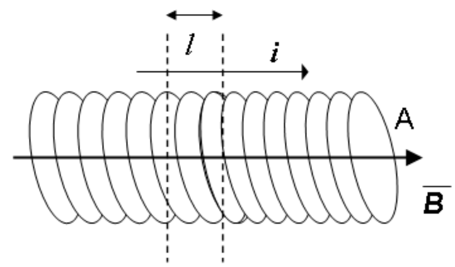
Guía 4

Circuitos RLC y corriente alterna

1. Utilizando la ley de Faraday y la relación $\varepsilon_L = -L\dfrac{di}{dt}$ (de la f.e.m. inducida), calcule el valor de la autoinductancia *L* para un segmento de longitud l en un solenoide infinito de área transversal *A*.

¿De qué parámetros depende *L*? ¿Cómo se comporta el potencial inducido para un aumento o una disminución de la corriente?

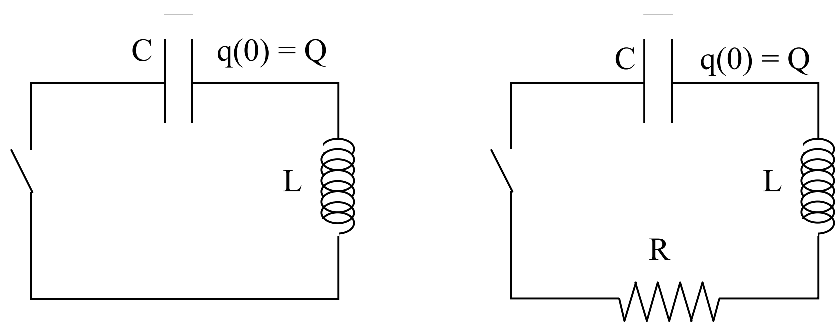


Circuitos eléctricos con resistencias, capacitores e inductancias (RLC)

2. Podemos definir un nuevo elemento en circuitos eléctricos que da cuenta de la interacción del campo magnético con las corrientes eléctricas. En la forma de la ley de Faraday-Lenz, un circuito que enlaza campo magnético siente la acción de una fuerza electromotriz proporcional a la variación temporal del flujo magnético, $\varepsilon_{ind} = -d\phi_B/dt$.

   Para amplificar los efectos del campo magnético en el circuito, se enrolla el cable a la manera de un solenoide. Recordemos que el campo magnético $\overline{B}$ en el solenoide es proporcional a la corriente que circula por las espiras, y que si ésta disposición geométrica no cambia en el tiempo y no hay campos externos, la única variación de flujo magnético provendrá de la *variación de la propia corriente* que circula a través del solenoide. La f.e.m. inducida será entonces $\varepsilon_{ind} = -L\,di/dt$, dónde L es un factor geométrico que lleva el nombre de *autoinductancia*.

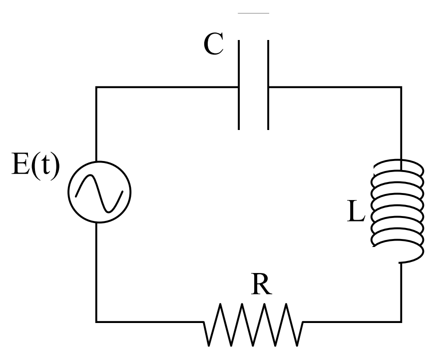
   a) Escriba la ecuación diferencial para la carga q en el circuito LC esquematizado abajo. Demuestre que el circuito oscila con una frecuencia natural $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. (Encuentre un sistema mecánico análogo)
   b) Escriba la ecuación diferencial para la carga q en el circuito RLC esquematizado abajo. Considerando las soluciones de esta ecuación diferencial, describalas cualitativamente en función de los parámetros: $R > 2\sqrt{L/C}$, y $R < 2\sqrt{L/C}$. (Piense en un sistema mecánico análogo)
   c) Demuestre que, para el caso oscilatorio del ítem b), la frecuencia es $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (R/2L)^2}$.
   d) ¿Cuántas condiciones iniciales son necesarias para determinar la evolución del sistema?



