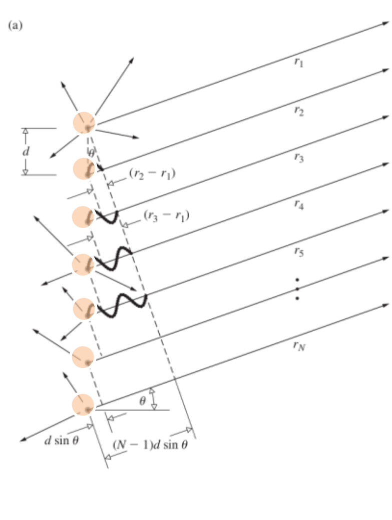
Difraccion 3/3

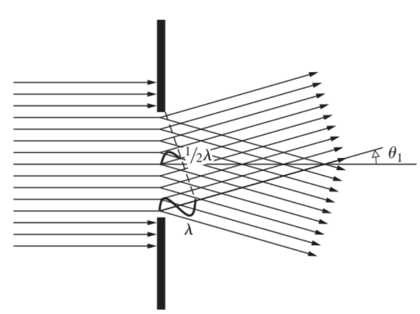
Ya casi estamos

Difraccion es interferencia (de muchas o muchisimas fuentes)

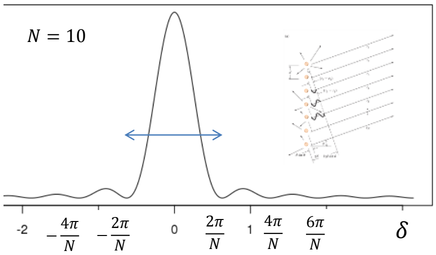
N fuentes

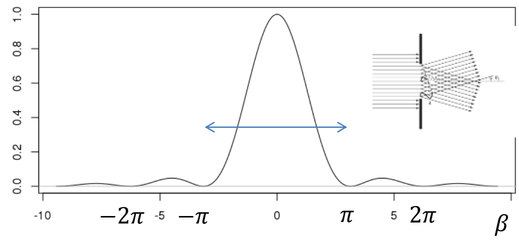


1 rendija



N fuentes vs 1 rendija





$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\delta = k\ d\ \sin\theta$$

$\lim N \to \infty$
$\lim d \to 0$
$\lim A \to 0$

$$I_{Rendija} = \frac{(AN)^2}{2}\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

$$\beta = \frac{k\ D\ \sin\theta}{2}$$

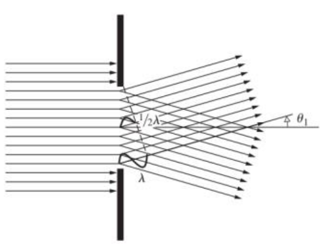
Ancho campana : minimos $\delta = \pm 2\pi/N$

$$k\ d\ \sin\theta_{\min\pm} = \pm\frac{2\pi}{N} \qquad \sin\theta_{\min\pm} = \pm\frac{\lambda}{Nd}$$

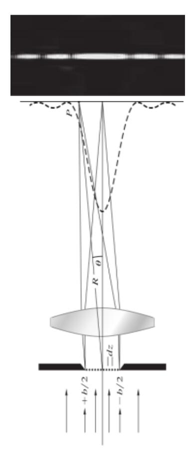
minimos $\beta = \pm\pi$

$$\frac{\pi\ D\ \sin\theta_{min}}{\lambda} = \pm\pi \qquad \sin\theta_{min} = \pm\frac{\lambda}{D}$$

Una sombra ya pronto seras

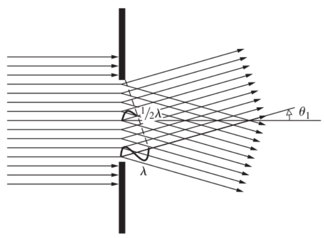


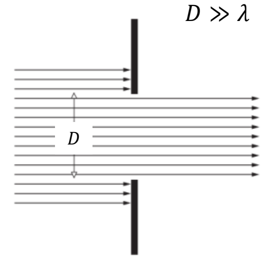
$$\sin\theta_{min} = \pm\frac{\lambda}{D}$$



