

Estadística en Física Experimental (Verano 2019)

Guía de Problemas N° 2 | Ejercicio computacional

Simulación de la medición de una fuente luminosa con un detector de eficiencia $\epsilon < 1$.

Realice la siguiente simulación, justificando cada uno de los pasos.

1. La mayor parte de los lenguajes de programación y muchos programas con orientación científica incluyen generadores de números pseudoaleatorios con distribución uniforme en $[0, 1)$. Cualquier conjunto de dichos números constituye una muestra de una variable aleatoria continua (tema de la guía siguiente) con dicha distribución, pero aquí nos interesa solamente el hecho de que pueden ser usados para simular experimentos de Bernoulli. Mostrar computacionalmente que la probabilidad de que tal generador entregue un número en $[0, p)$ ($0 \leq p \leq 1$) es p (y en $[p, 1)$ es $1 - p$). Implemente, a partir de esta propiedad, un programa que genere el resultado de una serie de n experimentos de Bernoulli independientes y cuente el número de éxitos obtenido. Considere n y la probabilidad de éxito p como parámetros libres.
2. Suponga que inciden exactamente $n = 15$ fotones sobre un detector con una eficiencia $\epsilon = 0.75$. Use el programa escrito en el punto anterior para determinar cuántos fotones son detectados en un experimento particular. Repita el experimento 1000 veces y realice un histograma de los resultados (i.e., del número de fotones detectados en cada experimento). Compárelo con la distribución de probabilidad teórica para dicha variable aleatoria. No olvide normalizar correctamente el histograma para realizar la comparación.
3. Ahora considere una fuente de intensidad media $I = 15 \text{ fot s}^{-1}$. Simule el número de fotones emitidos por la fuente en $\Delta t = 1 \text{ s}$ del siguiente modo. Subdivida el intervalo Δt en $m \gg 1$ subintervalos iguales dt (sugerencia: use $m = 1000$). Aproxime la probabilidad de que la fuente emita un fotón en dt como $I dt$, y desprecie la probabilidad de emitir más de 1 fotón en el mismo intervalo (¿cómo justifica estas hipótesis?). Simule entonces el número de fotones emitidos en cada dt usando el programa desarrollado en el punto (a) (¿por qué es válido usar un programa que simula experimentos de Bernoulli?), y sumando sobre todos los dt calcule el número total de fotones emitidos durante Δt . Repita el experimento 1000 veces, construya un histograma de los resultados y superponga a éste la distribución teórica correspondiente (no olvide normalizar). Discuta el procedimiento y los resultados en base a las hipótesis del proceso de Poisson.
4. Dado el resultado de cada uno de los 1000 experimentos del punto anterior, use el mismo programa para calcular el número de fotones *detectados* por el detector del punto (b), suponiendo que éste opera durante $\Delta t = 1 \text{ s}$, y que todos los fotones emitidos llegan a él (i.e., que el detector subtende un ángulo sólido de 4π visto desde la fuente). Realice el histograma correspondiente y compárelo con la distribución teórica (no olvide normalizar). Discuta los resultados (vea el ejercicio sobre la composición de Poisson con Binomial).
5. Para ahorrar tiempo, usted podría haber considerado la emisión y detección de cada fotón en forma conjunta, suponiendo una probabilidad *efectiva* (¿de qué valor?) para este proceso (¿cómo justifica esta hipótesis?). Realice la simulación de este modo, grafique los histogramas y sus correspondientes distribuciones teóricas. Muestre que el resultado es el mismo que el del punto anterior (en sentido estadístico). Discuta el procedimiento y los resultados a la luz de la composición de un proceso de Poisson con uno de Bernoulli.
6. ¿Qué distribución espera para que el número de datos en una determinada clase (bin) de un histograma y por qué? Use la desviación estándar como una estimación de la incerteza de dicha variable y grafique barras de error sobre **todos** los histogramas realizados. Discuta el sentido en que deben interpretarse las posibles discrepancias entre las distribuciones de probabilidad teóricas y los histogramas.

Haga un **breve** informe de la simulación, incluyendo los gráficos y poniendo énfasis en la justificación de los distintos pasos.