3. Describa el comportamiento de un circuito RL.

Fuente de tensión alterna y circuitos RLC

4. Podemos estudiar las respuestas del circuito RLC cuando se lo somete a tensiones alternas. Consideramos ahora fuentes de tensión que varían sinusoidalmente según $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ aplicadas a un circuito RLC como el anterior, reemplazando la llave por una fuente de este tipo como muestra la figura,



   a) Escriba la ecuación diferencial que lo caracteriza.
   b) Separe la ecuación en sus partes *homogénea* y *particular*. La solución completa del problema es la superposición de las soluciones honogénea y particular: $i(t) = i_h(t) + i_p(t)$.

      La dinámica del circuito puede entenderse como la competencia en el tiempo de dos respuestas. Una respuesta es *transitoria*, en la que el comportamiento depende de las condiciones iniciales y de los parámetros del problema. Esta primera respuesta corresponde a la solución homogénea de la ecuación diferencial, calculada en el problema anterior problema 2., y que decae en el tiempo. La que sobrevive es la solución *estacionaria* (que corresponde a la solución particular de la ecuación diferencial). La corriente, en este caso, puede escribirse como $i_p(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$, con la misma frecuencia ω de la fuente Esta es una característica de los circuitos lineales, cuya corriente termina siguiendo pasivamente la frecuencia propia de la fuente.

c) Esa solución describe el comportamiento de la corriente para tiempos grandes respecto del tiempo típico del transitorio. Encuentre que este tiempo es del orden de $\tau = 2L/R$.

d) La fase φ y la amplitud i_0 dependen de la frecuencia de la fuente, es decir, $\varphi = \varphi(\omega)$ y $i_0 = i_0(\omega)$. Sin hacer cálculos, describa cualitativamente qué respuestas espera encontrar para frecuencias muy bajas y muy altas. Para eso, piense cómo se pueden caricaturizar un capacitor y una inductancia en esos casos. ¿Puede describir el comportamiento general de $i_0(\omega)$?

e) Para encontrar analíticamente la respuesta a la pregunta anterior, verifique que la función propuesta para la corriente es una solución particular de la ecuación diferencial con:

$$i_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \;, \qquad \tan(\varphi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

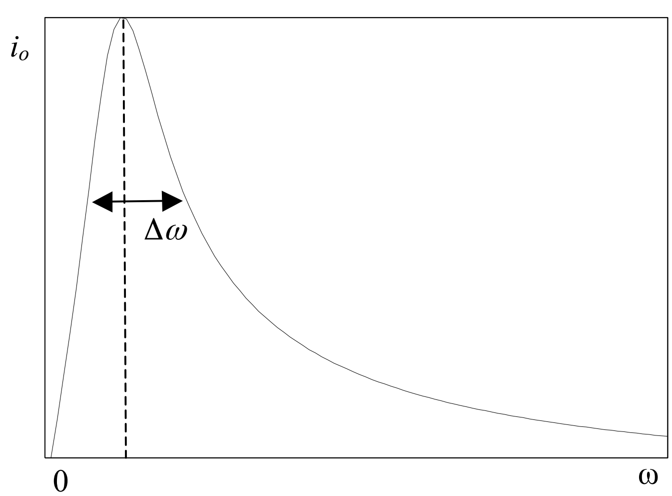
5. El gráfico de $i_0(\omega)$ es similar al de la siguiente figura. La condición para la cual la amplitud de la corriente es máxima se denomina *resonancia* del sistema.

a) Encuentre que la resonancia ocurre en $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

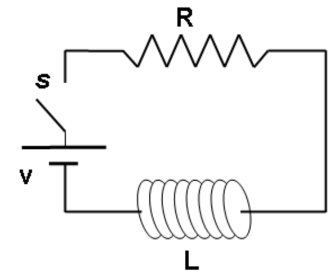
b) Muestre que para esta frecuencia, la tensión y la corriente están en fase.

c) Encuentre i_{max}, el valor máximo de la amplitud de la corriente i_0 en términos de los parámetros del problema. Calcule el ancho de la curva, o ancho de banda, definido a partir de las frecuencias para las cuales la la potencia disminuye a un 50% (i_0 se reduce a $i_{max}/2^{1/2}$). Describa el comportamiento del circuito para toda frecuencia.