Sombra geometrica

$D \gg \lambda$

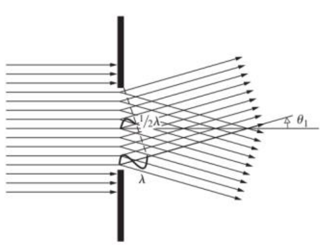




$\sin\theta_{min} = \pm\frac{\lambda}{D}$

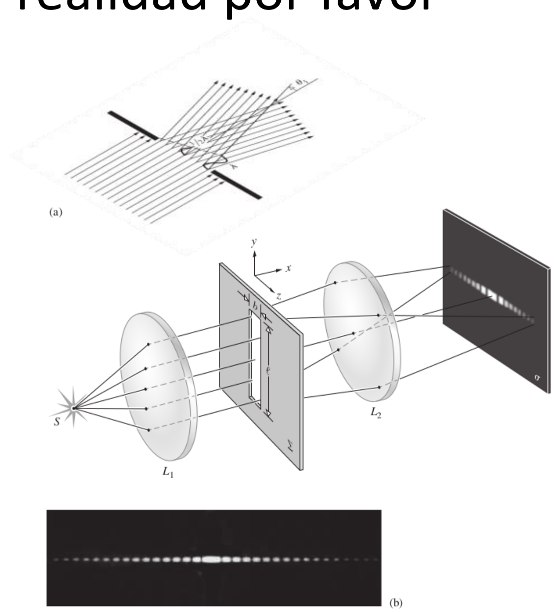
Si $\frac{\lambda}{D} \ll 1$, $\theta_{min} \sim 0$ y se produce *sombra geométrica*

Un poco de realidad por favor



Hasta ahora estuvimos resolviendo este tipo de rendijas (problema unidimensional)

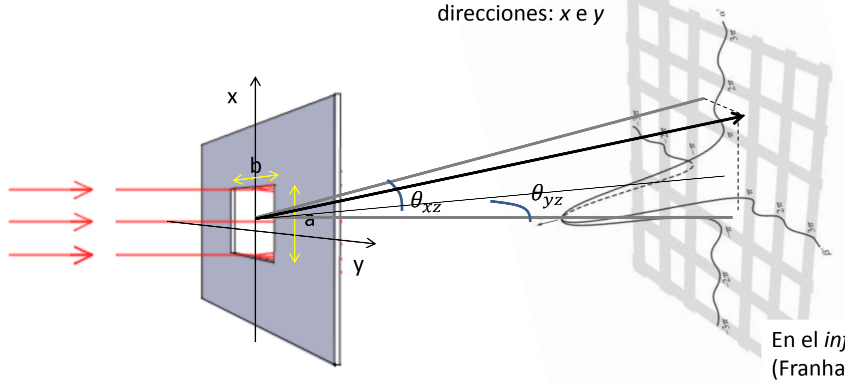
El recorte y obstruccion del frente de onda ocurre a lo largo del eje z del dibujo (la rendija es larga por lo que no recorta nada en la direccion y)



Un poco de realidad por favor

Que pasa con este tipo de rendija?

El problema de difraccion se vuelve bidimensional…recorto a lo largo de dos direcciones: *x* e *y*



En el *infinito* (Franhauffer)

