

Circuito RC

Laboratorio de Electromagnetismo y Óptica, Dep. de Física, FCEyN, UBA

Objetivo: Estudiar los transitorios de un circuito compuesto por un capacitor y una resistencia

Temáticas: cargas eléctricas, capacitores, circuitos, transitorios.

I. TRANSPORTE IÓNICO EN MEMBRANAS BIOLÓGICAS

En base a circuitos eléctricos con los elementos que se vieron en la práctica anterior -como resistencias y diodos- se pueden modelar una gran cantidad de fenómenos relacionados a sistemas de irrigación. Pero el caso del circuito RC (resistencia, capacitor) es paradigmático en cuanto a la aplicación de este sencillo circuito como analogía para modelar la fenomenología de un sistema biológico. El sistema en cuestión es la membrana celular y los estudios basados en tal modelización le valieron el premio nobel a John Eccles, Alan L. Hodgkin y Andrew F. Huxley en 1963. En sus trabajos estudiaron los mecanismos iónicos de la excitación e inhibición sináptica y conducción señales a través del axón, lo cual sentó las bases de la neurofisiología actual.

En el modelo se considera a la bicapa lipídica que separa a los iones diluidos en el medio externo e interno de la célula, como el medio dieléctrico de un capacitor. Luego se considera que los canales iónicos que la atraviesan funcionan como conductores con una dada resistencia (o permeabilidad) específica para cada variedad de ion. Finalmente se considera que existen fuentes de fuerza electromotriz que dan lugar al potencial de equilibrio de Nerst de cada ion. Esto puede verse en la figura 1 tomada de la presentación del Nobel de Eccles¹.

Este modelo puede extenderse considerando a todos los canales actuando al mismo tiempo (en vez de una sola resistencia equivalente), si no solo considerando los que se llaman canales activos que dan lugar al potencial de acción como se muestra en la figura 2 (simbolizados con resistencias cruzadas por una flecha) en un modelo no mucho más complejo².

II. CIRCUITO RC

A. Capacitor

Un capacitor está constituido por dos placas conductoras separadas por una distancia pequeña (respecto de las longitudes características de las placas). Generalmente, entre ellas hay un medio dieléctrico. Si se conecta el capacitor a una fuente, las cargas se distribuyen en las superficies, llegando a un equilibrio como se muestra en la figura 3. En cada placa, hay igual cantidad de carga Q (medida en *Coulomb*) pero de signo contrario. Proporcional a esta última es la diferencia del potencial eléctrico

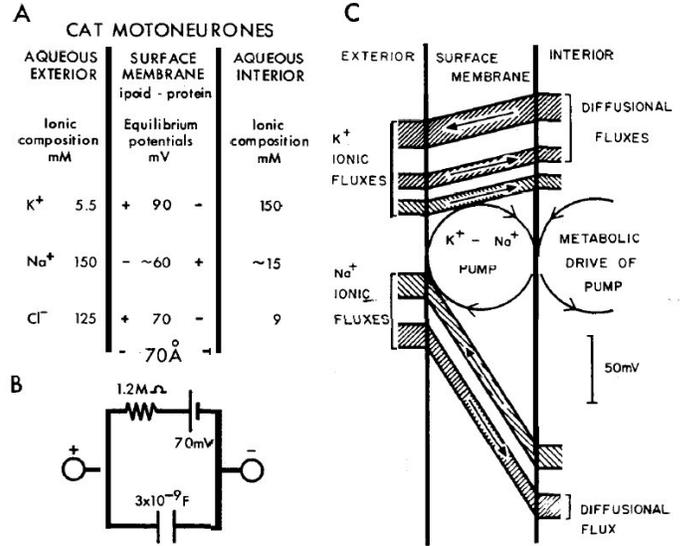


Figura 1. Circuito equivalente de membrana para motoneuronas de gato. (A) Concentraciones intra y extra-celulares aproximadas para los distintos iones y sus correspondientes potenciales de equilibrio, (B) Circuito equivalente de membrana, y (C) Diagrama de los flujos a través de la membrana. Reproducido de¹

