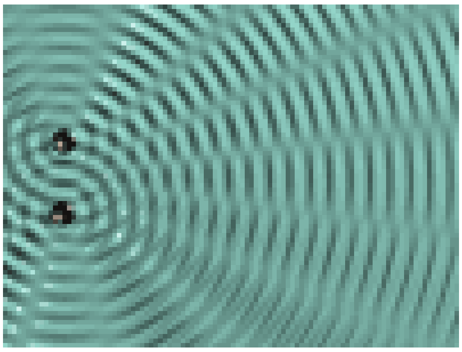
Temas 4 y 5. Interferencias.



4.1. Introducción.

4.2. Interferencia de ondas planas monocromáticas.

4.3. Tipos de interferómetros.

- El interferómetro de Young.
- Interferencias de ondas no monocromáticas
- Otros interferómetros tipo Young.

4.4 Interferómetros de doble haz.

- Interferómetro de Michelson.

5.1 Algunas aplicaciones de las interferencias.

- Medidas de espesores y ángulos.
- Medida de radios de curvatura de lentes oftálmicas.
- Recubrimientos antireflectantes.

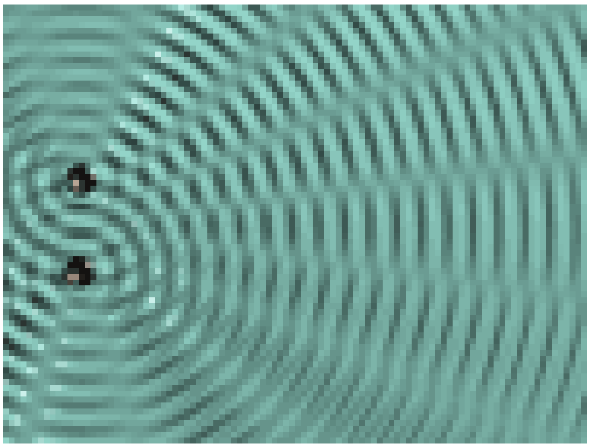
5.2 Interferencias de múltiples haces.

- Medidas de espectros de emisión de fuentes reradiación.
- Filtros espectrales.

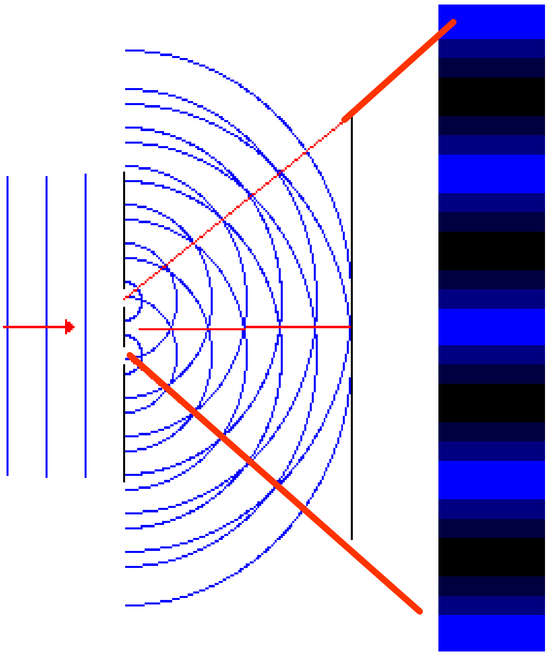
Miguel Antón
Departamento de Óptica
Escuela Universitaria de Óptica

4.1. Introducción.

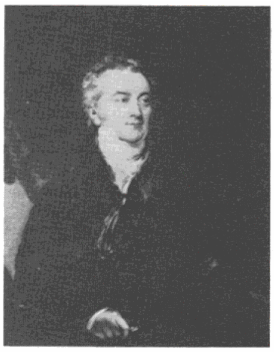
En el tema 1 establecimos la ecuación de onda y como una consecuencia de su carácter lineal, se comprobó que si en una región del espacio y en un instante dado se superponen dos soluciones de dicha ecuación, el resultado también es una solución y por lo tanto, representa una onda. Este enunciado constituye lo que se conoce como el principio de superposición. En este capítulo analizaremos las consecuencias físicas que tienen lugar cuando dos o más ondas se superponen.



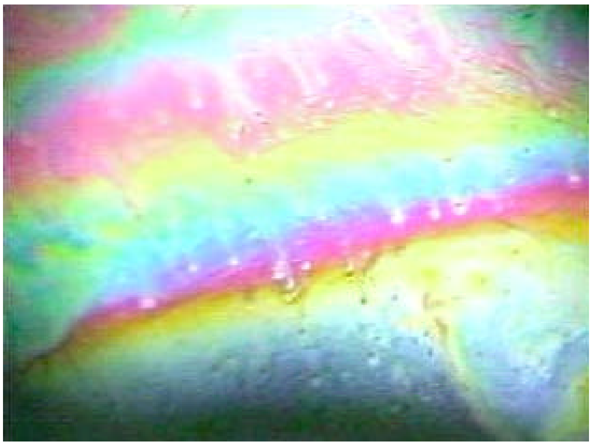
En general, si se dan ciertas condiciones, que analizaremos enseguida, la superposición de dos ondas se manifiesta en una redistribución espacial de la energía, esto es, en bandas brillantes y oscuras denominadas franjas de interferencia. En la figura se puede apreciar lo que decimos: dos fuentes coherentes emiten ondas esféricas hacia delante. En azul se muestran las crestas de las ondas esféricas en un instante dado. Existen puntos del espacio donde la cresta de una onda proveniente de una de las fuentes se superpone con otra cresta de una de las ondas que proviene de la fuente inferior. En el punto donde ocurre esto, la perturbación total aumenta, produciéndose una interferencia constructiva. Como es obvio, entre dos crestas consecutivas ha de haber un valle (estado de mínima perturbación). Se puede colegir que en los puntos donde se produzca la intersección de una cresta de una de las ondas con un valle de la otra onda, la perturbación se cancela o será mínima. El resultado es una redistribución espacial de la energía en la pantalla caracterizada por la aparición de regiones brillantes seguidas de otras oscuras.

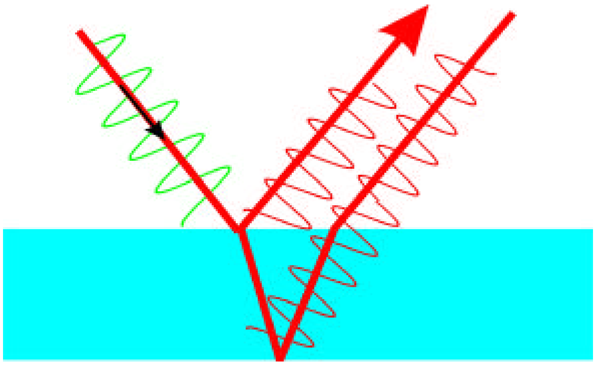


En la figura adjunta se han representado los máximos de las ondas emitidas desde los dos puntos mediante una serie de círculos concéntricos con cada una de las fuentes y equiespaciados. Puede verse como la zona de superposición constructiva ocurre a lo largo líneas rectas, aproximadamente, desde la fuentes. Si se coloca una pantalla, sobre ella se verán una serie de franjas claras y oscuras que constituyen el diagrama interferencial. La primera observación de las interferencias fue constatada por R. Boyle (1627-1691) en 1663. Pero los primeros experimentos detallados sobre interferencias de luz fueron realizados por Thomas Young (1773-1829) en 1802 y en ellos, Young fue capaz de estimar la longitud de onda de la radiación luminosa

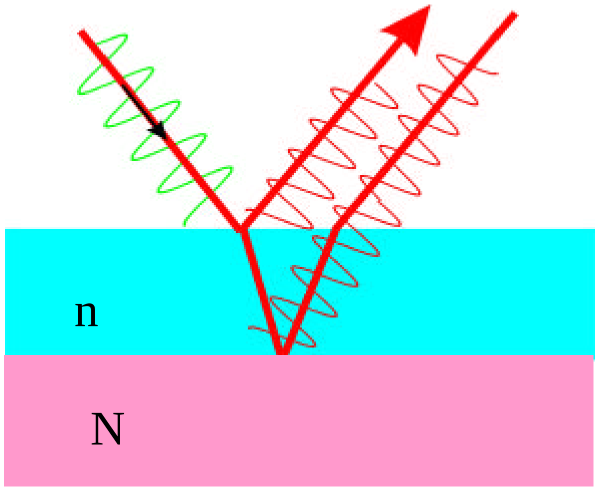


Los fenómenos interferenciales se observan a menudo en la naturaleza. Por ejemplo, los colores que se observan en las pompas de jabón están causados por interferencias. Se trata, en este caso, de una película muy fina rodeada por ambas partes de aire. Los haces reflejados en las caras de la lámina de jabón pueden interferir, y dependiendo del espesor local de la lámina, la condición de interferencia constructiva, dado un espesor y un ángulo de observación tendrá lugar para una determinada longitud de onda. Por ejemplo, si el espesor cambia de un punto a otro, serán otras longitudes de onda las que interferirán constructivamente, produciendo una superficie coloreada que nos dará el mapa de espesores de la fina capa.





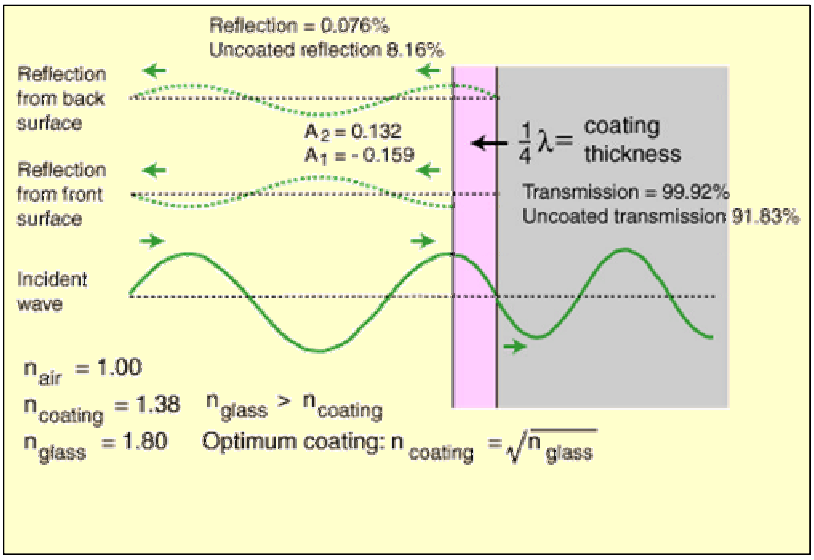
Un fenómeno similar ocurre en los días con lluvia. En el asfalto se forman películas muy delgadas de aceite sobre agua. La luz del sol que incide sobre estas películas se refleja en ambas caras y los haces reflejados interfieren entre sí. Fijado un ángulo de observación, cada color interfiere constructivamente según el espesor de la capa de aceite, por lo que estas películas aparecen coloreadas



Los fenómenos interferenciales tienen esencialmente un interés metrológico. Permiten caracterizar parámetros de interés de sistemas físicos tales como espesores, índices de refracción, perfiles espaciales de superficies, espectros de fuentes de emisión, etc. Al mismo tiempo, constituyen la base de interesantes aplicaciones tales como el diseño de filtros interferenciales de radiación. Se pueden diseñar tratamientos multicapa para obtener una reflectancia o transmitancia deseada. En la foto de la derecha aparecen varias muestras de vidrio recubiertas de materiales transparentes de espesor e índice adecuados para que reflejen selectivamente determinados colores y transmitan otros. Como se

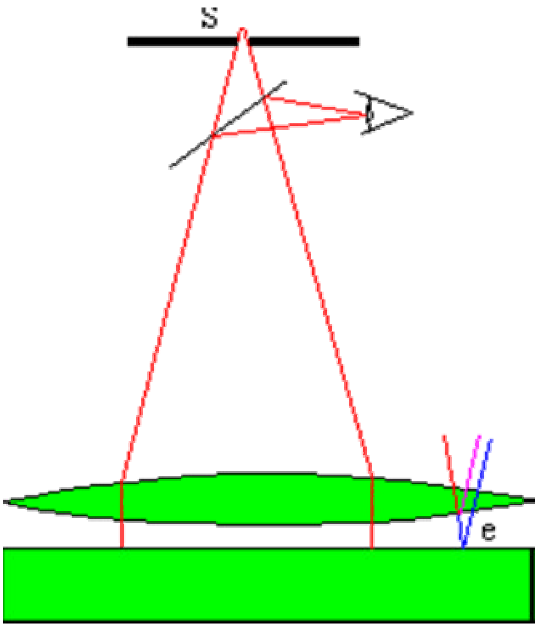
puede apreciar, basta cambiar el espesor de la monocapa depositada para que cambie el espectro de la luz reflejada.

La idea consiste en depositar sobre el substrato de vidrio, una capa muy delgada de material transparente con un índice y espesor adecuados para que una o varias radiaciones interfieran constructiva o destructivamente.

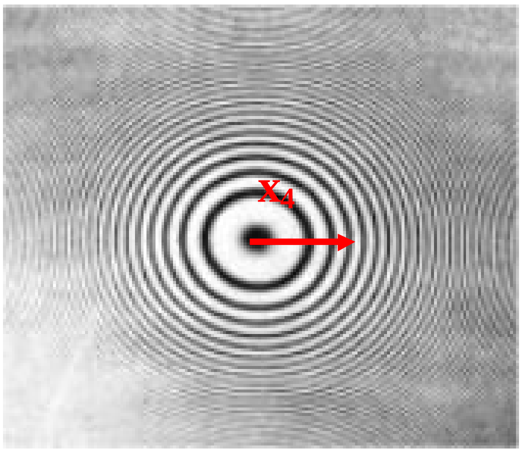


Por ejemplo, en el caso de la figura se trata de una monocapa antirreflectante para una determinada radiación. Si el espesor de la capa es $\lambda/4$, la segunda onda reflejada estará retrasada respecto de la primera $\lambda/2$, es decir, en oposición de fase, por lo que tendremos una interferencia destructiva, y esta radiación no se reflejará.

Hemos dicho que las interferencias permiten obtener parámetros de sistemas físicos. Un ejemplo elemental se muestra en la figura. A partir de las interferencias entre los rayos reflejados en la segunda cara de la lente y en la superficie plana, debido a la pequeña diferencia de camino experimentada en la capa de aire entre ellos, se puede demostrar que el radio de los anillos de interferencia observados (x) está relacionado con el radio de curvatura de la lente (R) mediante la expresión $x = (m\lambda\ R)^{1/2}$, siendo m el orden del anillo interferencial.



$$x = \sqrt{m l R}$$

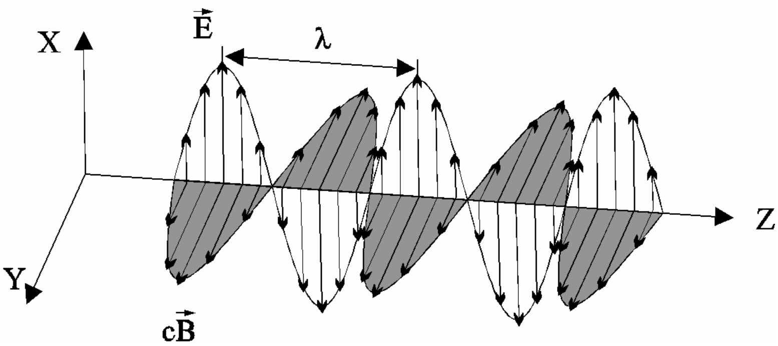


Analizaremos todas estas cuestiones con detalle en lo que sigue.

4.2. Interferencia de ondas planas monocromáticas.

Como se recordará las ondas armónicas planas monocromáticas constituyen el caso más simple de perturbaciones electromagnéticas. Se caracterizan por ser una superposición del campo eléctrico y magnético en fase y obedecen a la conocida condición de transversalidad:

$$\vec{k} \, x \, \vec{E} = w\vec{B}$$



Las soluciones más sencillas son las ondas armónicas planas las cuales vienen descritas mediante funciones armónicas

$$E_X(z,t) = E_{0X} \cos(wt - kz)$$

$$E_X = cB_Y$$

En el caso de que la radiación pertenezca al visible, el periodo de oscilación de dichas ondas es muy pequeño, del orden de 10^{-15} segundos, mientras que el intervalo espectral se extiende desde los 400 nm hasta los 700 nm aproximadamente.

visible

$$T \approx 10^{-15}\,\mathrm{s}$$

$$300\,nm \le l \le 700\,nm$$

La irradiancia de una onda plana monocromática viene dada por el promedio temporal del módulo del vector de Poynting y resulta ser proporcional al promedio temporal del cuadrado del campo eléctrico:

$$I = c e_0 \left\langle \vec{E}^2(r,t) \right\rangle$$

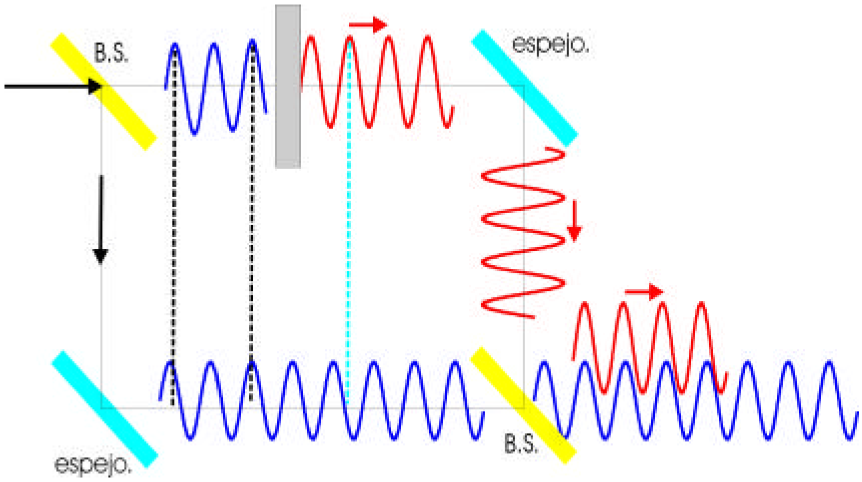
En el caso de una onda plana monocromática armónica tal como la descrita más arriba, la irradiancia vale:

$$I = c e_0 E_0 \left\langle \cos^2(\vec{k}.\vec{r} - wt) \right\rangle = \frac{1}{2} c e_0 |E_0|^2$$

Supongamos ahora que en una cierta región del espacio se superponen dos ondas planas de la misma frecuencia pero desfasadas una respecto de otra una cierta cantidad, δ. Como veremos, esto se puede conseguir de muchas maneras. Una de ellas está representada en la figura. En ella, un haz de luz se divide en dos mediante un espejo semitransparente y luego se redirigen ambos haces mediante sendos espejos que constituyen un paralelogramo. Finalmente, los haces se superponen a la salida del segundo espejo semitransparente.