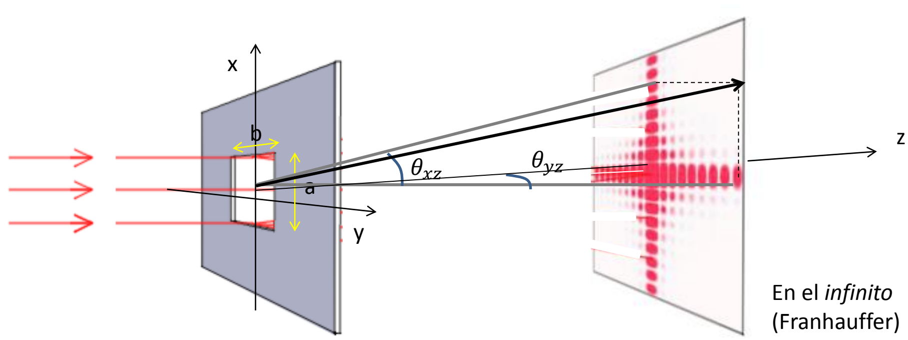
$$I_{Rendija} = \frac{{I_0}^2}{2}\frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2}\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

$$\alpha = \frac{k\ a\ \sin\theta_{xz}}{2} \qquad \beta = \frac{k\ b\ \sin\theta_{yz}}{2}$$

Un poco de realidad por favor

Que pasa con este tipo de rendija?

El problema de difraccion se vuelve bidimensional…recorto a lo largo de dos direcciones: *x* e *y*

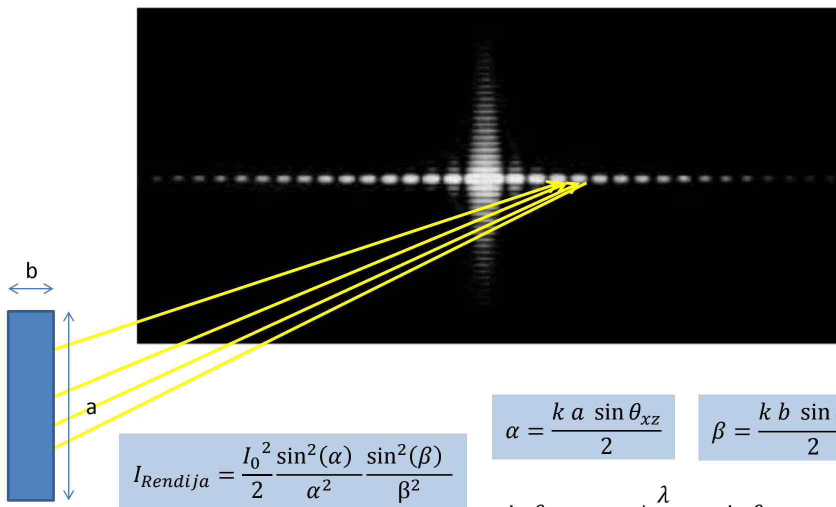


En el *infinito* (Franhauffer)

$$I_{Rendija} = \frac{{I_0}^2}{2}\frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2}\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

$$\alpha = \frac{k\ a\ \sin\theta_{xz}}{2} \qquad \beta = \frac{k\ b\ \sin\theta_{yz}}{2}$$

Rendija rectangular

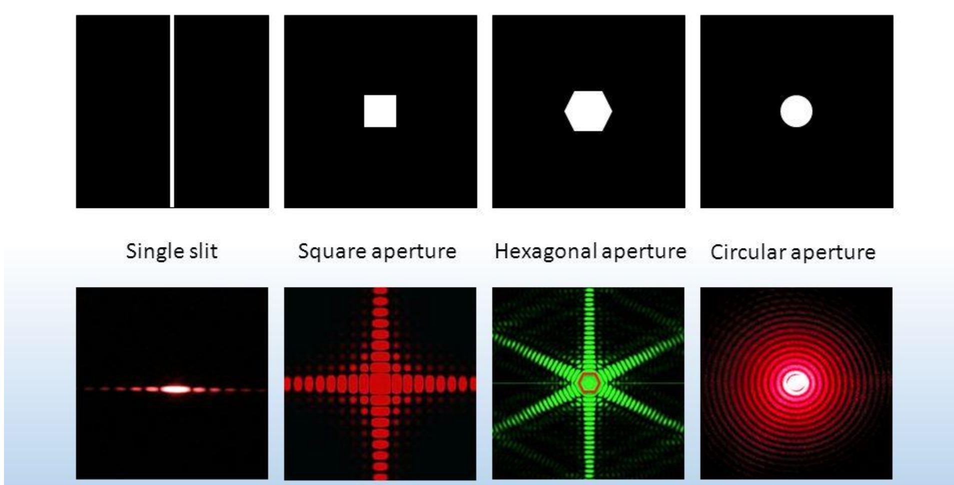


$$I_{Rendija} = \frac{{I_0}^2}{2} \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2} \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