ΔV (usualmente solo V) entre las dos placas

$$Q = C\Delta V, \quad (1)$$

donde C es la constante de proporcionalidad llamada *capacitancia*. Esta constante depende de las características del capacitor (la superficie de las placas, la distancia de separación y el material entre las mismas). La unidad de la capacitancia es el *Faradio*

$$\text{Faradio} = \text{Coulomb/Volt}. \quad (2)$$

III. CARGA Y DESCARGA DE UN CAPACITOR

El capacitor recién conectado en el circuito esquematizado en la figura 4 permanecerá descargado mientras el interruptor S esté abierto. Al cerrarse la fuerza electromotriz ϵ_0 impuesta por la fuente impulsa los electrones a través de los cables dando lugar a una corriente de estos I en el circuito. Esta corriente de cargas resulta en la acumulación de carga Q de signo opuesto en las caras del capacitor (figura 3). A medida que esta se incrementa lo hace el ΔV del capacitor (ecuación 1), y cuanto más

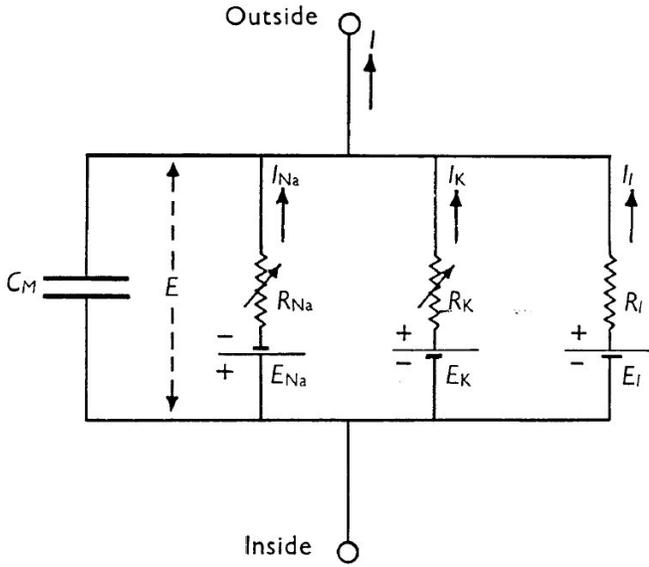


Figura 2. Circuito equivalente de membrana para el axón gigante del calamar. Reproducido de²

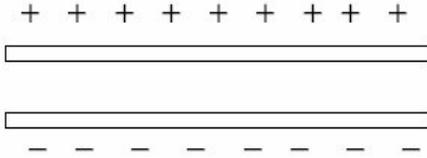


Figura 3. Esquema de capacitor de placas paralelas.

próxima es esta a la ε_0 de la fuente la I se reduce con el tiempo; en particular esperamos que la misma se anule cuando el capacitor haya culminado su carga.

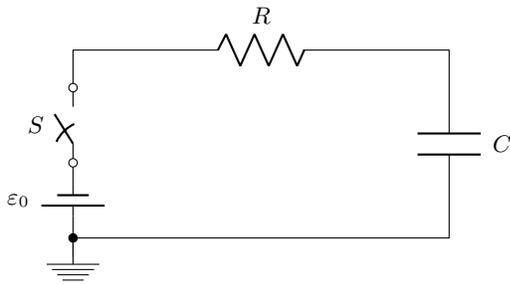


Figura 4. Esquema del circuito RC empleado.