En el camino superior se ha introducido una lámina de vidrio plano-paralela que hace que el haz superior se retrase respecto del haz inferior, con lo que a la salida se habrá desfasado una cantidad δ, que dependerá del índice, *n*, y del espesor, e, de la lámina. En el caso de la figura, δ vendrá dado por

$$d = \frac{w}{c}(n-1)e$$



El campo total a la salida será la suma de los campos:

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}\cos(\vec{k}\,\vec{r} - wt)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}\cos(\vec{k}\vec{r} - wt + d)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t)$$

A la salida del último espejo semitransparente se superponen las dos ondas que han recorrido caminos diferentes. Por lo tanto, la irradiancia será

$$I = ce_0\left\langle \vec{E}^2(r,t)\right\rangle = ce_0\left\langle\left(\vec{E}_1\ (r,t) + \vec{E}_2\ (r,t)\right)^2\right\rangle$$

o bien

$$I(\vec{r}) = ce_0\frac{E_{01}^2}{2} + ce_0\frac{E_{02}^2}{2} + 2ce_0(\vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02})\left\langle\cos(wt - \vec{k}\cdot\vec{r})\cos(wt - \vec{k}\cdot\vec{r} + d)\right\rangle$$

Teniendo en cuenta que

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

la irradiancia queda

$$I(r) = I_1 + I_2 + 2ce_0\left\langle\cos(2wt - 2\vec{k}\cdot\vec{r}) + \cos d\right\rangle$$

Como <cos(2ωτ)>=0, se llega a que

$$I(r) = I_1 + I_2 + 2ce_0(\vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02})\cos d$$

siendo

$$I_j = ce_0\frac{E_{0j}^2}{2} \qquad j = 1,2$$

Los dos primeros términos corresponden a las intensidades de cada uno de los haces, mientras el tercer término representa la interferencia y revela dos hechos importantes:

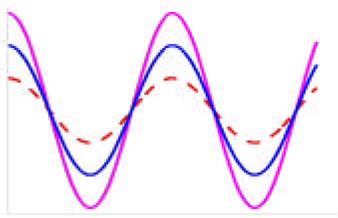
- Depende de la diferencia de fase entre los dos haces, δ.
- Si los haces están polarizados perpendicularmente, el tercer término es nulo y no hay interferencia.

Por ello, de ahora en adelante asumiremos, salvo que se indique lo contrario, que los campos tienen la misma polarización y prescindiremos del carácter vectorial de los mismos. En este caso la irradiancia se puede poner como

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1\, I_2}\, \cos d$$

Dependiendo de la diferencia de fase tendremos diferentes situaciones que se esquematizan a continuación:

$d = 2mp$



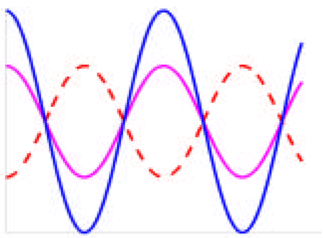
En este caso las dos ondas están en fase y la superposición es constructiva:

$$E = E_1 + E_2 \Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1\, I_2}$$

La intensidad es mayor que la suma de las intensidades parciales.

$d = (2m+1)p$

$I_1 \neq I_2$



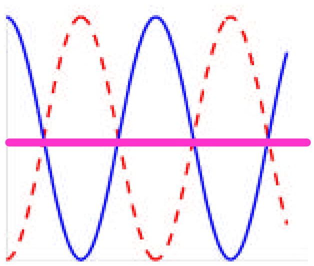
Ahora las dos ondas están en oposición de fase, cresta frente a vientre, por lo que la superposición es destructiva:

La intensidad es menor que la suma de la intensidades parciales.

$$E = E_1 - E_2 \Rightarrow I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1\, I_2}$$

$d = (2m+1)p$

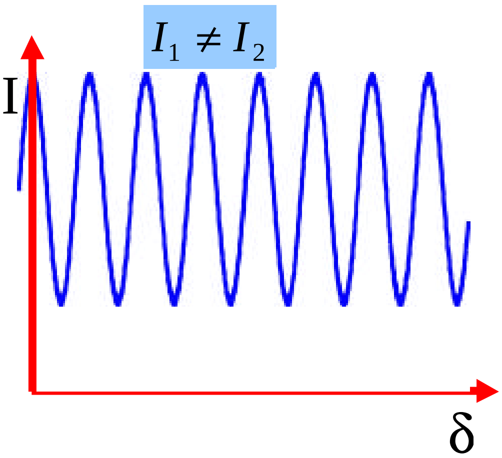
$I_1 = I_2$

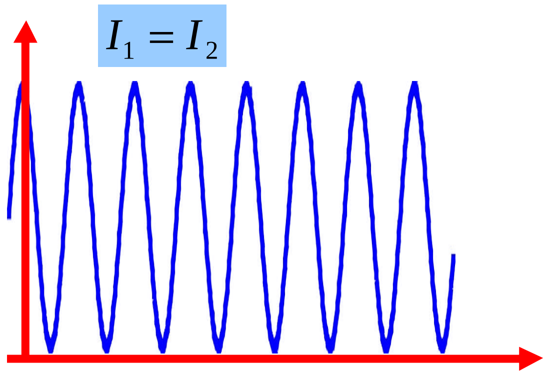


Si además de que δ =(2m+1)π , las intensidades de las ondas son iguales, la irradiancia es nula:

$$I = I_1 + I_1 - 2\sqrt{I_1\, I_1} = 0$$

Si representamos la irradiancia de la superposición en función de la diferencia de fase, se obtendrá





na magnitud interesante para analizar los diagramas interferenciales es el contraste interferencial C, definido como sigue:

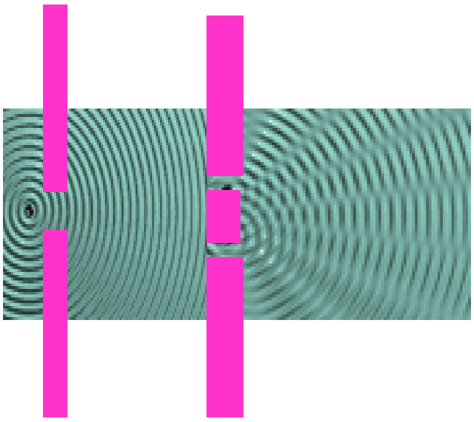
$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

Representa una medida del cambio en irradiancia entre el máximo y el valor mínimo. Si este cambio es muy pequeño pude suceder que el diagrama interferencial se poco visible. Como se aprecia en las gráficas anteriores, el contaste es máximo si las intensidades de las dos fuentes son iguales. En este caso C=1.

Con todo ello, estamos ya en disposición de abordar diferentes maneras de producir interferencias y obtener consecuencias de los diferentes dispositivos interferenciales.

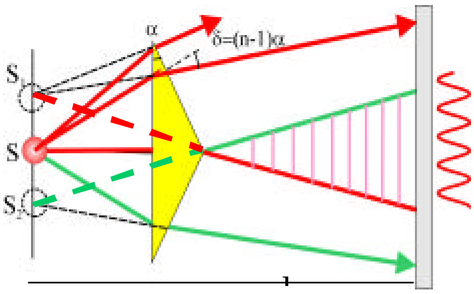
4.3. Tipos de interferómetros.

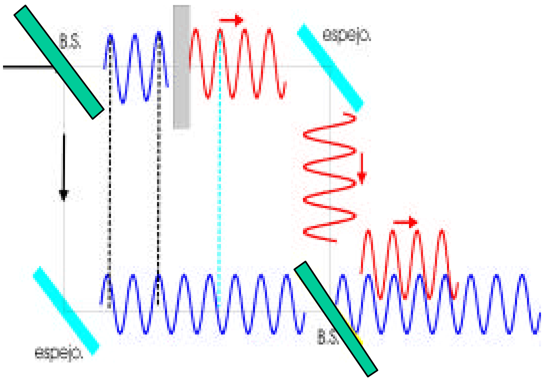
Ya hemos comentado que existen muchas formas de hacer interferir una par de haces coherentes de luz. Los dispositivos ópticos que permiten realizar tal superposición de denominan de forma genérica, interferómetros. En todos ellos, la idea general consiste en dividir un haz incidente en dos mediante orificios, rendijas, espejos y otros elementos ópticos. Se pueden clasificar en dos tipos:



(a) Interferómetros por división del frente de onda.

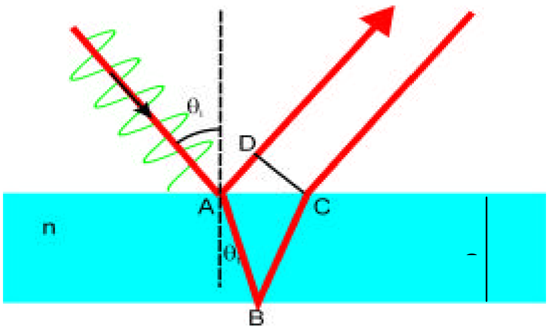
En estos, es el frente de onda el que se divide en dos mediante rendijas, tal como se indica en la figura. Usualmente las dos nuevas ondas tienen la misma intensidad. El interferómetro de Young, que se muestra en la figura, y que discutiremos más adelante, es un típico ejemplo.





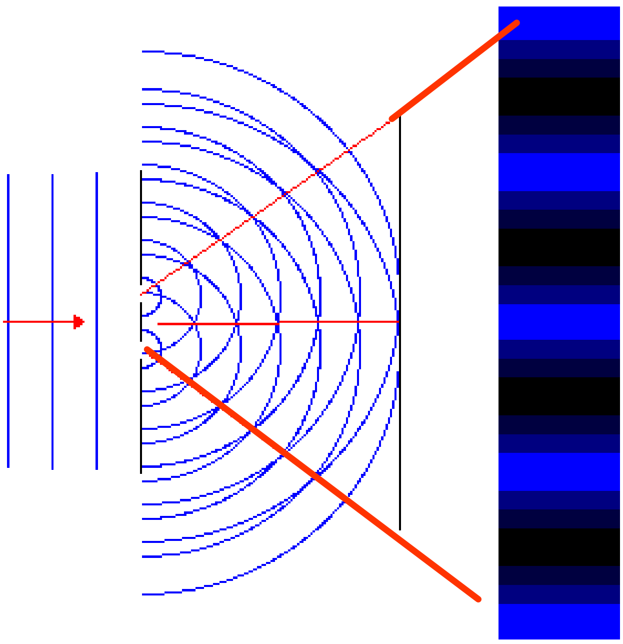
(b) Interferómetros por división de amplitud de la onda.

En este caso, la amplitud de la onda se divide por reflexión y transmisión mediante elementos ópticos como espejos semitransparentes, de tal forma que la onda queda dividida en dos amplitudes iguales o diferentes. En el esquema de la figura, se muestra un interferómetro de tipo Mach-Zhender en el cual, parte de la onda incidente se refleja en el espejo semitransparente de tal forma que se generan dos ondas, una reflejada y otra transmitida cuyas amplitudes dependerán de los coeficientes de Fresnel de la interfase. Otro ejemplo de este tipo lo constituye una simple lámina de vidrio.

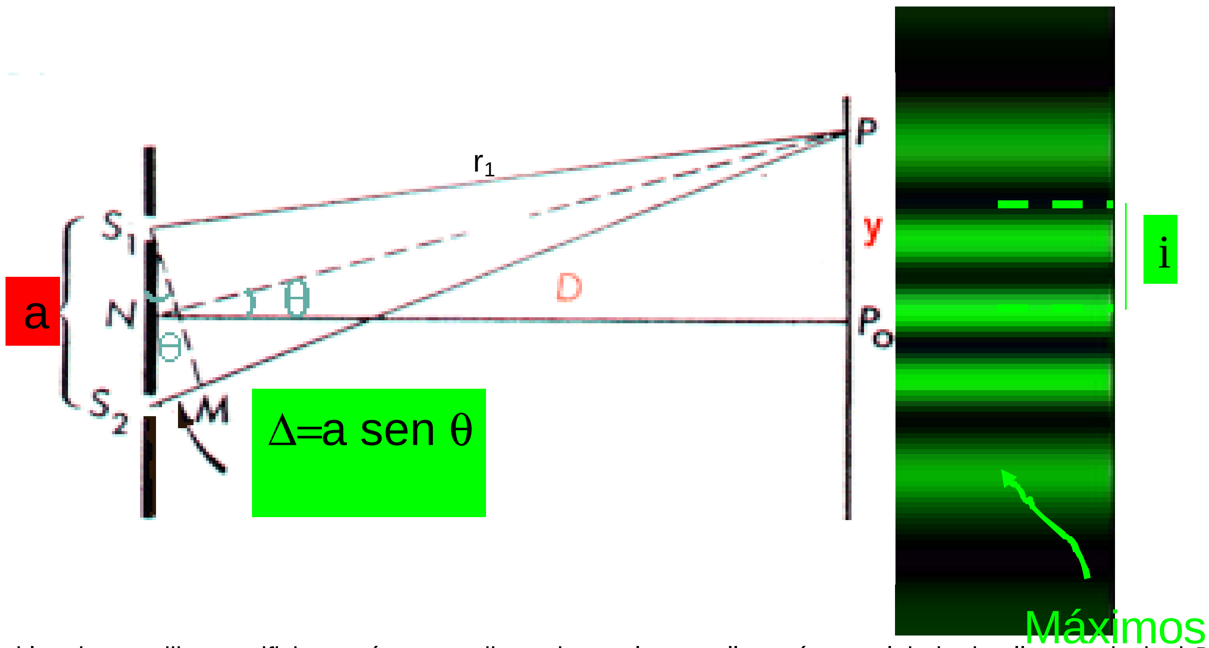


4.3.1 El interferómetro de Young.

El interferómetro de Young está constituido por una pantalla donde se han practicado dos orificios o rendijas muy estrechas separadas una cierta cantidad. El frente de onda que incide sobre las rendijas se divide en dos nuevos frentes de onda que iluminan el espacio posterior. En esta región, los dos frentes de onda se superponen pudiendo interferir. Si a una cierta distancia se sitúa otra pantalla para recoger la irradiancia resultante, bajo determinadas circunstancias, se podrá observar el diagrama interferencial producido y que en primera aproximación, consiste de una serie de líneas brillantes equiespaciadas o máximos de interferencia, separadas por líneas oscuras o mínimos de interferencia. Desde el punto de vista de la óptica geométrica es inexplicable que en el centro de la pantalla aparezca un máximo de luz, así como que la energía luminosa se redistribuya espacialmente en forma de franjas brillantes y oscuras. A continuación vamos a describir el fundamento de este interferómetro.



La descripción matemática es simple. Las ondas que emergen de S_1 y S_2, llegan a la pantalla donde se superponen espacialmente. Si queremos saber la irradiancia en un punto *P* cualquiera que se encuentra a una altura *y* del centro de la pantalla, deberemos calcular el desfase de las dos ondas en ese punto. Para ello vamos a realizar unas suposiciones que nos permitirán simplificar los cálculos.



En efecto, si las dos rendijas u orificios están a una distancia *a,* y la pantalla está muy alejada de ellos, es decir si *D*>> *a*, y si observamos en una zona próxima al centro (*D*>>*y*), podremos considerar que las ondas se propagan prácticamente en la misma dirección, por lo que podremos aplicar los resultados de la sección anterior. Por otra parte, la diferencia de camino entre ambas ondas en P, que dista *y* del centro, viene dada por la cantidad

$$\Delta = a\, sen\, q \cong a \tan q = \frac{ay}{D} \qquad \Rightarrow \qquad d = k\Delta = \frac{2p}{l}\frac{ay}{D}$$

Por lo tanto, el campo total en P será la suma de los campos que proceden de S_1 y S_2, que consideraremos polarizados en la misma dirección y así prescindir de su carácter vectorial:

$$E = E_1 + E_2 = E_0\, e^{i\left(wt + \vec{k}\vec{r}_1\right)} + E_0\, e^{i\left(wt + \vec{k}\left(\vec{r}_1 + \Delta\right)\right)} = E_0\left(1 + e^{ik_1\Delta}\right) e^{i\left(wt + \vec{k}\vec{r}_1\right)}$$

Vemos que la onda resultante presenta una amplitud dada por $E_0\,(1+e^{ik\Delta})$, por lo que la irradiancia será proporcional al módulo al cuadrado de esta amplitud:

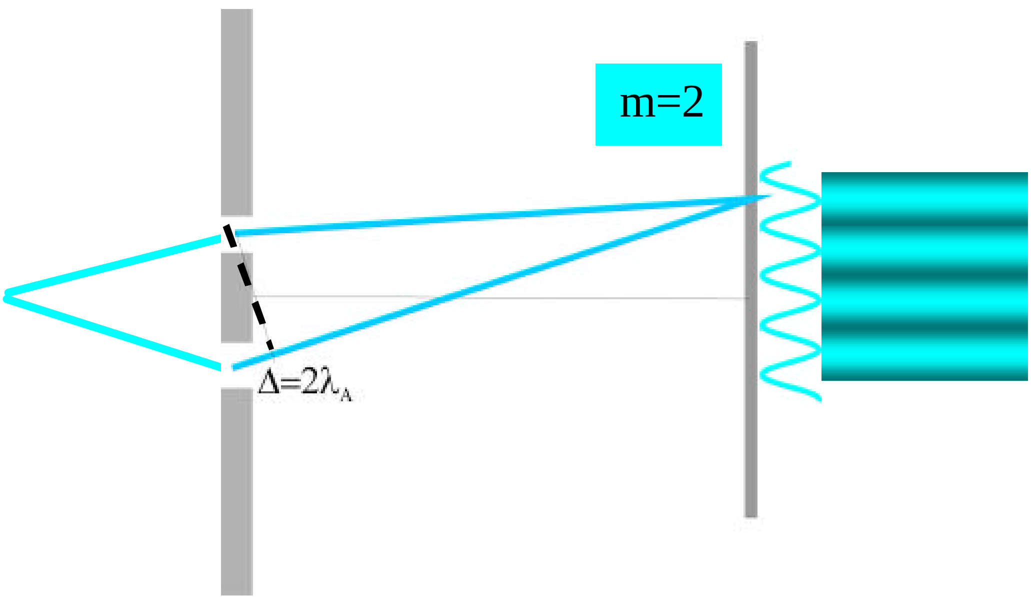
$$I = \frac{1}{2} c e_0 \left|E_0^2\right| \left|1 + e^{ik\Delta}\right|^2 = 2I_0\left(1 + \cos d\right) = 2I_0\left(1 + \cos\frac{kay}{D}\right)$$

El resultado indica que en la pantalla aparecerá una redistribución espacial de la irradiancia. En efecto, la irradiancia será máxima en aquellos puntos en los que se cumple que

$$\cos d = 1 \quad es\ decir \quad d = 2mp \qquad \Rightarrow y = m\frac{l\,D}{a} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Sin embargo, la irradiancia será mínima en aquellos puntos en los que

$$\cos d = -1 \quad es\ decir \quad d = (2m+1)p \qquad \Rightarrow y = \frac{2m+1}{2}\frac{l\,D}{a} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$



La separación entre franjas brillantes u oscuras consecutivas se denomina *interfranja:*

$$i = y_{m+1} - y_m = \frac{l\,D}{a}$$

De la expresión se ve que el espaciado entre las franjas es inversamente proporcional a la separación de las fuentes y varía linealmente con la longitud de onda de la fuente y la distancia a la pantalla. Esta fórmula sugiere algunas posibles aplicaciones de la interferometría. Por ejemplo, si pudiéramos medir la interfranja, y conociésemos los datos geométricos del experimento, tales como *a* y *D*, se podría obtener la longitud de onda de la radiación.