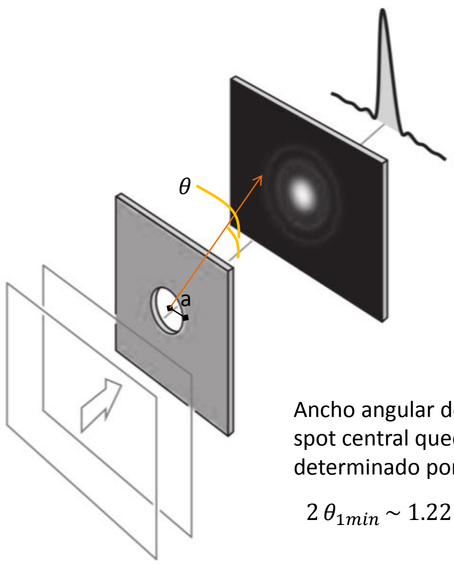
$$\alpha = \frac{k\ a\ \sin\theta_{xz}}{2} \qquad \beta = \frac{k\ b\ \sin\theta_{yz}}{2}$$

$$\sin\theta_{xz,min} = \pm\frac{\lambda}{a} \qquad \sin\theta_{yz,min} = \pm\frac{\lambda}{b}$$

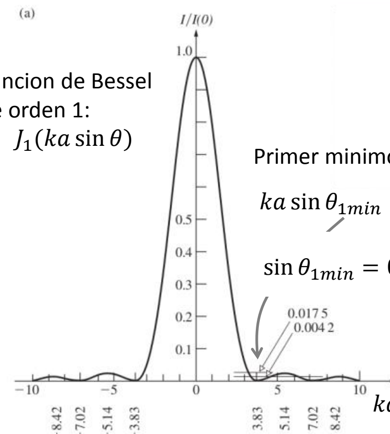
Diversos agujeritos que difractan



Rendija circular



Funcion de Bessel de orden 1:
$J_1(ka \sin\theta)$



Primer minimo en

$ka \sin\theta_{1min} = 3.83$

$\sin\theta_{1min} = 0.61\,\frac{\lambda}{a}$

$ka \sin\theta$

Disco de Airy

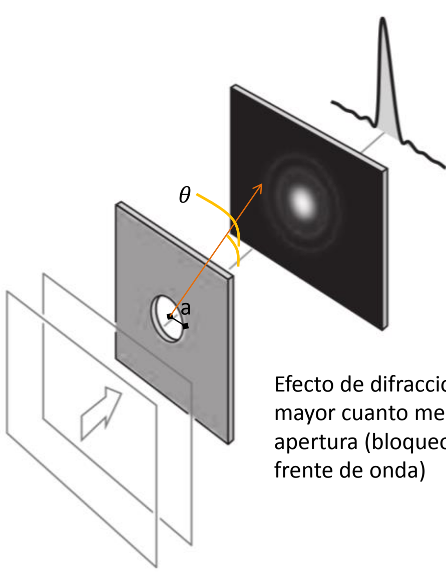
Ancho angular del spot central queda determinado por

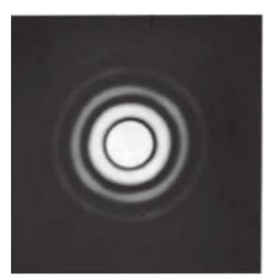
$2\,\theta_{1min} \sim 1.22\,\frac{\lambda}{a}$