Rta.: $\Delta\omega = R/L$.



6. Para el circuito de la figura (circuito RL), analice el comportamiento en el tiempo luego de que se cierra el interruptor ***s***. Plantee para ello la ecuación diferencial que describe el sistema y resuélvala para hallar *i(t)* y *V(t)*. Grafique las soluciones.

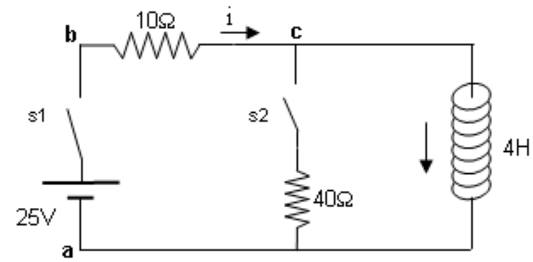


7. En el circuito de la figura, hallar:

   a) El valor de la corriente a través de la bobina en el instante inmediatamente posterior a cerrar el interruptor s1, y luego de que el sistema llega a su estado estacionario.

   b) Si se toma como potencial de referencia el punto a (V_a=0) ¿cuál es el valor del potencial en **b** y **c** en el equilibrio?¿cuál es el valor de la constante de tiempo de este sistema?

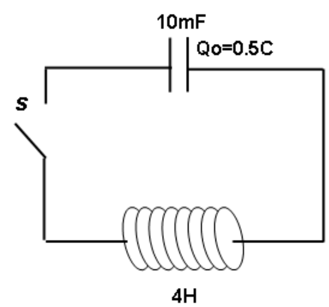
   c) A continuación se cierra el interruptor s2, y se abre s1 ¿cuál es el valor final de la corriente?



8. Se tiene un circuito LC como el de la figura con C=10mF y L=4H, donde la carga inicial tiene un valor Q_o=0.5C; en t=0 se cierra el interruptor s. ¿Cuál es el valor inicial de la corriente?

   a) Halle los valores máximos de la corriente y el voltaje, y la frecuencia de oscilación (Ayuda: plantee y resuelva la ecuación diferencial para la carga Q en el circuito).

   b) Para un circuito RLC con L y C como en el ítem a) y una resistencia R=2Ω ¿en qué régimen se encuentra el sistema?



9. Se carga un capacitor de 5nF y se descarga a través de una bobina. Calcule la inductancia de la bobina si la corriente oscila con una frecuencia de 5KHz.

10. *Analizador de frecuencias.* Se quiere armar un dispositivo eléctrico para identificar la frecuencia (con una precisión de ± 50 Hz) de una onda electromagnética pura (de la cual se sabe que esta entre 100 y 500 Hz). Se dispone para esto de tres circuitos RLC para los cuales el valor de L, C y R puede elegirse libremente. Se cuenta con transformadores que convierten las ondas en una señal alterna de potencial. Además de estos tres osciladores se cuenta con detectores de corriente (amperímetros).

a) Constrúyalo.
(Ayuda: usar las relaciones para la frecuencia de resonancia, el máximo de corriente y el ancho de banda.)

El pico de resonancia de un oscilador esta en: $\omega_0 = 1/(L\ C)^{1/2}$.

La corriente máxima esta dada por la formula: $i_0(\omega=\omega_0) = i_{max} = E_0/R$.

El ancho de la curva de resonancia esta dado por: $\Delta\omega \equiv \frac{R}{L}$

b) ¿Cómo haría para estimar la frecuencia con mayor precisión, con este mismo dispositivo que acaba de construir?

c) ¿ Qué sucede si la señal no es un único tono sino que contiene varias frecuencias?

Respuestas:

7. a) I(0)=0, al equilibrio: I=2,5 A; b) Vb=25V, Vc=0V, τ= 0,4 seg; c) I_f=0A.
8. I(0)=0: a) ω=5 1/seg; I_{max}= 2.5 A, V_{max}=50 V; b) sub-amortiguado.
9. L=0,2 H.