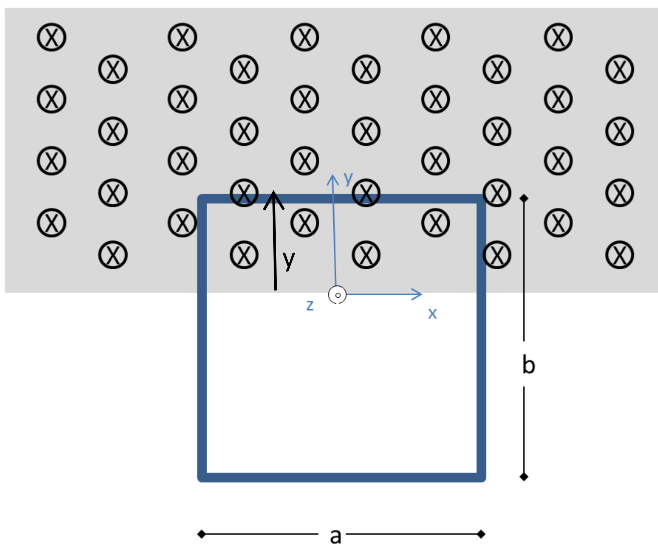
Espira en movimiento en presencia de un campo magnético no uniforme

Consideremos la situación que muestra la Figura 1. Una espira se encuentra parcialmente ubicada dentro de una región de campo magnético constante.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} -B_0\,\hat{z}\;\; si\; y > 0 \\ 0\; si\; y < 0 \end{cases}$$



Queremos calcular cuál será la corriente en la espira si la desplazamos en cualquier dirección (i.e. hacia la izquierda, derecha, arriba o abajo).

Como vimos en clase, aparecerá en la espira una fuerza electromotriz inducida ϵ* toda vez que el flujo magnético que la atraviesa varíe en el tiempo (Ley de Faraday):

$$\varepsilon^* = -\frac{d\phi}{dt} \qquad [1]$$

Esta fem, como toda fem, representa el trabajo no conservativo, por unidad de carga, que es entregado a cargas del conductor poniéndolas en movimiento. Cargas en movimiento dentro del conductor las describimos como una corriente que, como vimos, puede escribirse como:

$$i = qnv_d \qquad [2]$$

donde q es la carga de cada portador, *n* la densidad de portadores y v_d la velocidad de deriva a la que se mueven dentro del cable.

Si asumimos que se trata de un conductor de un material Ohmico, que presenta una resistencia *R,* fem e intensidad inducida quedan vinculadas vía la ley de Ohm:

$$i = \frac{\varepsilon^*}{R} \qquad [3]$$

Entonces para encontrar la corriente debemos analizar la fem inducida (ec 3), y por lo tanto como varía en el tiempo el flujo que atraviesa la espira (ec 1).

Veamos entonces la expresión de ϕ:

$$\phi = \iint_{espira} \vec{B} \,.\, \hat{n}\, dS = \iint_{espira\ en\ y>0} -B_0\, \hat{z} \,.\, \hat{n}\, dS = B_0\ (a\, y) \qquad [4]$$

Varias cosas para notar:

1. En la segunda integral usamos el hecho de que el campo magnetico se anula para y<0, por lo que para la integración sólo consideramos la expresión del campo válida para ordenadas positivas.
2. Dentro de la segunda integral se encuentra el producto interno $-\hat{z} \,.\, \hat{n}$, que resulta igual a uno, <u>si tomamos como convención</u> que la normal a la superficie subtendida por la espira está en la dirección que entra hacia la hoja (es decir $\hat{n} = -\hat{z}$).
3. Tomando esa convención para la normal, el flujo resulta positivo.
4. La expresión final resulta proporcional al área de la espira que se encuentra en la región de campo magnético: $a * y$ (´y´ es la ordenada que denota la altura de la espira) (ver figura)

En definitiva:

$$\phi = B_0\, a\, y \qquad [5]$$

Es fácil ver de esta última expresión que para que el flujo magnético varíe, la espira debe verse afectada por un movimiento vertical (*y* debe variar).

En ese caso resulta:

$$\frac{d\phi}{dt} = B_0\ a\ \frac{dy}{dt} = B_0\ a\ v_y \qquad [6]$$

por lo que utilizando las ecs 1 y 3 resulta

$$i = \frac{\varepsilon^*}{R} = \frac{-\frac{d\phi}{dt}}{R} = -\frac{B_0\ a\ v_y}{R} \qquad [7]$$

Notar que el signo de la intensidad de corriente (i.e. de la velocidad de los portadores de carga) hay que interpretarlo en función de la circulación asociada a la normal a la superficie que consideramos ($\hat{n} = -\hat{z}$). Entonces:

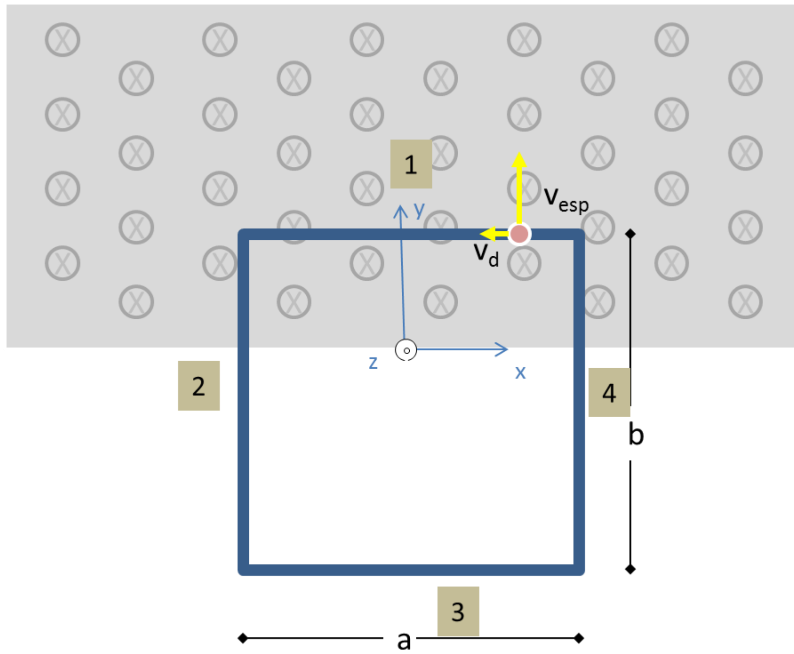
- Si la espira se mueve hacia arriba $(v_y > 0)$ resulta $i < 0$ y el sentido de circulación es antihorario (en sentido $-\hat{x}$ por el tramo horizontal superior)