Rendija circular

Ancho angular del spot central queda determinado por

$2\,\theta_{1min} \sim 1.22\,\frac{\lambda}{a}$





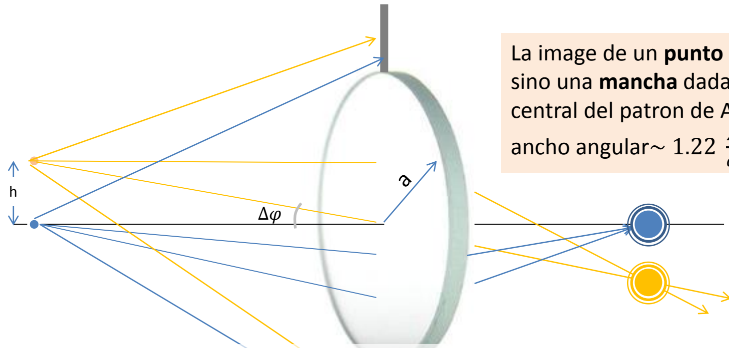
a=1mm

a=0.5mm

Efecto de difraccion es mayor cuanto menor es la apertura (bloqueo mas frente de onda)

Limite de resolucion de sistemas opticos impuesto por difraccion

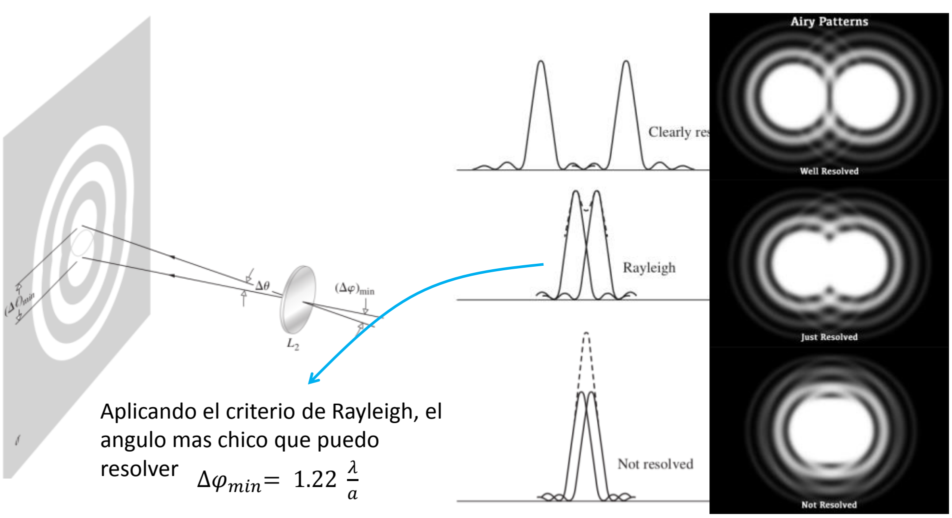
Hasta ahora no nos dimos cuenta…pero una lente **recorta el frente de onda** y **solo deja pasar una parte**…entonces aparecen efectos de **difraccion** (como en rendija circular (!))



La image de un **punto** no es un punto, sino una **mancha** dada por el circulo central del patron de Airy (que tiene un ancho angular$\sim 1.22\ \frac{\lambda}{a}$)

Si la separacion entre puntos disminuyera (medida como h o como $\Delta\varphi$) … puede que los dos patrones de Airy se empiecen a superponer y veo un unico manchon como imagen…alcancé el **limite de resolucion impuesto por difraccion**.