Para estudiar la dinámica (dependencia con el tiempo) del proceso de carga del capacitor estudiamos las ΔV en el circuito. Recorriéndolo a partir del nodo (punto negro) las variaciones que introduzca cada componente del circuito a ΔV debe compensarse para que el potencial sea el mismo al retornar al mismo. La así llamada ecuación de malla para el circuito es

$$+\varepsilon_0 - \Delta V_R - \Delta V_C = 0. \quad (3)$$

Reemplazando ΔV_C con la ecuación 1, ΔV_R con lo que indica la Ley de Ohm, y despejando se llega a

$$\varepsilon_0 = I(t)R + \frac{Q(t)}{C}, \quad (4)$$

donde $I(t)$ como $Q(t)$ varían instante a instante en tanto que la ε_0 de la fuente, la resistencia R del resistor y C son constantes. Empleando ahora la definición de corriente,

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (5)$$

podemos reescribir la ecuación 4 en término de una única función incógnita, ya sea $Q(t)$ o $I(t)$. En el primer caso se obtiene

$$\varepsilon_0 = \frac{dQ}{dt}R + \frac{Q(t)}{C}, \quad (6)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de orden 1 para $Q(t)$, cuya solución dará la evolución temporal (desde un instante inicial dado) de la carga en el capacitor.

Para hallar la solución a esta ecuación se plantea por un lado la solución particular para Q

$$Q_p = C\varepsilon_0 \quad (7)$$

Y la solución homogénea

$$Q_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (8)$$

donde $\tau = RC$ es el tiempo característico del circuito RC, y la constante A se determina de las condiciones del problema particular que se este considerando. Así la solución general es

$$Q(t) = Ae^{-t/\tau} + C\varepsilon_0. \quad (9)$$

Si el capacitor esta inicialmente descargado $A = -C\varepsilon_0$ por tanto

$$Q(t) = C\varepsilon_0 (1 - e^{-t/\tau}), \quad (10)$$

y la corriente en función del tiempo resulta

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} e^{-t/\tau}. \quad (11)$$

IV. CIRCUITO DEL EXPERIMENTO

No mediremos directamente $Q(t)$ o $I(t)$ sino que mediremos ΔV relacionadas a estos que figuraban en la ecuación 3. En el circuito propuesto que muestra la figura 5, V_C es la diferencia de potencial sobre el capacitor y V_R es la diferencia de potencial sobre la resistencia. Así durante la carga la indicación V_C reemplazando en la ecuación 10 con la ecuación 1 sería

$$V_C(t) = \varepsilon_0 C (1 - e^{-t/\tau}), \quad (12)$$

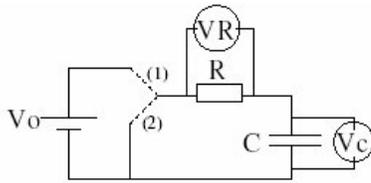


Figura 5. Circuito RC. Dos posibles configuraciones: (1) conectado a la fuente de tensión, y (2) al desconectar la fuente. V_R y V_C indican las mediciones de diferencia de potencial sobre cada uno de los elementos.

y V_R se obtiene según la ecuación 11 y la Ley de Ohm resulta

$$V_R(t) = \varepsilon_0 e^{-t/\tau}. \quad (13)$$

Es importante destacar que si bien las soluciones halladas dependen del tiempo, tienen un comportamiento tal que a tiempos largos llegan a un equilibrio. Ese equilibrio se denomina *estado estacionario*, mientras que el tiempo que transcurre hasta alcanzar ese estado, se denomina *estado transitorio*. En la práctica anterior, donde se estudió la Ley de Ohm, se midió la corriente y la diferencia de potencial en un circuito en estado estacionario, es decir que no había que preocuparse por lo que pasaba cuando se cerraba una llave sino que se asumía que por el circuito instantáneamente circula una corriente igual a la medida o simplemente que se medía lejos del momento en que se encendía la llave (a tiempos en los cuales el sistema se encontraba en un estado estacionario).