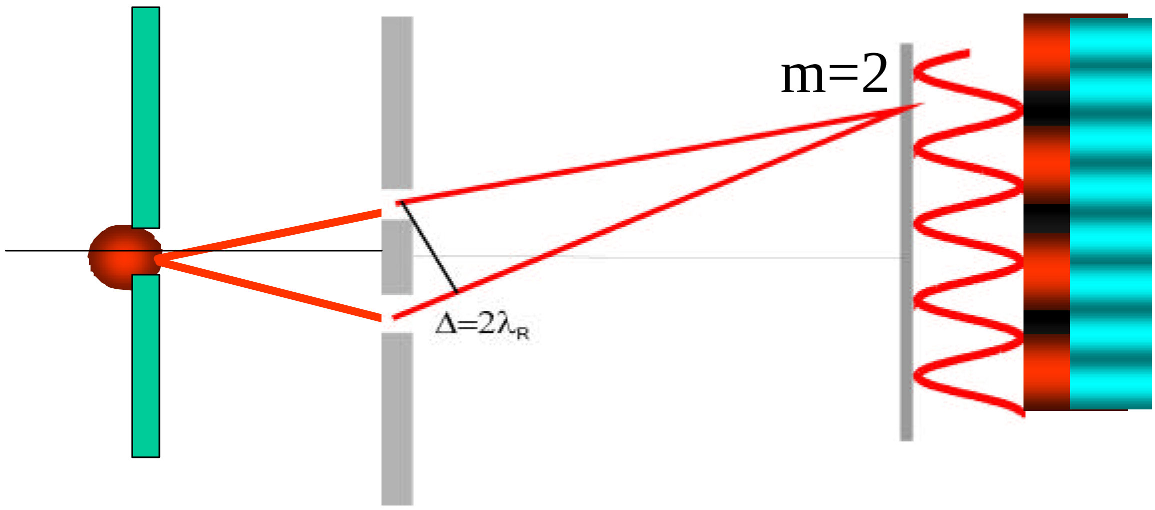
Ejemplo: (a) Se ilumina un dispositivo de Young como el descrito mediante una lámpara de sodio que emite una radiación monocromática de l **desconocida. La separación entre las rendijas es de 0.5 mm y se recoge la irradiancia resultante en una pantalla situada a 2 m. Se mide la interfranja y resulta ser 2.4 mm. Calcular la longitud de onda de la radiación incidente.**

$$i = y_{m+1} - y_m = \frac{l\ D}{a} = 2.4mm \qquad l = \frac{2.4\,\mathrm{x}0.5}{2000} = 589.3\,nm$$

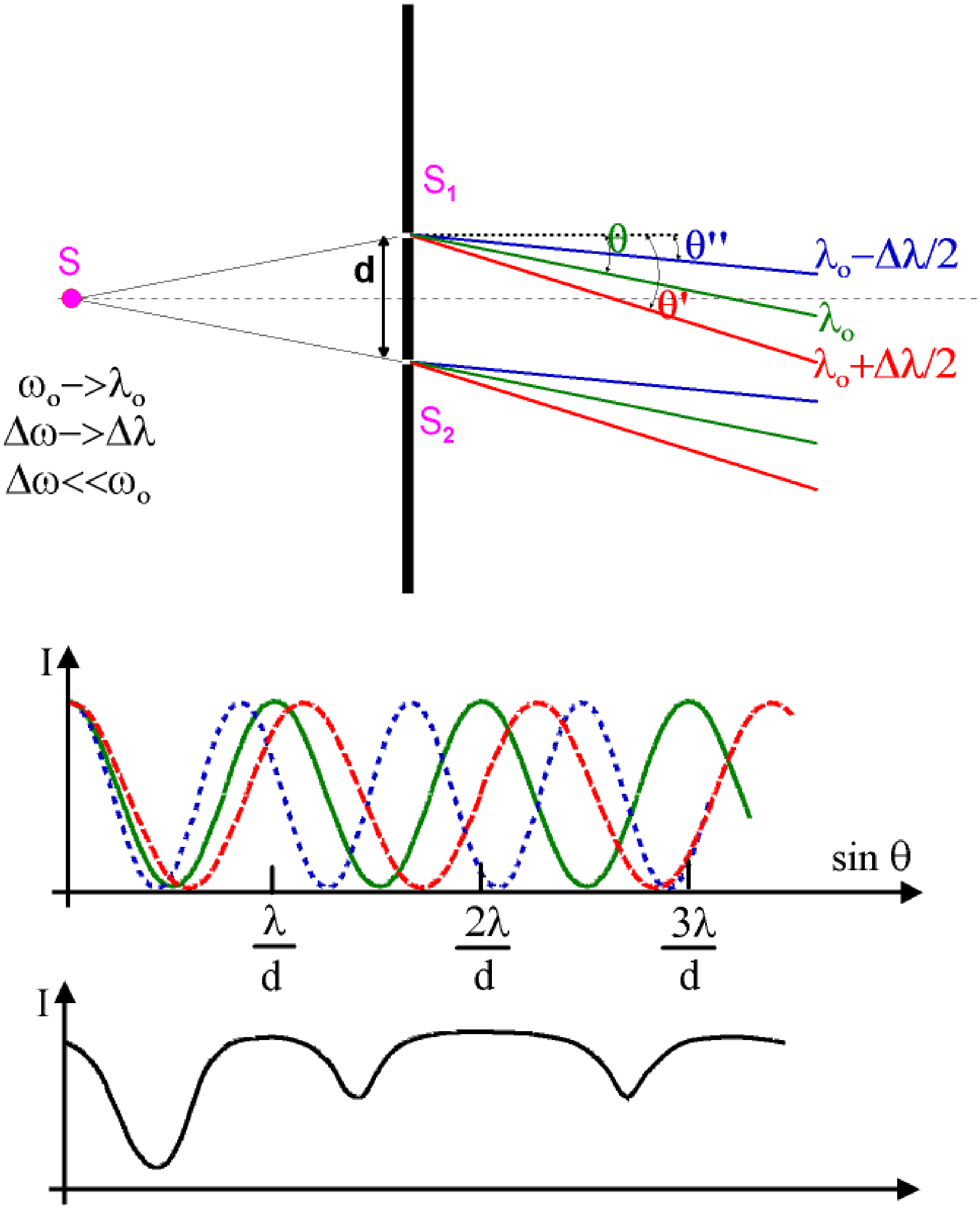
(b) Si ahora se ilumina con luz roja de una láser de He-Ne que emite en l **= 632 nm. Calcular la interfranja:**

$$i = y_{m+1} - y_m = \frac{l\ D}{a} = \frac{632\,\mathrm{x}10^{-6}\ 2\,\mathrm{x}10^{3}}{0.5} = 2.53\,mm$$

En el ejemplo anterior se ve que la interfranja depende de la longitud de onda. Si sobre el interferómetro se dirigieran simultáneamente dos ondas de diferentes frecuencias, sobre la pantalla tendríamos dos interferogramas superpuestos con los máximos de uno de ellos desplazados respecto de los máximos del otro color. Esto nos lleva a plantearnos qué se observará en la pantalla si la fuente primaria fuera policromática.

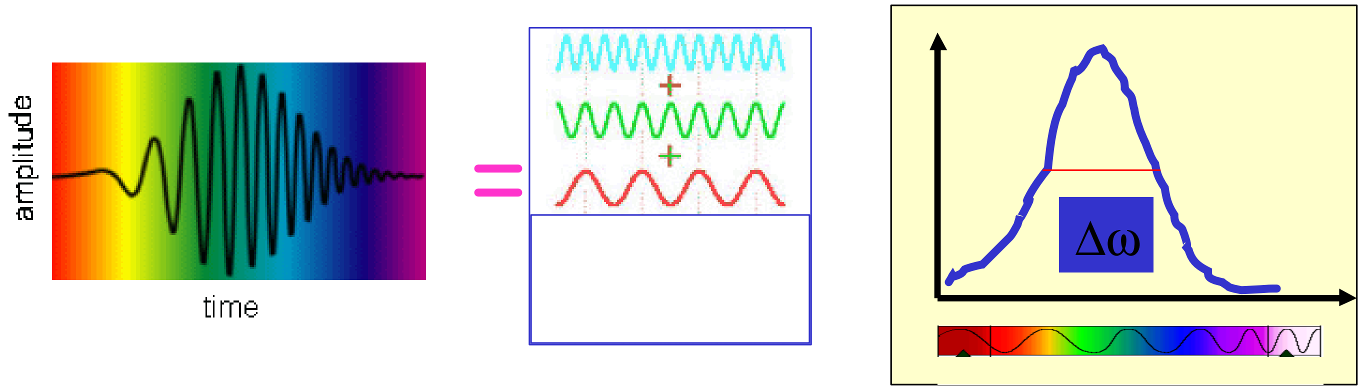


En este caso, cada longitud de onda forma un interferograma ligeramente desplazado de los demás y los máximos tienen además diferente anchura, dado que la separación entre máximos en cada interferograma monocromático es proporcional a la longitud de onda. Se puede comprender entonces que si la fuente primaria es muy ancha, espectralmente hablando, es decir, emite un conjunto amplio de frecuencias, podrá suceder que en la pantalla se dejen de apreciar las franjas de interferencia dado que el espacio entre máximos de un color dado se llena de luz procedente de los otros colores.


S
S_1
S_2
d
θ
θ''
θ'
$\lambda_o-\Delta\lambda/2$
λ_o
$\lambda_o+\Delta\lambda/2$
$\omega_o\text{->}\lambda_o$
$\Delta\omega\text{->}\Delta\lambda$
$\Delta\omega<<\omega_o$
I
sin θ
$\frac{\lambda}{d}$
$\frac{2\lambda}{d}$
$\frac{3\lambda}{d}$
I

4.3.2 Interferencias de ondas no monocromáticas

Todo ello nos lleva a plantear el problema de la interferencia de ondas de diferente frecuencia. En general las fuentes de radiación emiten pulsos de una cierta duración temporal $\Delta T'$ (no confundir con el periodo temporal de una onda). Ello quiere decir que un pulso no es monocromático sino que, de acuerdo con el teorema de Fourier, está compuesto de diferentes ondas monocromáticas:



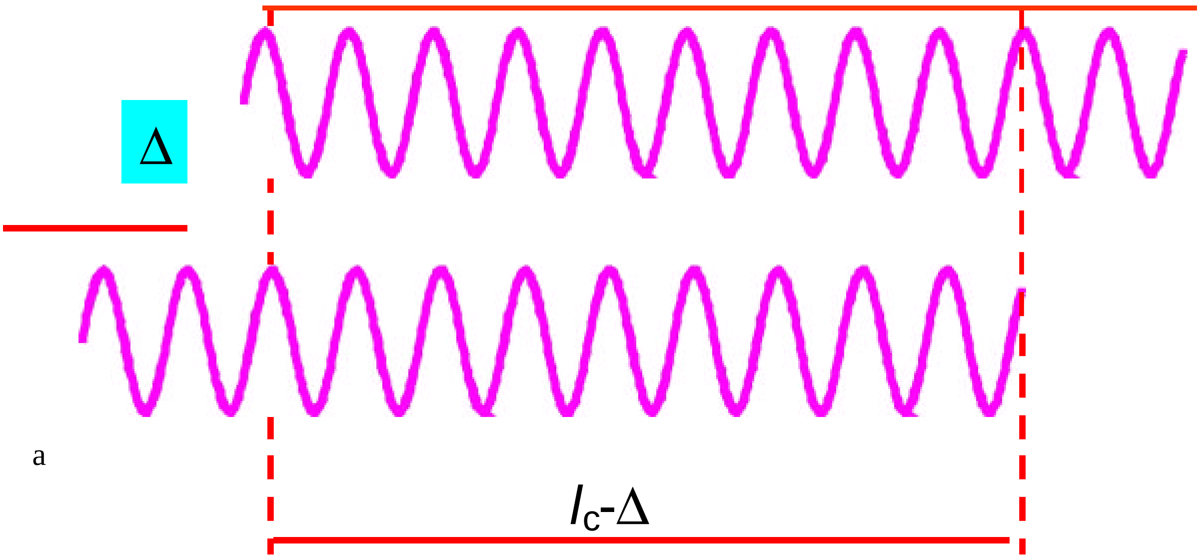
La figura de la izquierda muestra la duración temporal de un pulso mientras que la figura de la derecha muestra el espectro de potencia del pulso, esto es, el contenido espectral del cuadrado del campo eléctrico. Como se ve, aunque el pulso se compone de infinitas ondas monocromáticas, sólo las frecuencias que están cercanas al máximo tienen amplitudes significativas. El contenido espectral del pulso lo podremos reducir a $\Delta\omega$. Este valor esta relacionado con la duración temporal del pulso a través de la expresión:

$$\Delta w = \frac{2p}{\Delta T'}$$

Si el pulso se propaga en el vacío, tendrá una longitud finita $\boldsymbol{L_c}$, que se denomina *longitud de coherencia* por las razones que veremos más tarde. La longitud de coherencia del pulso vendrá dada entonces por

$$L_c = cT' = \frac{2p\,c}{\Delta w} = \frac{\bar{l}^2}{\Delta\, l}$$

Veamos el efecto que tiene sobre la interferencia el hecho de que el pulso sea finito temporal o espacialmente. Sabemos que cualquier dispositivo interferométrico introduce una diferencia de camino óptico entre los haces que interfieren. Parece obvio que si esta diferencia de camino es mayor que la longitud de coherencia L_c, la interferencia desaparece, ya que no se produce la superposición de dos haces *gemelos* procedentes de la misma emisión de la fuente primaria. Se puede comprender mejor esto con ayuda de la figura adjunta, donde se representan dos ondas de longitud y duración finitas que presentan una diferencia de camino óptico dado por Δ producido por el interferómetro. La región de superposición es la zona común (l_c-Δ). Parece obvio que si $\Delta \gg l_c$, las ondas no se superpondrán a la salida del interferómetro y por lo tanto no interferirán.



Para verlo con más detalle vamos a calcular el contraste interferencial de la superposición de estas dos ondas. Si suponemos que la irradiancia de cada onda es proporcional a su longitud, la irradiancia que medirá un detector se deberá, por un lado a la suma incoherente de cada porción de onda que llega al detector sin superponerse, esto es

$$I_{incoherente} = b\Delta + b\Delta$$

A la que habrá que añadir la irradiancia de la porción de las ondas que superponen

$$I = I_{incoheree} + I_c$$

$$I_c = b(l_c - \Delta) + b(l_c - \Delta) + 2\sqrt{b^2(l_c - \Delta)^2}\cos k\Delta$$

El contraste se obtiene inmediatamente a partir de estas expresiones

$$C = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = \frac{l_c - \Delta}{l_c}$$

Puede verse que el contraste es máximo si $\Delta=0$, y se hace nulo si $\Delta=l_c$. En definitiva, la condición para que dos pulsos policromáticos interfieran e una manera estable, es necesario que la longitud de coherencia de los pulsos sea mayor que la diferencia de camino que existe entre ellos en el punto donde se superponen.

Luz

$300\,nm \le \lambda \le 700\,nm$

Por ejemplo, supongamos que un haz de luz blanca tiene una anchura espectral del orden de 400 nm. Su longitud de coherencia será del orden de

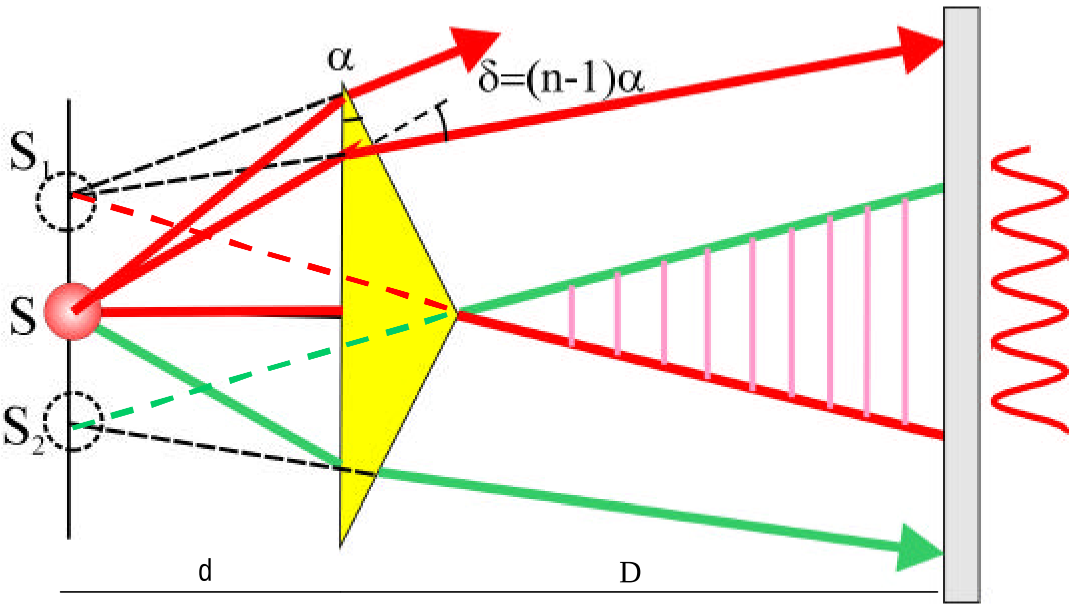
$$l_c \approx ct_p = \frac{2\pi c}{\Delta\omega} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{500^2}{400} = 0.6\,mm$$

Esto quiere decir que si sobre una lámina paralela de espesor 5 mm incide luz blanca, las ondas reflejadas en la primera y segunda caras no interferirán ya que la diferencia de camino entre ellas, será, como mínimo *2ne=15* mm, que es mucho mayor que la longitud de coherencia del haz de luz. De ahí que estas interferencias aparezcan cuando la luz blanca incide sobre láminas muy delgadas, como en una pompa de jabón, o en una capa delgada de aceite sobre agua, etc.