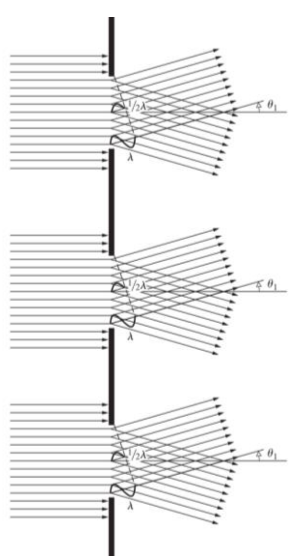
Criterio de Rayleigh dicho por Hecht



Aplicando el criterio de Rayleigh, el angulo mas chico que puedo resolver $\Delta\varphi_{min} = 1.22\ \frac{\lambda}{a}$

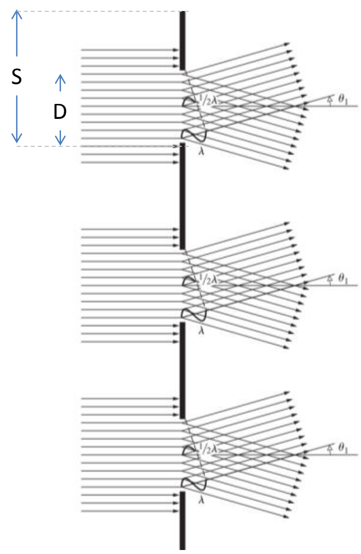
Mi sistema optico va a poder resolver (en el sentido de Rayleigh) dos puntos cuya separacion angular, medida desde la lente, sea$\Delta\varphi > 1.22\frac{\lambda}{a}$.

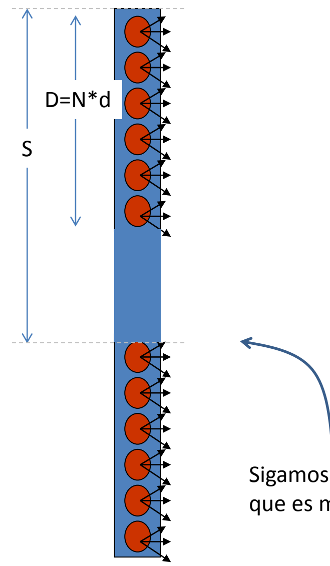
Dos (o más) rendijas



?

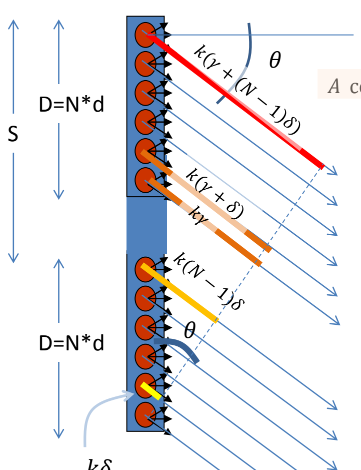
Dos o mas unidades periodicas





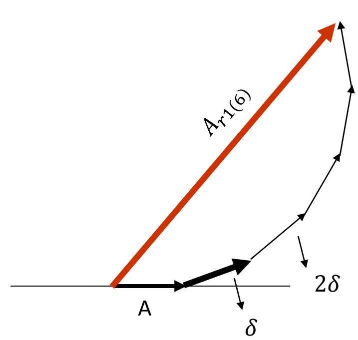
Sigamos con esta
que es mas facil

Desfasajes…no les temo (o nada nuevo bajo el sol)

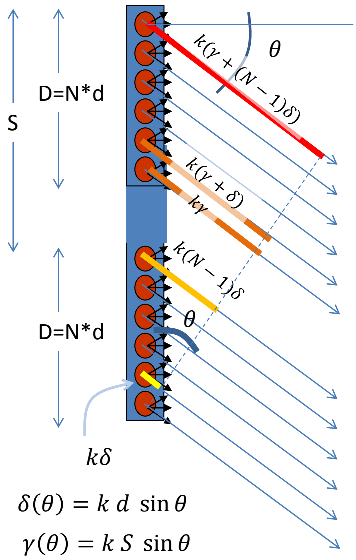


$$\delta(\theta) = k\ d\ \sin\theta$$
$$\gamma(\theta) = k\ S\ \sin\theta$$

$$R(\delta) = A\ \cos(kr + wt + \varepsilon) + A\ \cos(kr + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) +$$
$$A\ \cos(kr + \mathbf{2}\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(kr + (\boldsymbol{N}-\mathbf{1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) +$$
$$A\ \cos(kr + wt + \varepsilon + \boldsymbol{\gamma}) + A\ \cos(kr + \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) +$$
$$\ldots + A\ \cos(kr + \boldsymbol{\gamma} + (\boldsymbol{N}-\mathbf{1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$