Tarea: Resolver el caso en el que el capacitor estaba originalmente cargado y se descarga partiendo de que en la ecuación 3 no hay fuente ($\varepsilon_0 = 0$) y que la condición inicial de carga es $Q(t = 0) = C\varepsilon_0$ porque la fuente está inicialmente conectada.

V. ACTIVIDADES

Ahora se espera ver que pasa a tiempos cortos o cercanos al momento en que se enciende o se apaga una llave, intentando estudiar como varía la carga en función del tiempo $Q(t)$ en el capacitor durante los procesos de carga y de descarga del mismo. ¿Qué son tiempos cortos y tiempos largos? ¿Cuáles son las condiciones del circuito en estado estacionario?

El objetivo de la presente práctica es entonces estudiar el comportamiento no estacionario (transitorio) de un circuito compuesto por un capacitor y una resistencia; y determinar la constante τ del circuito. Para estudiar la dinámica del circuito se propone armar el dispositivo de la figura 5 para estudiar las transiciones de la configuración 1 a la 2 y viceversa; es decir, conectando y desconectando el circuito a la batería.

A. Fuente

Para no tener que utilizar una llave manual para cambiar de configuración, que además puede introducir ruido, se puede utilizar un generador de ondas con perfil cuadrado de base cero y voltaje máximo (con eso imita la llave).

Elija una frecuencia para la onda de manera tal que vea todo el comportamiento de carga y descarga del circuito. Cuando se emplea una onda cuadrada la fuente nos entrega una tensión fija V_0 (equivale a la conexión (1) de figura 5) durante un intervalo de tiempo relacionado con la frecuencia seleccionada, y en el intervalo de tiempo siguiente, entrega una tensión aproximadamente nula (equivale a la conexión (2) de figura 5). Entonces, el intervalo en que la onda cuadrada está en un estado debe ser suficientemente largo como para permitir llegar al estacionario antes de cambiar de configuración.

B. Medición de la ΔV

A diferencia de la práctica de Ley de Ohm, en este caso se esperan obtener mediciones continuas. Para ello se utilizará el *SensorDAQ* con dos puntas sobre nodos del circuitos.

Al utilizar el generador de funciones, una de las puntas está conectada a la *tierra* (la tercer pata de cualquier enchufe), que es la misma que la *tierra* del *SensorDAQ*. Es decir, que ambas puntas (del generador y del *SensorDAQ*) están conectadas por fuera del circuito, por lo que si se conectan a distintos nodos una parte del circuito quedará aislada (cortocircuitada" por la tierra). Discutir con el docente la función de la referencia de tierra en el laboratorio. ¿Qué significa *conectar a tierra*? ¿A dónde va la *tercera pata del enchufe*?

C. Procedimiento

Para unos R y C dados:

1. registrar los $\Delta V(t)$ tanto en la carga como en la descarga
2. a partir de ajustes de las curvas, linealizandolas previamente y realizando un ajuste lineal determinar la constante $\tau = RC$.
3. comparar el τ obtenido de mediciones directas de R y C con un multímetro.

Repetir la experiencia para otros (varios) valores de R y C .

IMPORTANTE! Una conexión incorrecta puede causar cortocircuitos involuntarios y dañar el instrumental. Verifique la conexión del circuito con el docente antes de encender la fuente de tensión.

VI. UNIDADES

Diferencia de Potencial o Voltaje o Tensión: Volts (V)

Carga: Coulomb (C)

Intensidad de Corriente: Ampère (A) = C/s

Resistencia: Ohm (Ω)

Capacitancia: Faradio (F) = C/V

http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1963/eccles-lecture.pdf

²Andrew F. Huxley, *The Quantitative Analysis of Excitation and Conduction in Nerve*, Nobel Lecture in Physiology or Medicine, 1963 http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1963/huxley-lecture.pdf

REFERENCIAS

¹John Eccles, *The Ionic Mechanism of Postsynaptic Inhibition*, Nobel Lecture in Physiology or Medicine, 1963