A continuación se dan algunas fuentes de radiación y su anchura espectral.

Source	Center Wavelength (nm)	Bandwidth (nm)	Emission Power
Edge-emitting LED	1300, 1550	50-100	20-300 μW
Superluminescent diode (SLD)	800, 1300	20-30, 40-50	1-10 mW, 1-5 mW
Multiple QW LED/SLD	800, 1480	90	15 mW, 5 mW
Laser-pumped fluorescent organic dye	590	40	9 mW
Mode-locked Ti:Al_2O_3 laser	800	350	400 mW
Mode-locked Cr^4:fosterite laser	1280	75	30 mW
Superfluorescent optical fibers: Er-doped, Tm-doped, ND-/Yb-doped	1550, 1800, 1060	40-80, 80, 65	10-100 mW, 7 mW, 108 mW
Supercontinuum generating fibers	500-725	350-1200	20-300 mW

4.3.3 Otros interferómetros tipo Young.



La separación entre las fuentes virtuales que actúan como fuentes de Young es

$$a \equiv 2SS_1 = 2d\,\tan(d) = 2d\,\tan[(n-1)a]$$

Por lo tanto, la interfranja viene dada por

$$In = \frac{l\,(d+D)}{2d\,\tan[(n-1)a]}$$

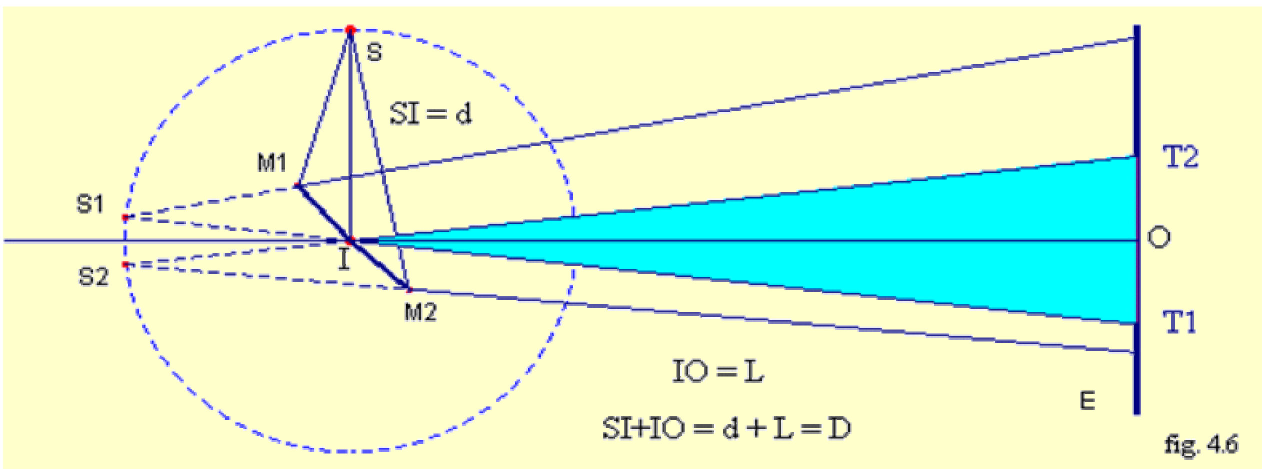
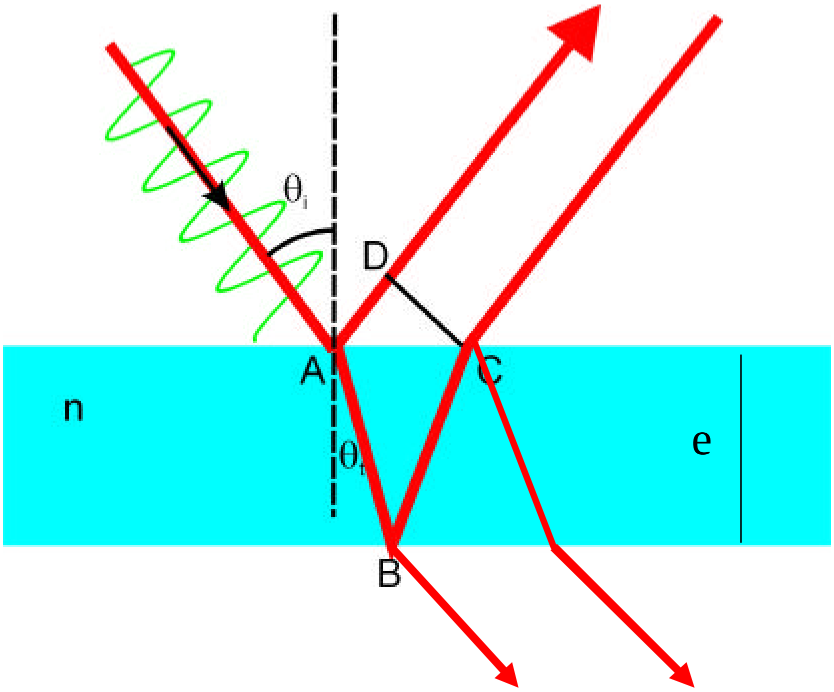


fig. 4.6

4.4 Interferencias por división de amplitud: Interferómetros de doble haz.

Otra manera muy simple de hacer interferir dos haces consiste en dividir la amplitud del haz incidente mediante una lámina de vidrio de índice *n* y espesor *e*, rodeada de aire (n=1). Es evidente que el haz que se refleja en la segunda cara de la lámina recorre más camino óptico que el primero por lo que al salir presentará una diferencia de fase respecto del primero. Otro tanto ocurrirá con los haces transmitidos.



En este caso vamos a analizar con detalle la luz reflejada. Vamos a obtenerla para la situación de la figura.

La diferencia de camino óptico entre los dos rayos reflejados será

$$\Delta = n(AB + BC) - AD$$

De la figura se tiene que

$$AD = AC\, sen\theta_i$$

$$AB = BC = \frac{e}{\cos\theta_t}$$

$$\tan\theta_t = \frac{AC}{2e}$$

Por lo tanto, la diferencia de fase debido al camino geométrico recorrido por ambos rayos vendrá dada por

$$\delta_G = k\Delta = 2kn\frac{e}{\cos\theta_t} - 2ke\tan\theta_t\, sen\theta_i = 2k\,n\,e\cos\theta_t$$

Además de este desfase debido a la diferencia de camino óptico-geométrico, puede haber un desfase adicional debido a los cambios de fase que tienen lugar en la reflexión de una onda en una interfase. Recuérdese que las fórmulas de Fresnel dan los coeficientes de reflexión y que éstos pueden ser positivos o negativos. Si escribimos las expresiones de los campos asociados a los dos haces reflejados, se tendrá.

$$E = E_1 + E_2 = r_1 E_0\, e^{i\omega t} + r_2 (t_1\, t_1') E_0\, e^{i(\omega t + \delta_G)}$$

Si $(r_1 \,.\, r_2) > 0$, el único desfase entre los haces se debe al camino óptico-geométrico. Pero si $(r_1 \,.\, r_2) < 0$, la expresión anterior se podrá escribir

$$E = E_1 + E_2 = |r_1| E_0\, e^{i\omega t} - |r_2| (t_1\, t_1') E_0\, e^{i(\omega t + \delta_G)} = |r_1| E_0\, e^{i\omega t} + |r_2| (t_1\, t_1') E_0\, e^{i(\omega t + \delta_G + \pi)}$$

donde ahora, los coeficientes de reflexión se toman en valor absoluto. En el caso que nos ocupa, el primer haz se refleja de menor a mayor índice mientras que el segundo haz se refleja en la cara inferior, de mayor a menor índice. Ello indica que el coeficiente de reflexión tiene signo opuesto al de la primera cara. Por lo tanto el desfase global debido a los cambios de fase en la reflexión vale π. Por ello, la diferencia de fase total entre los dos haces, uno reflejado externamente y otro internamente, es en este caso:

$$\delta = \delta_G + \delta_R = 2k\, n\, e \cos\theta_t \pm \pi$$

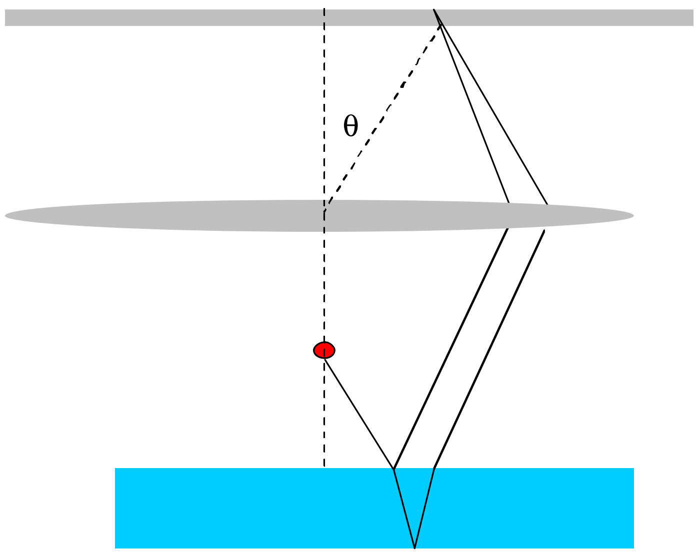
Los máximos de interferencia en la luz reflejada ocurrirán si $\delta = 2m\pi$, es decir

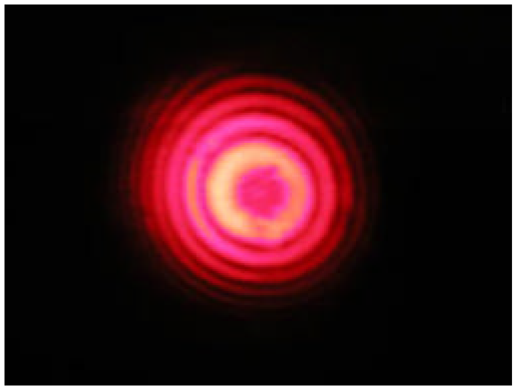
$$2\, n\, e \cos\theta_t = \frac{2m+1}{2}\,\lambda$$

Esta expresión relaciona todas las magnitudes de interés: el índice de refracción del material, el espesor, la longitud de onda. Por ello, se puede obtener información de estas magnitudes físicas a partir de la forma y localización del diagrama interferencial.

En cuanto a la forma de las franjas, en el caso que estamos considerando, si el espesor y el índice se mantienen constantes, los máximos ocurrirán para unos ángulos de observación fijos dados por

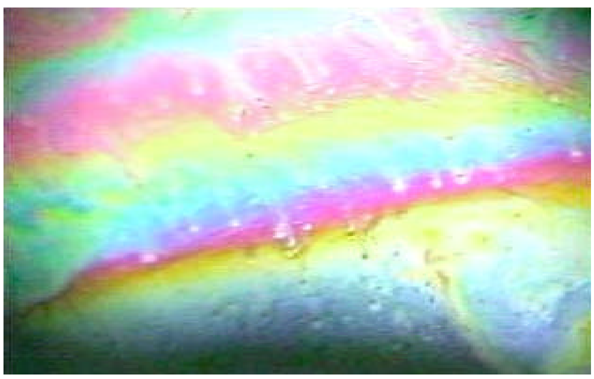
$$\cos\theta_{tm} = \frac{(2m+1)\,\lambda}{4ne}$$





Estas franjas se denominan **franjas de igual inclinación**.

Si incidiese luz policromática, dentro del mismo orden interferencial, los ángulos que producen un máximo para el color rojo serán diferentes de los que producen el máximo para el color azul, produciéndose un diagrama interferencial como el de la figura.



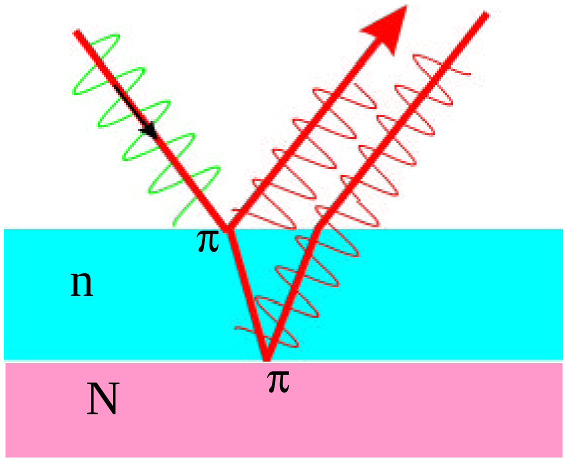
Es importante no olvidar los cambios de fase debidos a la reflexión ya que pueden cambiar por completo la condición de interferencia. Por ejemplo, si analizamos la luz reflejada por una película de aceite (n=1.28) sobre el agua (N=1.33), sucede que en las dos superficies ocurre el mismo cambio de fase por lo que, globalmente, la diferencia de fase entre los dos haces reflejados sólo se debe a la diferencia de camino:

En este caso, los campos reflejados se podrán expresar como

$$E = E_1 + E_2 = -|r_1|E_0\, e^{i w t} - |r_2|(t_1\ t_1^{'})E_0\, e^{i\left(w t + d_G\right)} = |r_1|E_0\, e^{i\,(w t + p)} + |r_2|(t_1\ t_1^{'})E_0\, e^{i\left(w t + d_G + \right.}$$

Por lo que la diferencia de fase solo se debe a que recorren diferente camino óptico:

$$d = d_G + d_R = 2k\, n\, e \cos q_t + 0$$



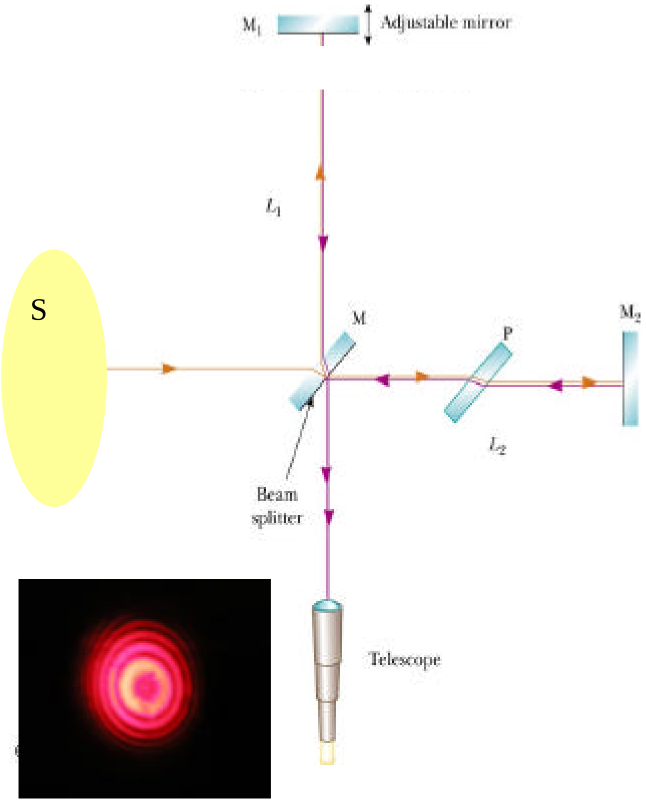
Ahora, la condición de máximo de interferencia es

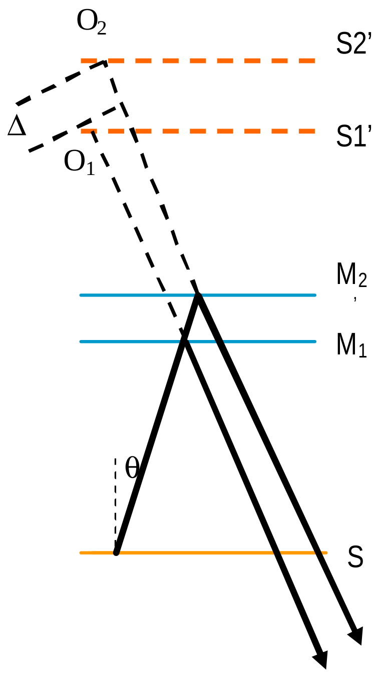
$$\boxed{2\, n\, e \cos q_t = m\, l}$$

que como se ve es diferente al caso anterior en el que la lámina estaba rodeada de aire

4.4.1 Interferómetro de Michelson

El interferómetro de Michelson, introducido por A. Michelson en 1881 ha jugado un papel relevante en el desarrollo de la física. Con él, se han podido establecer evidencias sobre la validez de la teoría de la relatividad al medir la estructura hiperfina de las líneas espectrales emitidas por ciertos átomos. Un esquema se muestra en la figura. Consiste de una fuente extensa de luz que ilumina un espejo semitransparente *M*. Los haces resultantes se dirigen a sendos espejos colocados perpendicularmente uno de otro. Uno de ellos, M_1, es movible y se puede desplazar, permitiendo así variar el camino recorrido por el haz. El otro espejo está fijo. Los haces reflejados por estos espejos se recombinan de nuevo al volver hacia el espejo M e interfieren. Si los espejos están bien alineados, las franjas observadas resulten ser anillos concéntricos tal como se muestra en la figura.