- Si la espira se mueve hacia abajo $(v_y < 0)$ resulta $i > 0$ y el sentido de circulación es horario (en sentido $\hat{x}$ por el tramo horizontal superior)

- Si la espira se mueve en la dirección $\hat{x}$ $(v_y < 0)$ y la corriente inducida es nua. Este resultado lo podríamos haber ´anticipado´ a partir de la Fig 1 ya que podemos ver que un desplazamiento en la dirección x deja el flujo magnético que atraviesa la espira invariante.

Hasta ahora, **utilizando la Ley de Faraday**, establecimos que el movimiento vertical de la espira produce, un cambio de flujo, que induce una fem que hace que los portadores de carga del conductor comiencen a circular por la espira, esto es: que aparezca una corriente inducida. Esto también puede explicarse si pensamos en la expresión general de la fuerza de Lorentz, que actúa sobre partículas cargadas en movimiento en presencia de un campo B externo:

$$\vec{F}_{Lorentz} = q\ \vec{v}\ \times\ \vec{B} \qquad [8]$$



Tengamos esto en cuenta y analicemos la situación de los portadores de carga del tramo (1) de la espira (ver fig 2). Vemos que todos ellos (dibujamos uno en la figura) presentan una componente vertical de velocidad debido al movimiento de la espira como un todo ($\vec{v}_{esp} = v_{esp}\hat{y}$) y por lo tanto, en presencia de un $\vec{B} = -B_0\hat{z}$, opera una fuerza de Lorentz: $\vec{F} = -qv_{esp}B_0\hat{x}$. Esta fuerza no conservativa (fíjense que depende de una velocidad) es la responsable de poner en movimiento a las cargas y generar por tanto la intensidad de corriente inducida, que como vimos anteriormente en clase, está constituida por cargas que se mueven, en promedio, con una celeridad uniforme v_d. (ver ec 2)

Interesantemente, al comenzar a circular corriente por la espira, aparece otra fuerza sobre los portadores. Para entender esto focalicémonos ahora en la componente de velocidad (v_d) que aparece en la dirección paralela a la espira para una carga del tramo (1) cuando empieza a circular corriente (ver figura 2). Es fácil ver (hagan la cuenta) que la fuerza de Lorentz asociada a esta componente de velocidad resulta $\vec{F} = -qv_dB_0\hat{y}$. Es decir, aparece una fuerza que actúa en un sentido que se opone al ingreso de la espira a la región con campo

Esto que vimos para una carga en realidad puede ser analizado en términos de la fuerza que aparece sobre todas las cargas que circulan por la espira recordando la expresión de la fuerza que ejerce un campo B sobre un cable por el que circula una corriente. Como vimos en su momento en clase, un diferencial de longitud del cable sufre una fuerza:

$$\overrightarrow{\delta F} = |I|\,\overrightarrow{\delta l} \times \vec{B}$$

Consideremos la fuerza ejercida por el tramo (1) de la espira (el tramo horizotal superior). Usando la expresión ec 7 para la intensidad vemos que la fuerza que actua sobre un elemento de longitud $\overrightarrow{\delta l_1}$ resulta:

$$\overrightarrow{\delta F_1} = \frac{B_0\; a\; v_y}{R}\;\delta l\;(-\hat{x}) \;\;\times\;\; B_0(-\hat{z}) = -\frac{{B_0}^2\; a\; v_y}{R}\,\delta l\;\hat{y} \qquad [9]$$

por lo que la fuerza total sobre esa parte de la espira resulta

$$\vec{F}_1 = \int_{tramo\ 1\ de\ la\ espira} -\frac{{B_0}^2\; a\; v_y}{R}\,\delta l\;\hat{y} = -\frac{{B_0}^2\; a^2\;\; v_y}{R}\;\hat{y} \qquad [10]$$

Les dejo para ustedes analizar cómo es la expresión de las fuerzas que actúan sobre los tramos 2, 3 y 4 y verificar que: $\vec{F}_2 = -\vec{F}_4$ y que $\vec{F}_3 = 0$.

En definitiva, la fuerza total que actúa sobre la espira resulta:

$$\vec{F}_{espira} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 = -\frac{{B_0}^2\; a^2\;\; v_y}{R}\;\hat{y} \qquad [11]$$

Cosas interesantes para notar:

- La inducción de una corriente sobre la espira hace aparecer una fuerza (i.e. una aceleración) que se opone a la velocidad de la misma
$$\vec{F}_{espira} \sim -\, v_y \hat{y}$$

- Esta fuerza 'viscosa', denominada *fuerza de arrastre magnètico*, se opone al desplazamiento de la espira (causante de la variación de flujo magnético que la atraviesa).

- La fuerza de arrastre es en efecto una fuerza disipativa…en forma de qué se disipa la energía cinética asociada al movimiento vertical de la espira?