Estadística en Física Experimental (1er Cuatrimestre 2021)

Guía de Problemas N° 5 | Teorema Central del Límite

1. Estudie el grado de validez del teorema central del límite dibujando las distribuciones siguientes, y superponiendo sobre ellas la gaussiana con el μ y σ correspondiente.
   (a) $\mathrm{B}_k(5{,}0.2)$, $\mathrm{B}_k(30{,}0.4)$
   (b) $\mathrm{P}_n(4)$, $\mathrm{P}_n(10)$, $\mathrm{P}_n(40)$

2. El teorema central del límite permite evaluar probabilidades binomiales sin necesidad de sumar muchos términos que involucran factoriales de grandes números, a partir de la distribución acumulativa normal canónica $\Phi(x)$,

$$\sum_{k=a}^{b} B_k(n,p) = \sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \simeq \Phi\left(\frac{b-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np-\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right)$$

   Discuta el origen de esta fórmula y utilícela para calcular la probabilidad de aprobar un examen multiple choice con 100 preguntas de tres opciones cada una, si se contesta al azar y se aprueba con 4 (40% de respuestas correctas). [Rta: 0.0966 con la suma exacta, y 0.0951 con la fórmula aproximada.]

3. Utilizando el teorema central del límite escribir un generador aproximado de números gaussianos N(0,1), a partir de variables aleatorias independientes $\{X_i\}$ con distribución uniforme en [0,1], como una función $f(Z)$ siendo $Z = \sum_i^n X_i$.
   (a) Si se elige n=50, ¿cuál debe ser $f(Z)$?
   (b) ¿En qué rango de la abscisa seguro falla la aproximación a la normal?
   (c) Genere de este modo 10000 números con la computadora, haga un histograma de su distribución, y grafique N(0,1) sobre éste.
   (d) Muestre que el promedio de N variables independientes con distribución de Cauchy tiene a su vez distribución de Cauchy. ¿Por qué falla en este caso el teorema central del límite?

4. ¿Cuánta gente deberá encuestarse en Argentina si se desea conocer la intención de voto p para un cierto candidato dentro de un margen de 1% (en sentido absoluto) y con un nivel de confianza de 95%? Use para esto el dato de que aproximadamente (a) el 45% (b) el 5% del electorado votará efectivamente por dicho candidato. Discuta intuitivamente por qué obtiene resultados distintos para los casos (a) y (b). [Rta: 9900 y 1900]
   Sugerencia: considerar que la población tiene muchos más individuos que cualquiera de estas muestras y usar la aproximación gaussiana.

5. Muestre que a distribución poissoniana tiende a la gaussiana en el límite $\mu \to \infty$. Para ello obtenga la función característica de $Y \equiv (n - E(n))/\sigma_n$, con n poissoniana, y verifique la validez de $\lim_{\mu\to\infty}\phi_Y(t) = \phi_X(t)$, con $X(t)$ gaussiana canónica.

6. Siendo que en el problema anterior no hay una suma de variables aleatorias ¿Por qué esta en esta guía?
   Ayuda: Estudie la distribución de la suma de variables aleatorias con distribución de Poisson.