El interferómetro es equivalente a una lámina plano-paralela, de espesor $2(L_1-L_2)$, tal y como se desprende del esquema lateral derecho. En efecto, si calculamos el sistema equivalente respecto de la lámina semitransparente, todo ocurre como si la fuente S estuviera simétricamente situada respecto de la diagonal. Lo mismo ocurre con el espejo M_2, cuya imagen virtual respecto del espejo estará por encima o por debajo de M1 dependiendo de las distancias relativas de ambos al espejo central. Las imágenes de la fuente, respecto de estos dos espejos, estarán simétricamente situadas respecto de cada uno de ellos en S'_1 y S'_2, respectivamente. Por lo tanto, si un rayo parte de la fuente con una inclinación θ, se reflejará en los espejos como si proviniera de los puntos O_1 y O_2. La diferencia de camino entre estos dos rayos será:

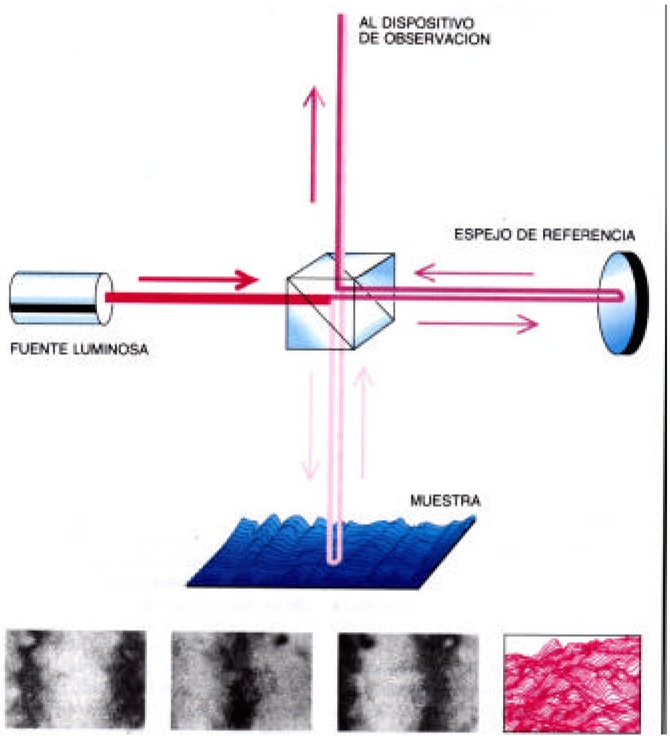
$$2(L_1 - L_2)\cos q = m\, l$$

Como se puede inferir del esquema de rayos y de la condición de interferencia, todos los rayos emitidos con el mismo ángulo θ estarán en la misma condición de interferencia, por lo que las franjas serán circulares. Como ejemplo de aplicación, supongamos, que se quiere medir la longitud de onda λ de una radiación. Supongamos que moviendo el espejo observamos un anillo. Se desplaza ahora el espejo una cantidad ΔL hasta observar que han desfilado N anillos.

$$N\frac{l}{2} = \Delta L \quad \Rightarrow l = \frac{2\Delta L}{N}$$

Si consideramos incidencia normal, cada vez que el espejo se desplaza $\lambda/2$, la diferencia de camino entre los dos rayos ha aumentado en una λ. Por lo tanto, contado el número de franjas podemos determinar la longitud de onda.

En la actualidad la posibilidad de captar imágenes del interferograma y procesarlas en un ordenador ha extendido notablemente la aplicación de las técnicas interferométricas a la obtención de perfiles de superficies o de imágenes tridimensionales de objetos. La técnica recibe el nombre de *muestreo espacial de la fase*. La idea es simple. En lugar de contar franjas, consiste en procesar toda la información contenida en el interferograma. Esta información se encuentra en la fase relativa $\delta(x,y)$, de las ondas que interfieren. Imaginemos el montaje de la figura. En el lugar de uno de los espejos del interferómetro de Michelson se ha situado la muestra superficial cuyo perfil se quiere analizar.



La intensidad resultante en el detector, que puede ser una cámara CCD conectada a un ordenador, será

$$I_1(x,y) = I_0\left[1 + C\cos\delta(x,y)\right]$$

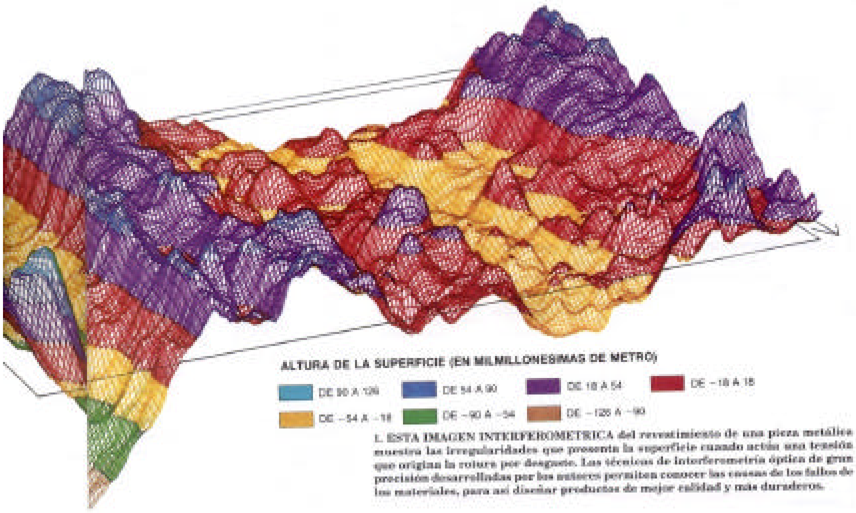
donde $\delta(x,y)$ es la fase relativa entre el haz de referencia y el haz reflejado pr cada punto de la superficie. Obviamente la textura de la superficie produce cambios en la fase, por lo que ésta es una función que depende del punto. Imaginemos ahora que se desplaza el espejo de referencia mediante un desplazador piezoléctrico varias cantidades, por ejemplo, $\lambda/8$, $2\lambda/8$, y $3\lambda/8$, respecto de su posición original, al tiempo que se graban en el ordenador las imágenes de los interferogramas resultantes. Estas imágenes vendrán expresadas por

$$I_2(x,y) = I_0\left[1 + C\cos(\delta(x,y) + \frac{\pi}{2})\right] = I_0\left[1 - C\,\mathrm{sen}\,\delta(x,y)\right]$$
$$I_3(x,y) = I_0\left[1 + C\cos(\delta(x,y) + \pi)\right] = I_0\left[1 - C\cos\delta(x,y)\right]$$
$$I_4(x,y) = I_0\left[1 + C\cos(\delta(x,y) + \frac{3\pi}{2})\right] = I_0\left[1 + C\,\mathrm{sen}\,\delta(x,y)\right]$$

Ahora en el ordenador se puede calcular la siguiente imagen:

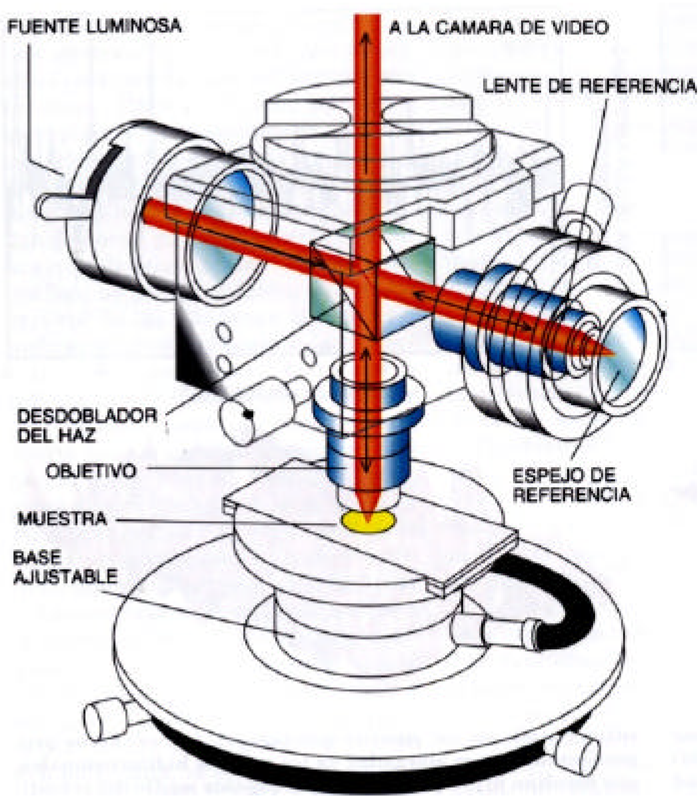
$$F(x,y) = \frac{I_4(x,y) - I_2(x,y)}{I_1(x,y) - I_3(x,y)} = \tan\delta(x,y)$$

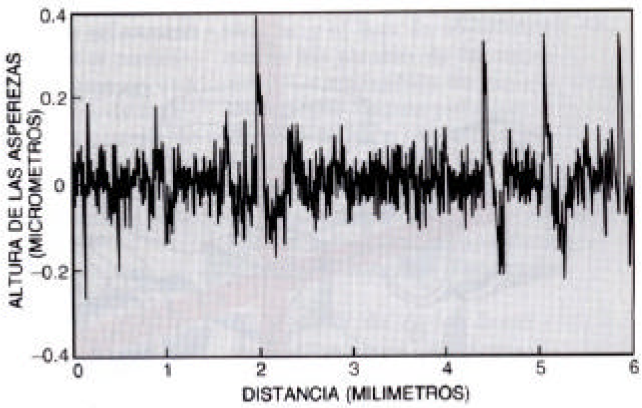
A partir de esta ecuación podemos obtener la fase $\delta(x,y)$ ya que conocemos $F(x,y)$. En la figura se muestra el perfil de las irregularidades de una capa de metal.

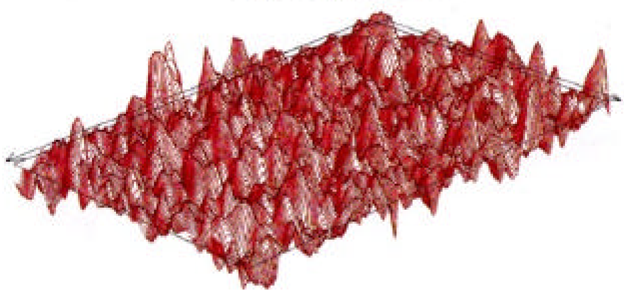


1. ESTA IMAGEN INTERFEROMETRICA del revestimiento de una pieza metálica muestra las irregularidades que presenta la superficie cuando actúa una tensión que origina la rotura por desgaste. Las técnicas de interferometría óptica de gran precisión desarrolladas por los autores permiten conocer las causas de los fallos de los materiales, para así diseñar productos de mejor calidad y más duraderos.

El interferómetro se puede incorporar a un microscopio que aumenta el tamaño del interferograma tal como se indica en la figura. Las imágenes para cuatro posiciones del espejo de referencia se envían a una cámara y de aquí al ordenador para su procesamiento. Se obtienen así imágenes tridimensionales de la superficie como la que se muestra a la derecha.







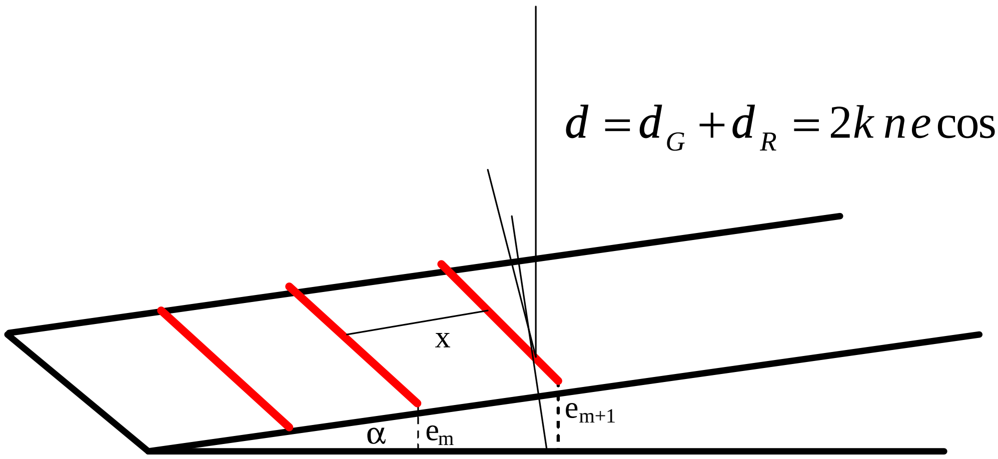
5.1 Algunas aplicaciones de las interferencias.

Hemos visto anteriormente que los máximos o mínimos de interferencia ocurren cuando el desfase relativo entre las ondas que interfieren δ, toma valores especiales. En cualquier caso, δ es una función que depende de las características de los medios en los que se propagan las ondas, esto es, δ = δ(e, n, λ,...). Por ello, a partir del interferograma, se puede obtener información de estos parámetros. A continuación comentaremos algunas aplicaciones de las interferencias.

5.1.1 Medidas de espesores y ángulos.

Si el espesor de la capa delgada es variable, y la incidencia se mantiene constante, los máximos ocurrirán para determinados espesores fijos. Las franjas obtenidas representarán el lugar geométrico de espesor constante, es decir, nos proporcionarán un mapa de curvas de nivel del substrato. Las franjas obtenidas se denominan **franjas de igual espesor**. En el caso de la figura se tienen una cuña de vidrio de ángulo α muy pequeño. En este caso, en el borde inferior se produce una franja oscura dado que al ser allí el espesor nulo, los rayos presentan una diferencia de fase de π debido a la reflexión de aire a vidrio y de vidrio a aire. Por lo tanto en todos los puntos de espesor nulo se satisface la misma condición de interferencia destructiva y hay un mínimo. Para otros espesores donde el desfase total sea múltiplo de (2m+1)π, ocurrirá lo mismo. Así que sobre la superficie de la cuña aparecerán franjas paralelas a la arista.

$$d = d_G + d_R = 2k\,n\,e\cos q_t \pm p = (2m+1)p$$

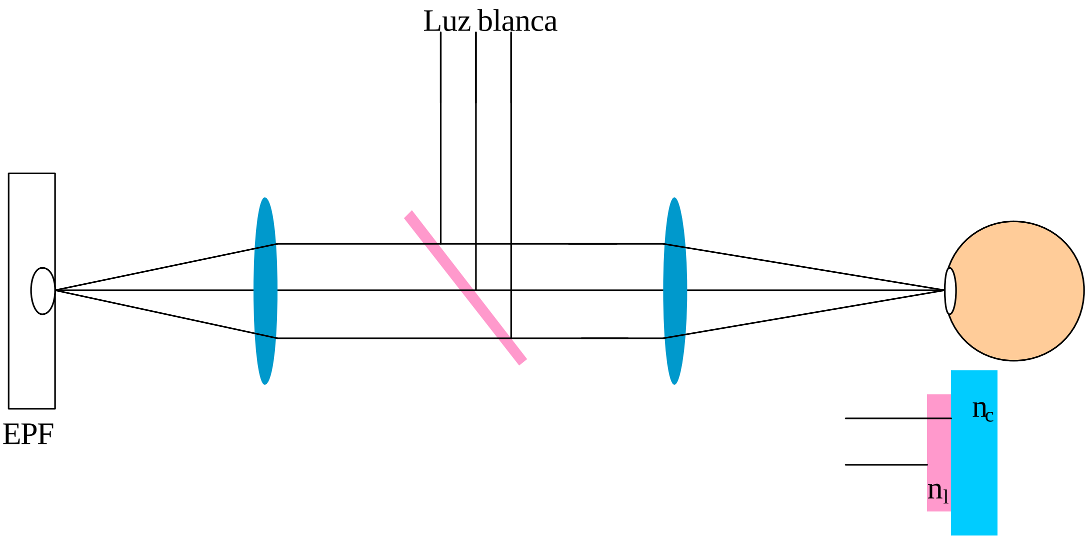


$$e_m = \frac{(2m+1)\,l}{4n}$$

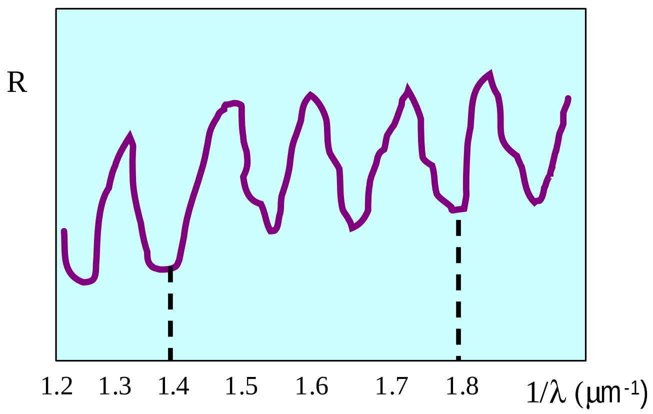
A partir de una medida experimental de la interfranja podemos obtener el ángulo de la cuña. En efecto, de la figura se tiene

$$sen a = \frac{e_{m+1} - e_m}{x} = \frac{l}{2nx}$$

Por ejemplo, basados en este método podemos estimar el espesor de la lágrima en el ojo y su uniformidad. En efecto, considérese el sistema de la figura. Sobre el ojo, y en incidencia próxima a la normal, mandamos un haz de luz blanca. La luz reflejada por las superficies de la lágrima es recogida por las lentes y llevada hasta un espectrofotómetro (EPF) que permite medir la reflectancia para cada longitud de onda. Como se puede apreciar en el montaje, el haz ilumina una zona muy pequeña de la película lacrimal, por lo que podremos considerar el espesor constante en la zona iluminada. Dado un espesor, habrá longitudes de onda para las cuales se cumpla la condición de interferencia constructiva o destructiva, dando lugar a la aparición de máximos o mínimos respectivamente para esas longitudes de onda.



