu &= i\overline{\psi}_2\gamma^\mu\psi_2\end{aligned} \tag{24}$$

y llegamos a que ambas combinaciones lineales dan lugar a la conservación de las dos ΔN_i por separado, como habiamos visto en clase.

5 Y otro lagrangiano mas

Recien vimos simetrías de grupos no abelianos en lagrangianos. Ahora no nos vamos a meter con eso, pero si vamos a seguir profundizando en esta notación de dobletes.

Del mismo ejercicio que antes, se tiene un ejemplo mas, donde el lagrangiano toma la forma

$$\mathcal{L}_1 = \overline{\psi}_1 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 + \overline{\psi}_2 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\overline{\psi}_2 \phi \psi_1 + g\overline{\psi}_1 \phi \psi_2. \tag{25}$$

Notando que los términos de interaccion ahora mezclan los campos. ¿Cuales son las simetrías del lagrangiano? Podemos ver que ahora a primera vista que la conservación de los ΔN_i individuales no se mantendran (o no se ve tan a simple vista). Pero si podemos acudir a la misma herramienta de escribir el lagrangiano en función de los dobletes. Como hacemos con los términos de interacción? Podemos describirlos a partir de la matriz σ_1 y

$$\mathcal{L}_I = \overline{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\psi\overline{\Psi}\sigma_1\Psi. \tag{26}$$

considerando que $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es importante ver que podemos acudir nuevamente a la notación compacta de los dobletes, y con el uso de la matriz σ_1 se puede codificar de que manera interactúan los distintos campos en los términos de orden 3.

A partir de esta forma de escribir el lagrangiano, volvemos a ver dos simetrías. Una es nuestra clásica $U(1)_{\text{global}}$ tomando

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \to e^{i\alpha}\Psi \tag{27}$$

y la otra va a ser una transformación de tipo

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \to e^{i\theta_1\sigma_1}\Psi \tag{28}$$

Como nos damos cuenta de esto? Considerando que este elemento de matriz se puede escribir como

$$e^{i\theta_1\sigma_1} = \mathrm{Id}\cos(\theta_1) + i\sigma_1\sin(\theta_1).$$

Y estas dos matrices conmutan con σ_1 y por ende, $e^{i\theta_1\sigma_1}$ también. De esta manera,

$$\overline{\Psi}\sigma_1\Psi \to \overline{\Psi}e^{-i\theta_1\sigma_1}\sigma_1 e^{i\theta_1\sigma_1}\Psi = \overline{\Psi}\sigma_1 e^{-i\theta_1\sigma_1}e^{i\theta_1\sigma_1}\Psi = \overline{\Psi}\sigma_1\Psi$$

Por ende, la transformación de tipo (28) mantiene invariante el lagrangiano. Este admite dos transformaciones distintas. Cada una de las transformaciones usa un único parámetro (α, θ_1), entonces este lagrangiano admite simetrías de tipo $U(1)_{\text{global}} \times U(1)_{\text{global}}$. Notar que ambas transformaciones son de tipo $U(1)_{\text{global}}$ porque son elementos de matrices que cumplen las mismas propiedades del grupo y son dos transformaciones independientes que cada una usa un solo parámetro.

No se queden con la idea final de que esto aplica para únicamente dobletes en lagrangiano. Escribir un lagrangiano de N campos distintos como un 'N-plete'

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

permite encontrar simetrías de forma más rápida, y compactar la notación del lagrangiano considerablemente. Donde en un solo término se pueden compactar todas las diferentes interacciones (de una misma naturaleza) entre los N campos que me convenga relacionar.

Como ejemplo de la utilidad de esta re-escritura, consideremos un Lagrangiano con 47 campos de Dirac, cada uno una término de masa m_i genérica:

$$L = \sum_{i=1}^{47} \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \sum_{i=1}^{47} m_i \bar{\psi}_i \psi_i \tag{29}$$

Desde ya podemos reescribir esto en término de una 47-upla de campos de Dirac, denotada con Ψ mayúscula, aunque no ganamos nada con ello, salvo el omitir el símbolo de sumatoria:

$$L = \bar{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \bar{\Psi} M \Psi \tag{30}$$

donde ahora M es una matriz diagonal de 47x47 con entradas m_i en la diagonal.

Podría pensarse **erróneamente** que con esta reescritura se manifiesta una simetría $U(47)$. Tal razonamiento descuidado podría venir del hecho de que el término cinético es invariante ante la sustitución:

$$\Psi \to \Psi' = R\Psi$$

siendo R una matriz de 47×47, de entradas complejas, que satisface $R^\dagger R = 1$. Es cierto esto. Esto se debe a que todos los términos cinéticos de un campo de Dirac son idénticos entre si. No hay ningún coeficiente relativo. Sin embargo, si sustituimos $R\Psi$ en el término de masas notamos que no queda invariante. Seamos más explicito: ante $\Psi \to R\Psi$ ocurre que:

$$L \to L' = \bar{\Psi} R^\dagger i\gamma^\mu \partial_\mu (R\Psi) - \bar{\Psi} R^\dagger M R \Psi \tag{31}$$

Dado que R es una matriz de constantes, esta pasa por arriba del operador derivada parcial en el término cinético. Y se junto con la $R^\dagger$. Pero en el término de masa esto no ocurre porque la matriz M no necesariamente conmuta con R. El lagrangiano quedo así ante la sustitución:

$$L \to L' = \bar{\Psi} R^\dagger R i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \bar{\Psi} (R^\dagger M R) \Psi \tag{32}$$

donde no hemos hecho gran cosa respecto a la expresión de 31. La invariancia del lagrangiano requiere que la matriz R cumpla dos condiciones:

1. $R^\dagger R = 1$, para que el término cinético no cambie
2. $R^\dagger M R = M$ para que el término de masas no cambie.

¿Es posible hallar una matriz R tal que se cumplan ambas condiciones? La primera condición me dice que R tiene que ser una matriz unitaria de 47×47, es decir, que pertenece al grupo $U(47)$. En otras palabras me dice que $R^\dagger = R^{-1}$. Pero la segunda condición me pide algo más, que no es claro que se pueda satisfacer al mismo tiempo. Seguro hay una solución muy simple que no requería esta re-escritura: R podría ser una matriz diagonal de fases!. Es decir,

$$R = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & e^{i\alpha_{47}} \end{pmatrix}$$

El grupo de matrices de esta forma es $U(1) \times U(1) \times U(1).... \times U(1)$, donde los puntos suspensivos indica 47 productos. Es decir, hay 47 parámetros independientes. Para el caso genérico de masas m_i arbitrarias no podemos decir más nada que esto.

Pero hay casos particulares en que podemos decir algo y hallar una solución a 1 y 2. Por ejemplo:

1. Las 47 masas son iguales!
2. Hay dos conjuntos de m_i iguales entre si. Digamos, las primeras 20 masas iguales entre si con un valor m_1, y las segundas 27 iguales entre si con un valor m_2

En el primer caso, la condición 2 no da nada nuevo a la 1, dado que M sería diagonal y por tanto la condición para R es que sea unitaria de 47×47. Es decir, en el příimer caso el grupo de simetría es el más grande posible: $U(47)$.

En el segundo caso, piénselo pero la respuesta será que el grupo de simetría es $U(20) \times U(27)$. Para ver esto explícitamente sería conveniente usar dos n-uplas. Una 20-upla y una 27-upla y repetir la re-escritura anterior. Les queda como ejercicio.