Si representamos la reflectancia frente al número de onda ($\nu=1/\lambda$), se obtiene un diagrama de franjas que depende del color o longitud de onda. Si asumimos que el índice de la lágrima η=1.34 es menor que el índice de la córnea n_c=1.4, no hay desfase entre los rayos debido a la reflexión , por lo que la condición de mínimo será:



$$d = \frac{4p}{l} n_l\, e \cos q_t = (2m+1)p$$

Eligiendo dos mínimos cualesquiera, tales como $\nu_1=1.4$ y $\nu_4=1.8$, que se diferencian en tres órdenes, se tendrá

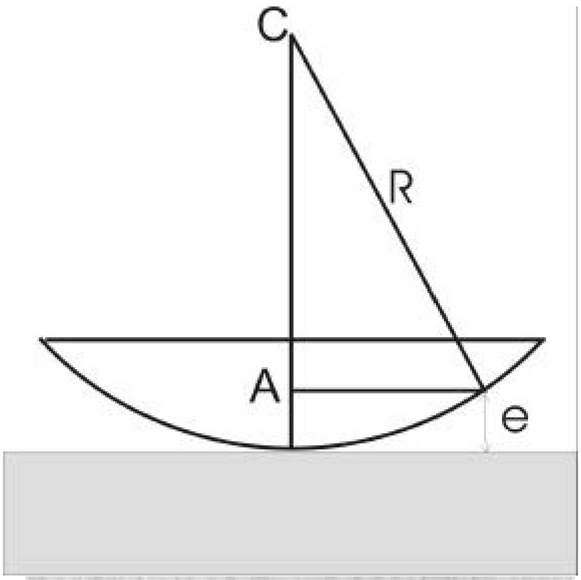
$$4n_1\, n_l\, e = (2m+1)$$
$$4n_4\, n\, e = [2(m+3)+1)]$$

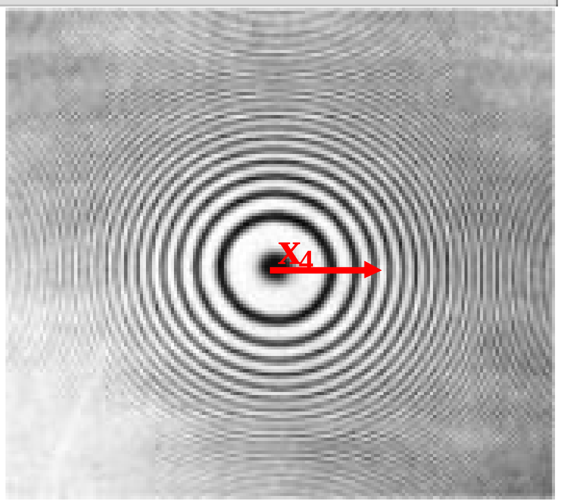
Restando ambas ecuaciones, se llega a que el espesor de la lágrima es

$$e = \frac{3}{2n_l(n_4 - n_1)} = 2.8\, mm$$

5.1.2 Medida de radios de curvatura de lentes.

Existen diferentes métodos interferenciales que permiten medir parámetros de una lente tales como su focal, sus radios de curvatura o las aberraciones que presenta. En este caso vamos a estudiar franjas de igual espesor que se producen en el espacio de aire comprendido entre una lente oftálmica y un calibre plano para obtener información sobre el estado de la superficie de la lente y en particular medir su radio de curvatura. Se trata de una técnica sencilla, precisa y conceptualmente muy elemental en cuanto a su descripción teórica.





La técnica de los anillos de Newton constituye un método muy simple para establecer la calidad de una superficie óptica. Normalmente, los diseñadores de lentes indican la calidad de la misma en términos del número de anillos que aparecen cuando se compara con la superficie de un calibre que sirve de referencia. En las lentes de baja calidad suelen aparecer unas cuantas franjas que nos indican lo que se aleja la superficie bajo test de la superficie calibrada. En una lente de mucha calidad se puede llegar a que haya un anillo. La precisión que se puede obtener con esta técnica sencilla es del orden de $\lambda/2$ por lo que es suficiente para lentes oftálmicas dada la tolerancia del sistema visual.

La disposición habitual para observar los anillos de Newton se representa en la figura. La luz de un láser se colima y mediante un divisor de haz se envía la luz reflejada sobre la superficie de la lente cuyo radio se quiere medir. La luz que incide sobre la lente pasa a través el espacio de aire que queda entre ésta y el calibre plano. El haz reflejado por la segunda cara de la lente interfiere con el haz reflejado por el calibre dando lugar a franjas del mismo espesor que se forman aproximadamente sobre la superficie de la lente en forma de anillos.

La diferencia de fase entre los dos rayos reflejados en la segunda cara de la lente y en el calibre plano será

$$\delta = \delta_G + \delta_R = 2k\,n\,e\cos\theta_t \pm \pi$$

Por otra parte, el espesor de la capa de aire entre la lente y el calibre depende de la distancia al centro de la lente, x:

$$e = R - CA = R - \sqrt{R^2 - x^2} = R - R\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}$$

Si observamos a distancias próximas al centro de la lente y consideramos lentes de radios grandes tales que x<<R, podremos llevar a cabo un desarrollo en serie de la raíz cuadrada hasta primer orden en x^2/R^2:

$$e = R - R\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \cong R - R\left[1 - \frac{x^2}{2R^2}\right] = \frac{x^2}{2R}$$

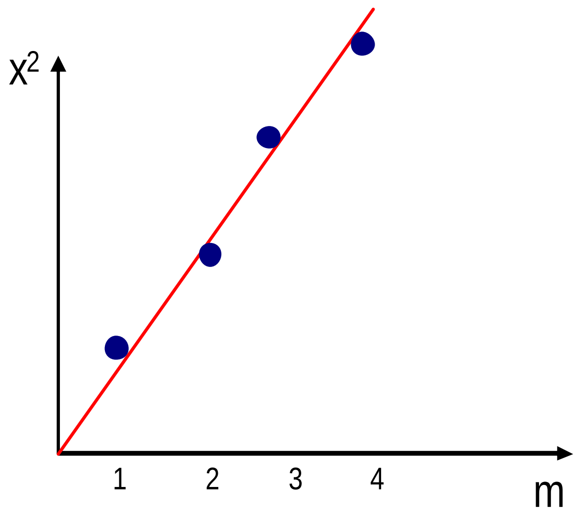
Por lo tanto, el desfase relativo entre los dos haces es

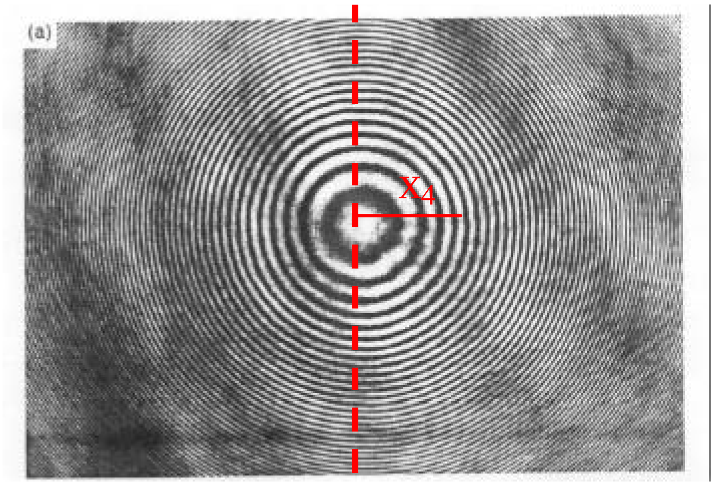
$$\delta = \delta_G + \delta_R = 2k\,n\,e\cos\theta_t \pm \pi = 2k\,n\frac{x^2}{2R} \pm \pi$$

Los anillos oscuros se obtendrán cuando δ =(2m+1)π, es decir

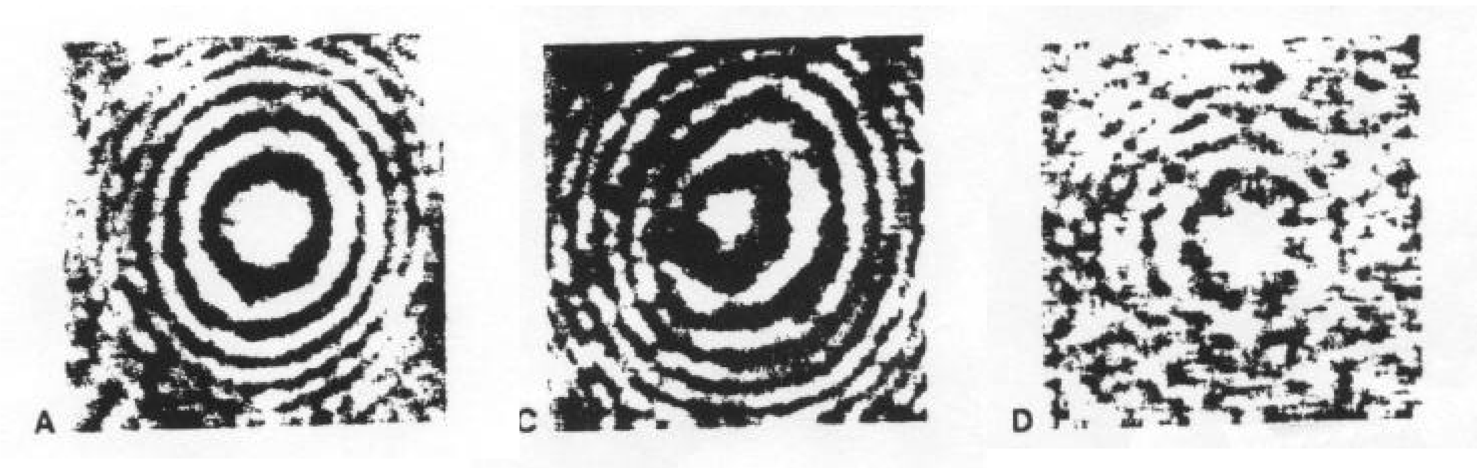
$$2kn\frac{x^2}{2R} \pm \pi = (2m \pm 1)\pi \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{m\lambda R}{n}$$

Así, si medimos el radio de los anillos oscuros, y representamos x^2 frente al orden del anillo, *m*, se obtendrá una recta cuya pendiente es λR.





También se puede usar este montaje para analizar la calidad de las superficies de lentes. En efecto, la aparición de franjas deformadas, en lugar de circulares, indicaría un pulido deficiente de la superficie. En las fotos se muestran interferogramas obtenidos para diferentes gafas de sol.



5.1.3 Recubrimientos antireflectantes.

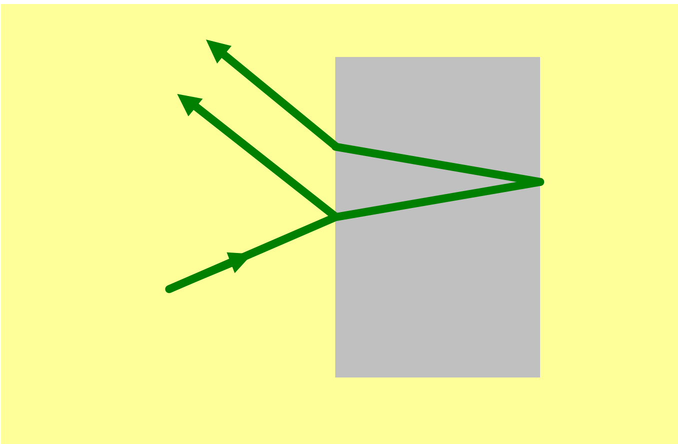
Una de las aplicaciones más interesantes de las interferencias múltiples producidas en láminas delgadas consiste en realizar *recubrimientos mono o multicapa* sobre un substrato dieléctrico para obtener una reflectancia o transmitancia deseada. Así por ejemplo, se puede anular la reflectancia para una o más longitudes de onda, atenuar la reflectancia para una determinada banda espectral, o por el contrario conseguir una muy alta reflectancia próxima al 99 por ciento.

La aplicación de tratamientos antireflejantes en el campo de la óptica convencional permitió, por ejemplo, el desarrollo de objetivos fotográficos de un gran número de lentes que corregían las aberraciones al tiempo que no perdían luz por reflexión en cada una de las interfases. El desarrollo de espejos fríos, que no reflejan el infrarrojo o materiales antitérmicos como los que se colocan en la fuentes de proyección que no transmiten el infrarrojo, evitando así el quemado de la película o diapositiva, etc. En la óptica oftálmica, los tratamientos antireflejantes han proliferado mucho desde los años 80 hasta aquí. La necesidad de evitar reflejos se debe al hecho de que al utilizar una gafa sin tratamiento, llegan a la retina reflejos espúreos que producen imágenes parásitas.

Otras veces surge la necesidad de filtrar determinadas radiaciones que pueden alterar los medios oculares en determinadas patologías o bien es necesario evitar el esparcimiento en caso de cataratas, etc. En un primer momento ello llevó al desarrollo de lentes masivas, es decir, materiales de vidrio óptico u orgánico dopados con óxidos o moléculas pigmento que absorben determinada parte del espectro. Sin embargo, no siempre estos procesos obtienen un buen funcionamiento, dado que la transmitancia no es uniforme y, si se quiere eliminar alguna parte del espectro se disminuye mucho la transparencia general.

En las siguientes secciones describiremos la manera para conseguir que la reflectancia producida por un material dieléctrico sea mínima o nula recubriéndolo con una o más capas muy delgadas de otros materiales dieléctricos. Comenzaremos analizando cualitativamente un ejemplo.

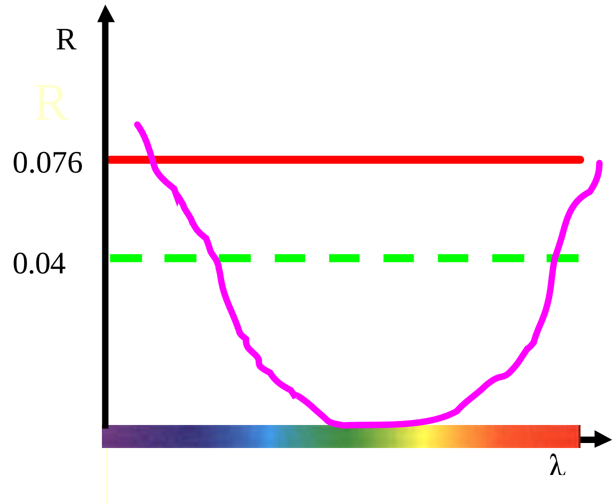
Sabemos que cuando un haz de luz que se propaga en un medio material de índice *n* incide en otro medio dieléctrico y no absorbente, de índice *n'* la amplitud de la onda reflejada viene determinada por los coeficientes de reflexión de Fresnel:



$$r_s = \left(\frac{E_s^r}{E_s^i}\right) = \frac{n_i \cdot \cos\theta_i - n_t \cdot \cos\theta_t}{n_i \cdot \cos\theta_i + n_t \cdot \cos\theta_t}$$

$$r_p = \left(\frac{E_p^r}{E_p^i}\right) = \frac{n_t \cdot \cos\theta_i - n_i \cdot \cos\theta_t}{n_i \cdot \cos\theta_t + n_t \cdot \cos\theta_i}$$

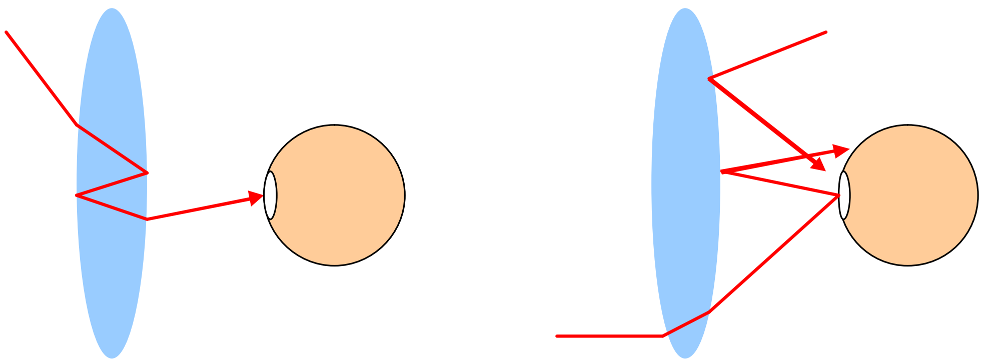
Así por ejemplo para incidencia en aire-vidrio de índice n=1.8, el coeficiente de reflexión en la primera cara vale r_1=0.203, mientras que en la segunda superficie vidrio-aire vale r_2=-0.203. Asumiremos que la longitud de coherencia de la radiación incidente es mucho menor que el espesor de la lámina. Normalmente una lámina de vidrio de ventana o una lente tienen espesores de varios milímetros y la longitud de coherencia de la luz del sol es de unas micras. Por ello no se producirán efectos de interferencia y la intensidad total será debida a la superposición incoherente de los haces reflejados, esto es, la suma de las irradiancias.



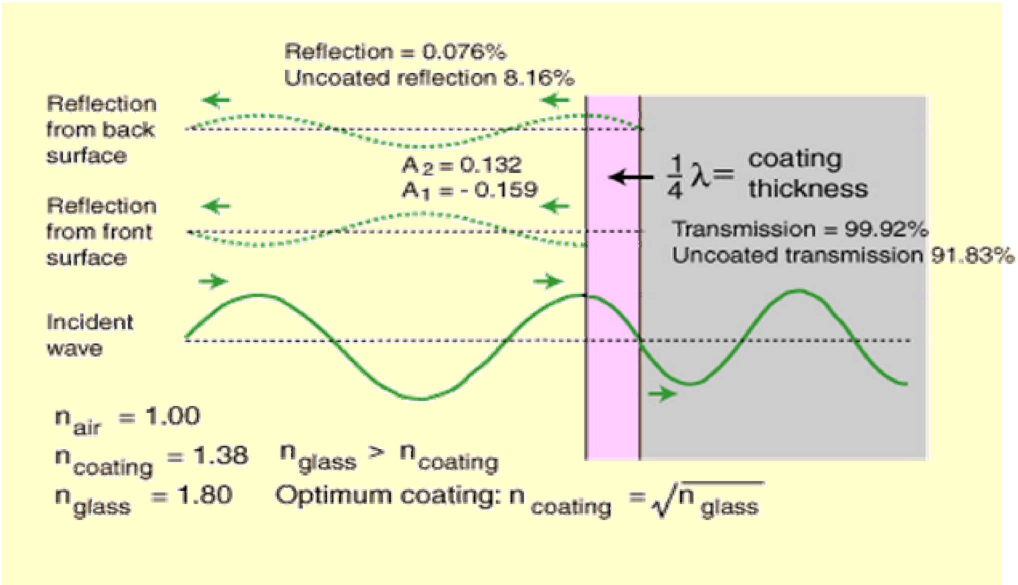
$$I = \frac{1}{2} c e_0 E_0^2 \left(r_1^2 + (t_1 t_1' r_2)^2 \right)$$

Como se ve en la figura, la reflectancia en la primera cara es del orden de un 4% y en la segunda un poco menos, por lo que la reflectancia total representa en torno a un 8% de la irradiancia incidente.

Se puede comprender entonces lo importantes que serán estas pérdidas por reflexión en sistemas ópticos formados por muchas lentes, tales como objetivos fotográficos, telescopios, etc. Por ejemplo, en las lentes oftálmicas, mejora mucho la transparencia de la lente si se recubre ésta con un tratamiento antireflejante que evite los reflejos parásitos o dobles imágenes que se pueden producir en sucesivas reflexiones en ambas caras de la lente o entre esta y la córnea, tal como se puede apreciar en la figura.



Si queremos hacer uso de las interferencias para eliminar la luz reflejada deberemos permitir que interfieran. Esto se consigue si se deposita sobre el substrato de vidrio una capa de material dieléctrico de índice y espesor apropiados, en primer lugar para que las ondas puedan interferir (espesores de unas micras, menores que la longitud de coherencia de la fuente de luz) y después para lograr que interfieran en fase o en oposición de fase. Por ejemplo, supongamos que estamos interesados en reducir la reflectancia del vidrio anterior para una longitud de onda $\lambda_0 = 550$ nm, recubriéndolo con una fina capa de fluoruro de magnesio (F_2Mg) cuyo índice, en el visible, es aproximadamente $n_c = 1.38$.



Como los haces pueden ahora interferir, la irradiancia reflejada vendrá dada por

$$I = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 \left[r_1^2 + (t_1\, t_1^{'} r_2)^2 + 2 r_1\, (t_1\, t_1^{'} r_2) \cos \delta \right]$$

Los dos primeros términos son positivos, pero el signo del término de interferencia dependerá del valor del desfase, δ, y de los signos de r_1 y r_2. El cambio de fase debido a la reflexión es el mismo en ambas superficies ya que $1 < n_c <$ N. Por lo tanto, la diferencia de fase entre los dos haces, en incidencia normal, se debe exclusivamente a la diferencia de recorrido dentro de la capa de Fluoruro.

$$\delta = \delta_G + \delta_R = 2k\, n\, e$$

Por lo tanto, bastará que $\cos \delta = -1$ para que la interferencia sea destructiva:

$$2k\, n\, e = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow \quad e = (2m+1)\frac{\lambda}{4n}$$

El mínimo espesor que puede tener esta ocurre para m=0, es decir, capa es de $\lambda/4n$. En efecto, en este caso la segunda onda recorrerá dos veces este espesor por lo que se habrá retrasado una distancia total de $\lambda/2$, respecto de la primera. Por lo tanto, las ondas reflejadas estarán en oposición de fase, tal como se ve en la figura. En el caso considerado, el espesor mínimo de la capa para que ocurra interferencia destructiva es

$$e = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550}{4\text{x}1.38} = 99.6 nm$$

Por otro lado, los coeficientes de reflexión y transmisión en la primera y segunda cara valen

$$r_1 = \frac{1-1.38}{1+1.38} = -0.159 \qquad r_2 = \frac{1.38-1.80}{1.38+1.80} = -0.132$$

$$t_1 = \frac{2}{1+1.38} = 0.84 \qquad t'_1 = \frac{2x1.38}{1+1.38} = 1.16$$

Sustituyendo los valores en la expresión de la irradiancia se obtiene

$$I = I_0 \left[(0.159)^2 + (0.84x1.16x0.132)^2 + 2(0.159x0.84x1.16x0.132)\cos\pi \right] = 9.6x10^{-4}\ I_0$$

Esta reflectancia mínima se produce para una determinada longitud de onda. Para longitudes de onda más cortas o más largas, la reflectancia crece, ya que la diferencia de fase ya no es π, por lo que dejará de cumplirse la condición de interferencia destructiva. De hecho puede suceder que, para el espesor dado, exista una longitud de onda para la cual el desfase sea de 2π y las ondas reflejadas se superpongan en fase. En este caso la reflectancia presentará un máximo y tendremos, para esa nueva longitud de onda, una estructura dieléctrica de alta reflectancia.

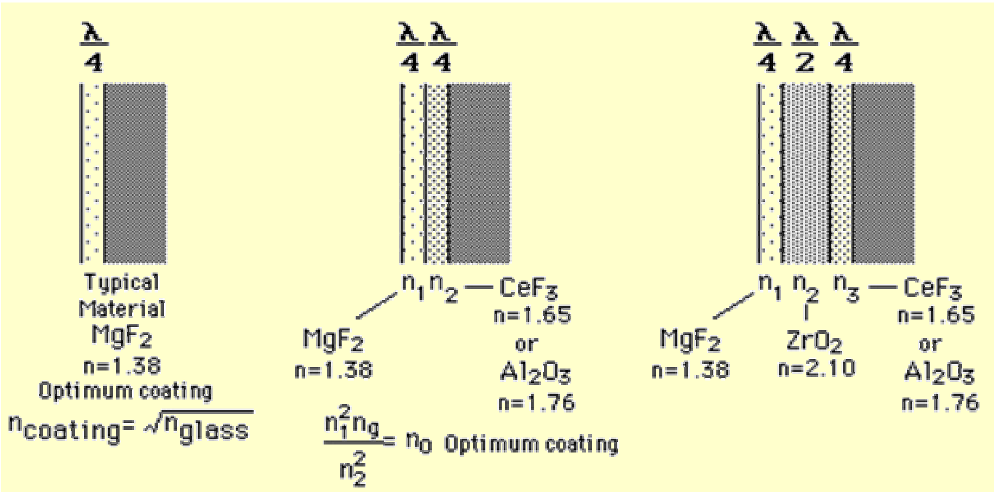
Por ejemplo, si el sistema anterior lo iluminamos ahora con otra longitud de onda de λ=700 nm, dejando fijas las condiciones obtenidas de espesor e incidencia normal, el desfase ya no será π, sino que vendrá dado por

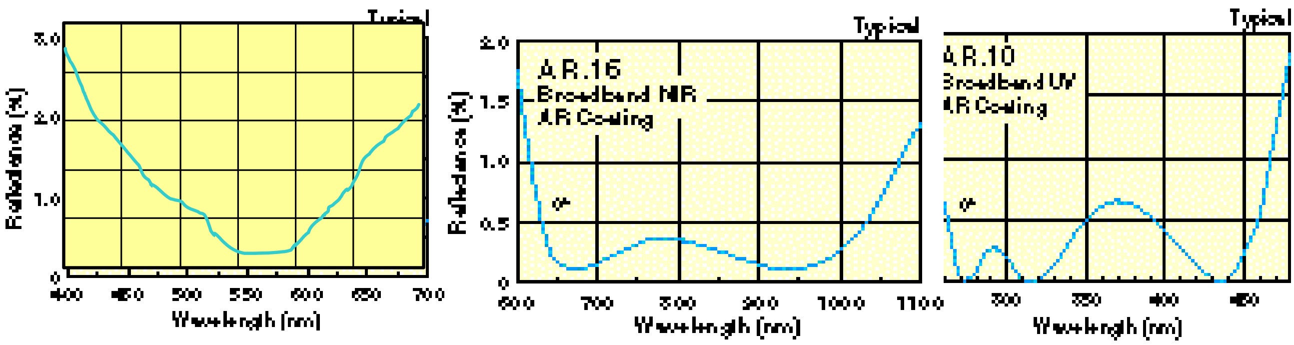
$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} ne = \frac{4\pi}{\lambda} n \frac{\lambda_0}{4n} = \pi \frac{\lambda_0}{\lambda} = \pi \frac{550}{700} = 2.47 \quad rad$$

Por lo tanto, cos δ= cos (141.42º)=-0.78. En este caso, repitiendo los cálculos para este nuevo valor del desfase se obtiene una reflectancia R= *0.01*, es decir, unas 6 veces mayor que la obtenida para 550 nm.

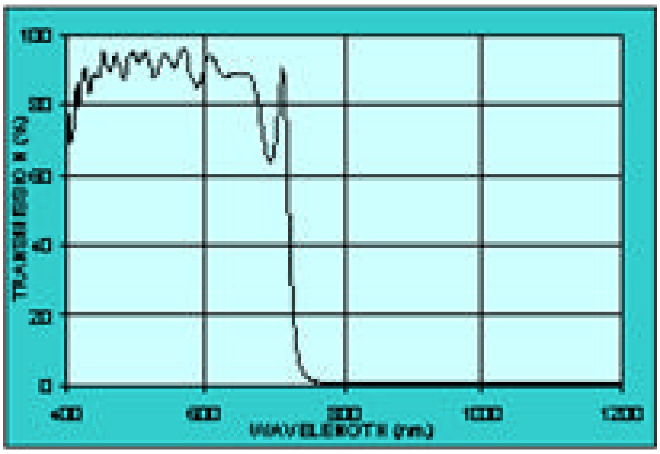
Como se comprende pues, la longitud de onda para la cual la reflectancia se hace mínima depende del espesor de la capa dieléctrica de fluoruro. Por ejemplo, si el espesor óptico es $\lambda_0/4$ para la región verde del espectro visible, la reflectancia será mínima en esa región. El vidrio con este tratamiento aparecerá púrpura ya que reflejará en mayor proporción las radiaciones de las regiones azul y roja del espectro. Este tratamiento se utiliza en las lentes para fotografía en blanco y negro. Para fotografía en color la capa de fluoruro es más delgada de tal manera que la reflectancia es mínima para el azul. Estos recubrimientos presentan un aspecto ambarino al ser observados por reflexión.

Nos podríamos preguntar si es posible obtener reflectancia nula para alguna longitud de onda. Desde luego no sería posible sumando sólo dos ondas ya que, aunque interfieran destructivamente, sus amplitudes son diferentes. Sin embargo, la realidad es que en la monocapa se producen muchas más reflexiones. Si sumáramos todas las ondas reflejadas internamente, éstas estarían en fase entre sí y en oposición de fase con la primera, que es la de mayor amplitud. En ese caso se puede obtener una condición para que la reflectancia sea nula. Vamos a realizar un análisis cuantitativo en la siguiente sección. Antes comentaremos que podemos obtener reflectancia mínima para dos longitudes de onda específicas añadiendo dos capas al substrato. En este caso disponemos de dos espesores e índices para controlar la condición de interferencia destructiva. En general, añadiendo sucesivas capas podemos realizar tratamientos para obtener reflectancias mínimas o máximas en un amplio rango espectral. En la figura se muestran algunos casos con las curvas de reflectancia.

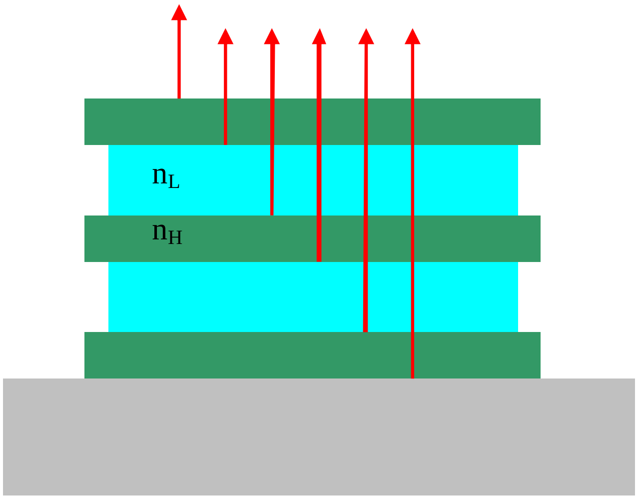




Se pueden realizar también filtros de corte como el que se muestra en la figura, en el que se puede apreciar que se transmite muy bien el espectro visible pero no así el infrarrojo. Este tipo de filtros se denominan antitérmicos y se utilizan en sistemas de iluminación donde se concentra mucha energía infrarroja procedente de la lámpara



En muchas aplicaciones se trata de obtener reflectancia máxima en lugar de mínima. Por ejemplo en espejos para láseres de potencia donde los espejos metálicos presentan problemas de utilización debido a que estos espejos siempre absorben. Vamos a analizar cualitativamente un caso de multicapa de alta reflectancia. En efecto considérese la estructura dieléctrica de la figura. Está formada por un substrato de índice n_S, y una serie de capas alternadas de índices n_H y n_L. Los índices satisfacen $n_H > n_S > n_L$. Los espesores de las capas son $\lambda_0/4n_L$ y $\lambda_0/4n_H$, respectivamente.



Los desfases de los rayos reflejados en las interfases, respecto al rayo incidente son

$$d_1 = p$$

$$d_2 = 2\frac{2p}{l} n_H \frac{l}{4n_H} = p$$

$$d_3 = p + 2\frac{2p}{l} n_L \frac{l}{4n_L} + 2\frac{2p}{l} n_H \frac{l}{4n_H} = 3p$$

$$d_4 = 2\frac{2p}{l} n_L \frac{l}{4n_L} + 4\frac{2p}{l} n_H \frac{l}{4n_H} = 3p$$

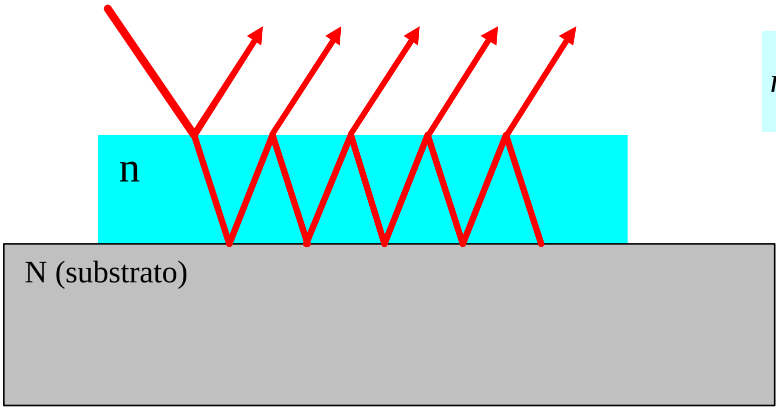
$$d_5 = p + 4\frac{2p}{l} n_L \frac{l}{4n_L} + 4\frac{2p}{l} n_H \frac{l}{4n_H} = 5p$$

$$d_6 = 4\frac{2p}{l} n_L \frac{l}{4n_L} + 6\frac{2p}{l} n_H \frac{l}{4n_H} = 5p$$

Se puede observar que todos los haces reflejados están en fase, por lo que interferirán constructivamente, es decir, se trata de una multicapa de alta reflectancia.

5.2 Interferencias de múltiples haces.

Al estudiar las interferencias generadas en una lámina sólo hemos considerado las dos primeras reflexiones. Esta aproximación sirve para entender la fenomenología y es bastante aproximada para muchos casos de interés. Sin embargo, existen múltiples reflexiones, de amplitud cada vez más pequeña que permiten eliminar completamente la luz reflejada para una cierta longitud de onda. Además, si las reflectancias de las caras de la lámina es muy alta, (por ejemplo, si están parcialmente metalizadas), no podemos olvidar la contribución de estas ondas múltiples. Por ello, vamos a considerar la situación mostrada en la figura donde n < N. Denominaremos r_1, r'_1 y r_2 a los coeficiente de reflexión aire-capa, capa-aire, y capa-substrato respectivamente y t_1, t'_1 y t_2 a los coeficientes de transmisión respectivos. Así, por ejemplo, para incidencia normal se tendrá:



$$r_1 = \frac{1-n}{1+n}\ , \qquad r_2 = \frac{n-N}{n+N} \quad \text{y} \quad r_1' = \frac{n-1}{n+1}$$

Por otra parte, en cada superficie, se tienen las siguientes relaciones de conservación de la energía:

$$1 = r_1^2 + \frac{n\cos\theta_{1t}}{\cos\theta_{1i}} t_1^2 \qquad 1 = r_2^2 + \frac{N\cos\theta_{2t}}{n\cos\theta_{1t}} t_2^2 \qquad 1 = r'^2_1 + \frac{\cos\theta_{1i}}{n\cos\theta_{1t}} t'^2_1$$

De la figura se obtiene que el campo total reflejado será la suma de las infintas ondas que emergen después de sucesivas reflexiones en la capa:

$$E = r_1 E_0\, e^{i\omega t} + t_1 t'_1 r_2 E_0\, e^{i(\omega t + \delta_G)} + t_1 t'_1 r_1' r_2^2 E_0\, e^{i(\omega t + 2\delta_G)} + \ldots$$

donde δ_G es el desfase entre dos rayos consecutivos producido por la diferencia de camino óptico exclusivamente:

$$\delta_G = 2k\, n\, e \cos\theta_{1t}$$

La suma anterior se puede reescribir como

$$E = r_1 E_0 e^{i\omega t} + t_1 t'_1 r_2 E_0\, e^{i\delta_G}\left[1 + r_1' r_2\, e^{i\delta_G} + (r_1' r_2)^2\, e^{i2\delta_G} + \ldots\right] e^{i\omega t}$$

que representa la suma de una progresión geométrica de razón $r'_1 r_2\, e^{i\delta}$. Por lo tanto

$$E = \left(r_1 + \frac{t_1 t'_1 r_2 e^{i\delta_G}}{1 - r_1' r_2\, e^{i\delta_G}} \right) E_0 e^{i\omega t}$$

Teniendo en cuenta las relaciones de conservación de la energía deducidas anteriormente, se tiene

$$(1-r_1^2)(1-r'^2_1) = (t_1 t'_1)^2$$

Y que $r_1=-r'_1$, se llega a la siguiente expresión para la reflectancia:

$$E = \left(\frac{r_1 + r_2 e^{i\delta}}{1 + r_1 r_2\, e^{i\delta}} \right) E_0 e^{i\omega t}$$

Como puede verse, para que la reflectancia se anule, se tendrá que verificar que

$$r_1 + r_2 e^{i\delta} = 0 \quad \Rightarrow r_1 + r_2 \cos\delta + i r_2 \operatorname{sen}\delta = 0$$

O lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 \\ \delta &= (2m+1)\pi \end{aligned}$$

De aquí obtenemos las condiciones para obtener reflectancia nula:

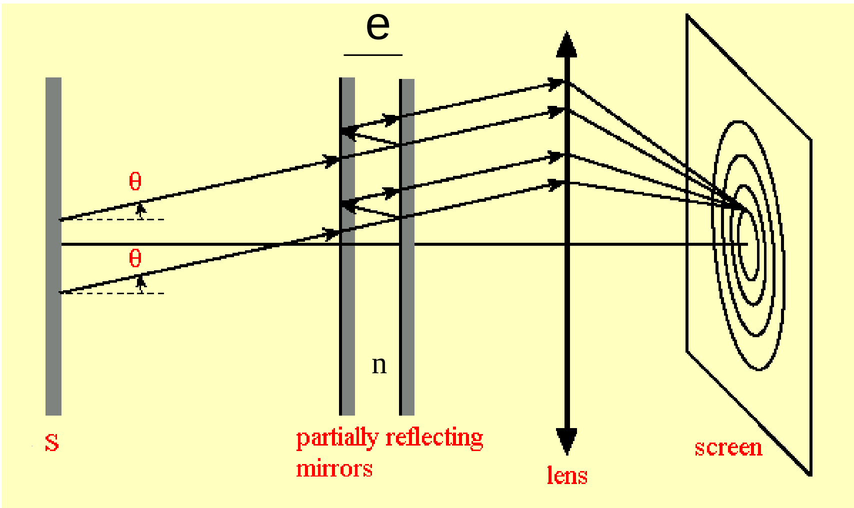
$$r_1 = r_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-n}{1+n} = \frac{n-N}{n+N} \quad \Rightarrow n = \sqrt{N}$$

$$2k\,n\,e\cos\theta_{1t} = (2m+1)\pi$$

Para el vidrio que consideramos al principio, N=1.8, lo que obligaría a recubrir con una monocapa de un material dieléctrico no absorbente de índice de refracción n= 1.22. Desafortunadamente no es posible depositar una película de índice tan bajo que sea durable. El F_2 Mg, con un índice de refracción n= 1.38 representa el material de índice más próximo a la vez que es resistente.

5.2.1 Medida de espectros de emisión: interferómetro de Fabry-Perot.

Una de las aplicaciones más importantes de las interferencias de haces múltiple se refiere a la posibilidad de realizar medidas muy precisas de los espectros de emisión de fuentes de luz. El interferómetro que se utiliza para ello se basa en las propiedades derivadas de las interferencias de ondas múltiples y se denomina interferómetro de Fabry-Perot. Está formado por dos espejos de alta reflectancia, paralelos entre si y separados una cierta distancia ***e***.
Se puede analizar como una lámina plano-paralela rodeada de aire. En este caso, asumiendo que $(r_1)^2=(r_2)^2=R$, la transmitancia se puede obtener de la expresión anterior teniendo en cuenta que T=1-R. El resultado es el siguiente:



Al igual que hicimos anteriormente con las ondas reflejadas, se puede llevar acabo el mismo tratamiento para las ondas transmitidas por el dispositivo. El campo total a la salida es

$$E_T = t_1 t_2 E_0\, e^{i w t} + t_1 t_2 r_1^2 E_0\, e^{i(w t + d_G)} + t_1 t_2 r_1^4 E_0\, e^{i(w t + 2d_G)} + \ldots$$

donde

$$d_G = 2k\, n\, e \cos q_{1t}$$

La suma se puede llevar a cabo fácilmente

$$E_T = t_1 t_2 E_0\, e^{i w t}\left[1 + r_1^2\, e^{i d_G} + r_1^4\, e^{i\, 2d_G} + \ldots\right] = \frac{t_1 t_2 E_0\, e^{i w t}}{1 - r_1^2\, e^{i d_G}}$$

Y de aquí se puede obtener la transmitancia

$$T = \frac{\left|E_T\right|^2}{\left|E_0\right|^2} = \frac{t_1 t_2}{1 - 2r_1^2 \cos d_G + r_1^4}$$

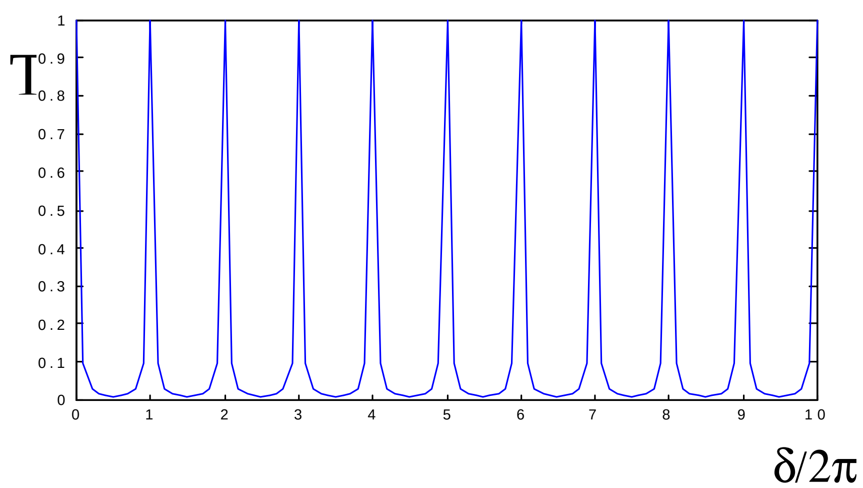
Y teniendo en cuenta que $t_1 t_2 = 1 - r_1^2$,

$$T=\frac{|E_T|^2}{|E_0|^2}=\frac{1}{1+Fsen^2\dfrac{d_G}{2}}$$

donde el coeficiente F se denomina *coeficiente de fineza* del interferómetro y viene dado por

$$F=\frac{4R}{(1-R)^2}$$

Obsérvese que si se ilumina con una fuente extensa, todos los rayos que emerjan paralelos entre sí, convergerán en el mismo punto, por lo que el interferograma será muy contrastado.



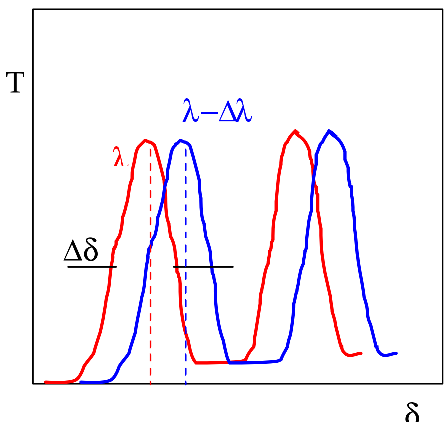
La transmitancia frente al desfase, se representa en la figura. Aparecen máximos cada vez que

$$d=2\frac{w}{c}ne=2mp \quad \Rightarrow \quad w=mp\,\frac{c}{ne}$$

Por otra parte, y esto es lo importante en este interferómetro, si la reflectancia es alta (y por lo tanto, el coeficiente de fineza es también muy alto), los máximos son muy estrechos, espectralmente hablando.

De hecho, a partir de la expresión que da la transmitancia del interferómetro, podemos obtener la anchura de un máximo a mitad de altura. Para ello calculamos el valor de la diferencia de fase para que T=1/2 :

$$T=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+Fsen^2\dfrac{d_{1/2}}{2}} \quad \Rightarrow Fsen^2\frac{d_{1/2}}{2}=1 \quad \Rightarrow \frac{d_{1/2}}{2}\cong\pm\frac{1}{\sqrt{F}}$$



Por lo tanto, la anchura de cada máximo es en fase es $\Delta d_{1/2}\cong\dfrac{4}{\sqrt{F}}$

Si sobre el interferómetro incide dos radiaciones de longitud de onda muy próximas, los máximos respectivos estarán ligeramente separados. Para cada radiación se cumplirá en el máximo que

$$\frac{4p}{l}ne=2mp \qquad y \qquad \frac{4p}{l-\Delta l}ne=2mp+e$$

siendo ***e*** una cierta cantidad que nos indica lo que se desplaza la fase al variar la longitud de onda. Como es obvio, si las longitudes de onda están muy próximas puede que no se resuelvan. Un criterio cómodo consiste en asumir que el mínimo intervalo espectral resoluble ocurre cuando la separación entre ellos coincide con la anchura media $\Delta\delta_{1/2}$, es decir, $e = \Delta\delta_{1/2}/2$. En este caso, a partir de las expresiones de arriba se tiene que

$$\frac{4p}{l-\Delta l} ne = 2mp + \frac{2}{\sqrt{F}} \quad \Rightarrow \frac{4p}{l\left(1-\Delta l / l\right)} ne \cong \frac{4p}{l} ne\left(1+\Delta l / l\right) = 2mp + \frac{2}{\sqrt{F}}$$

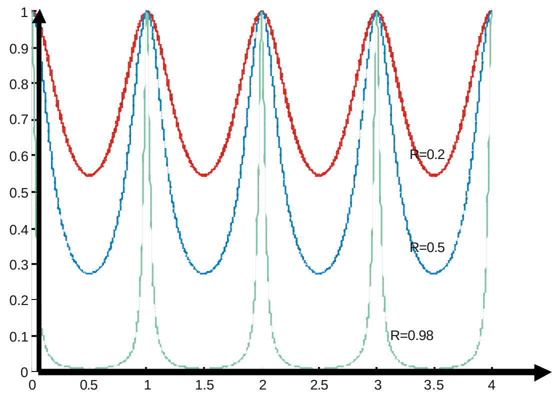
Como el orden máximo ocurre para incidencia normal,

$$2ne = m\,l$$

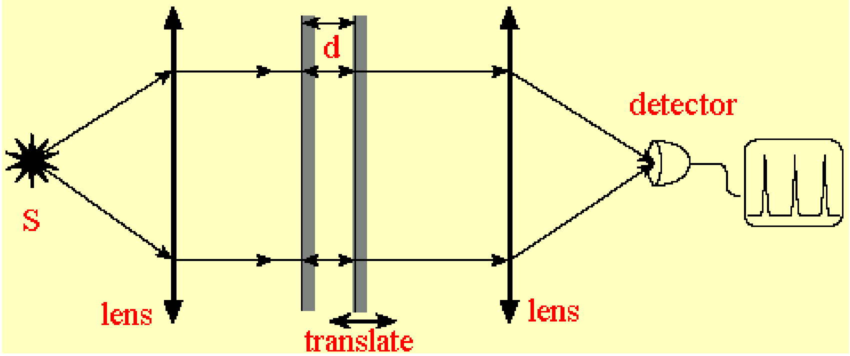
se sigue inmediatamente que

$$\Delta l_{\min} = \frac{l}{mp\sqrt{F}} = \frac{l^2}{2p\,ne\sqrt{F}}$$

Obsérvese que el mínimo intervalo espectral resoluble disminuye mucho al aumentar F, esto es cuanto más se aproxime la reflectancia de los espejos de interferómetro a 1, ya que así, los máximos son más estrechos. En la figura se muestran curvas de transmitancia para diferentes valores de la reflectancia de las caras del Fabry-Perot.



Todo ello, permite entender las posibilidades de este interferómetro para medir el espectro de emisión de una fuente de luz. En efecto, supongamos que sobre el interferómetro dirigimos la radiación policromática de una cierta fuente tal como se indica en la figura. La luz emergente de concentra sobre el detector. Para una cierta separación entre las superficies habrá una cierta longitud de onda que presentará un máximo de transmitancia. Si variamos lentamente la separación d, cambiaremos la condición de resonancia, esto es, serán otras las frecuencias o longitudes de onda que presentarán alta transmitancia. De esta forma, obtendremos el espectro del la fuente de radiación con mucha resolución dado que los máximos son muy *estrechos.*

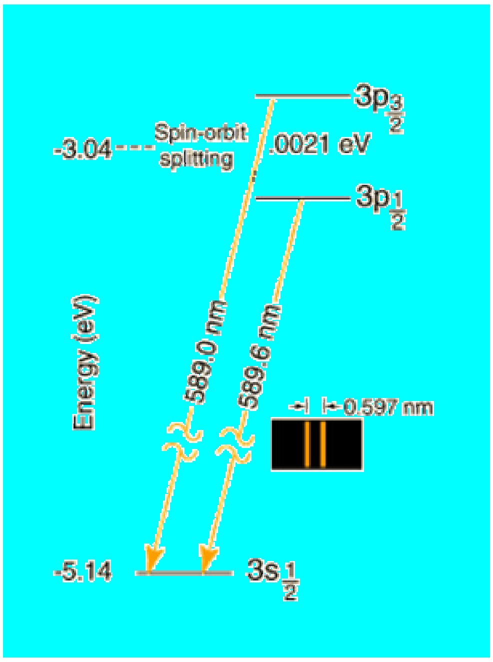


Ejemplo. Calcular el intervalo espectral mínimo que puede resolver un interferómetro de Fabry-Perot que tienen una reflectancia de R=0.9, con las superficies reflectoras separadas una distancia d=1 cm, habiendo aire entre ellas (n=1) e iluminado con una longitud de onda media de $\lambda_0 = 500$ **nm.**

El coeficiente de fineza vale $$F = \frac{4R}{(1-R)^2} = \frac{4\text{x}0.9}{(1\text{-}0.9)^2} = 360$$

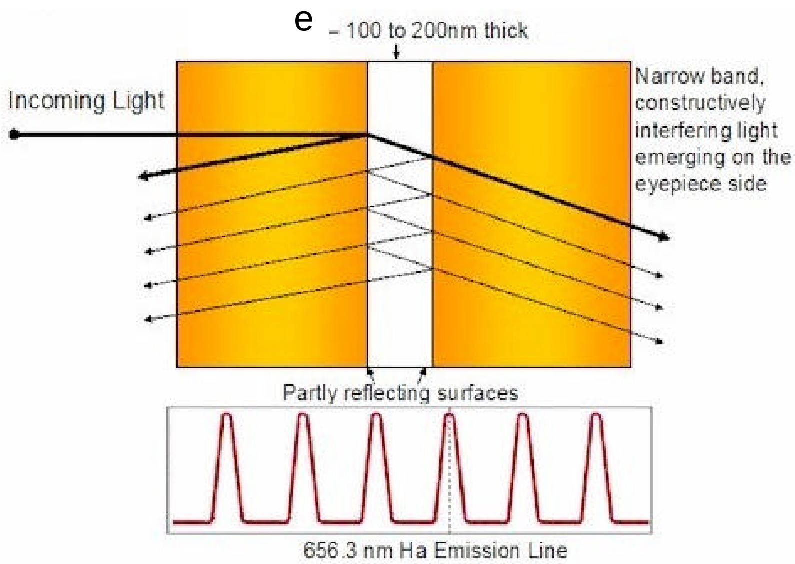
Por lo tanto, $$\Delta\lambda_{\min} = \frac{2\lambda}{m\pi\sqrt{F}} = \frac{\lambda^2}{nd\sqrt{F}} = 0.04\ nm$$

Por ejemplo, con este interferómetro se resuelve sin mucha dificultad el doblete amarillo de una fuente de Sodio:



5.2.3 Filtros interferenciales

La aplicación de espejos de alta reflectancia encuentra aplicaciones en el diseño de cavidades resonantes para láseres o filtros interferenciales especiales. Por ejemplo, si se está interesado en construir un filtro que transmita un estrecho intervalo espectral del haz incidente, basta con situar una película muy delgada, del orden de la longitud de onda que se quiere transmitir, entre dos superficies de alta reflectancia, preferiblemente hechas a base de multicapas dieléctricas. En la figura se indica la configuración.



Por ejemplo, supongamos que queremos diseñar un filtro interferencial para que deje pasar la longitud de onda de emisión del hidrógeno (λ_0= 656.3), en incidencia normal. La condición de interferencia constructiva para cualquier longitud de onda será

$$2ne = ml$$

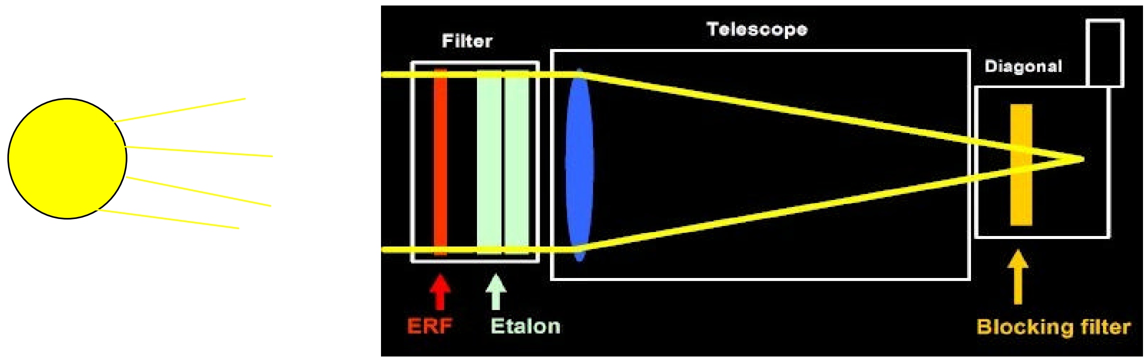
Si elegimos el espesor de manera que $2ne=\lambda_0$, la longitud que queremos que sea transmitida, habrá un máximo muy pronunciado para esta longitud de onda (m=1). Otras longitudes para las que ocurre un máximo serán entonces

$$l_0 = ml \qquad m = 2,3,...$$

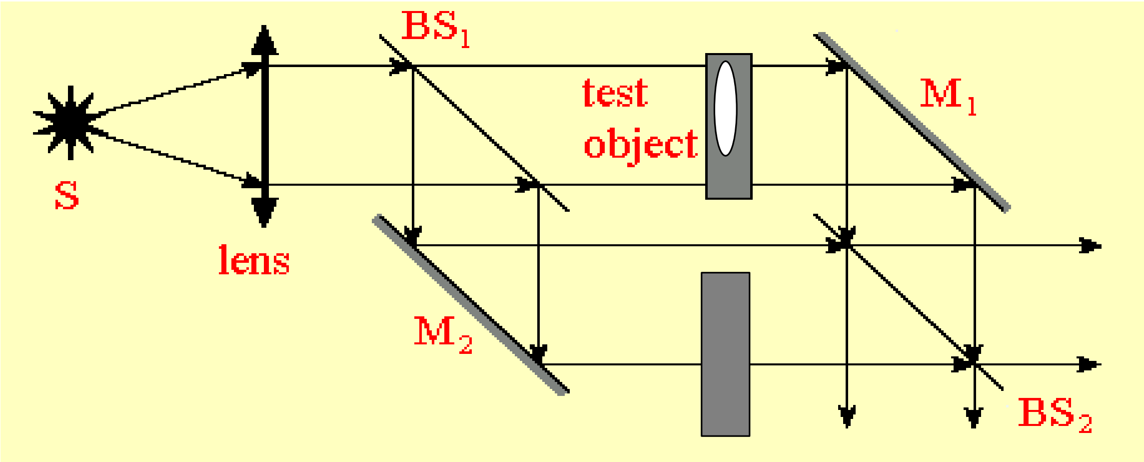
Es decir, no se transmite ninguna de las longitudes de onda mayores a λ_0, aunque sí se transmiten longitudes de onda menores, $\lambda=\lambda_0/m$. Pero estas longitudes están muy alejadas de λ_0 y pueden ser bloqueadas fácilmente haciendo que el substrato contenga algún colorante que las absorba. Por otra parte, las características del filtro serán las mismas que las del interferómetro de Fabry-Perot. En particular, la anchura de banda del filtro, esto es, el intervalo espectral que deja pasar vendrá dada por la fórmula obtenida más arriba. Para un coeficiente de fineza F=4000,

$$\Delta l_{\min} = \frac{2l_0}{mp\sqrt{F}} = \frac{2\text{x}656.3}{p\sqrt{4000}} = 7\,nm$$

Como ejemplo ilustrativo se observa en la figura de abajo el uso de un filtro interferencial incorporado al objetivo de un telescopio solar que permite analizar la emisión de una de las líneas espectrales emitidas por el sol.



4.5.3 Medida del índice del cristalino. Interferómetro de Mach-Zhender.



a