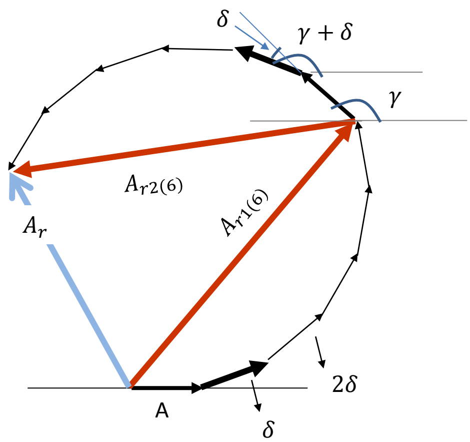
Desfasajes…no les temo (o nada nuevo bajo el sol)



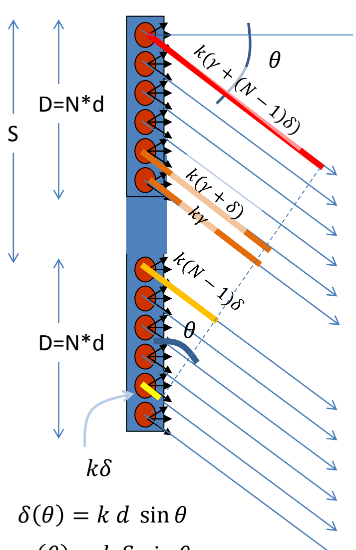
$\delta(\theta) = k\ d\ \sin\theta$

$\gamma(\theta) = k\ S\ \sin\theta$

Notemos que $\vec{A}_{r2(6)}$es $\vec{A}_{r1(6)}$ girado en γ



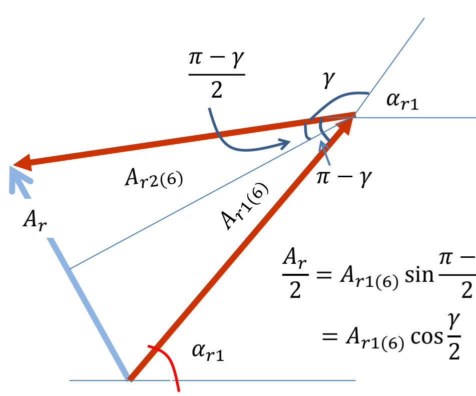
Ahí veo un isosceles



$\delta(\theta) = k\ d\ \sin\theta$

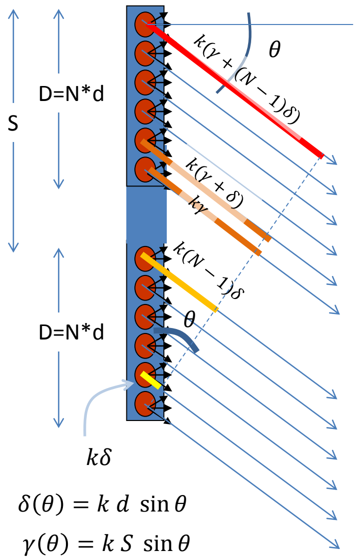
$\gamma(\theta) = k\ S\ \sin\theta$

Notemos que $\vec{A}_{r2(6)}$es $\vec{A}_{r1(6)}$ girado en γ



$$\frac{A_r}{2} = A_{r1(6)} \sin\frac{\pi - \gamma}{2}$$
$$= A_{r1(6)} \cos\frac{\gamma}{2}$$

Y finalmente…la irradiancia



$\delta(\theta) = k\ d\ \sin\theta$

$\gamma(\theta) = k\ S\ \sin\theta$

$$A_r = A_{r1(6)} \cos\frac{\gamma}{2}$$

Cómo suman las fuentes de una unidad periodica

$$A_r = A\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Amplitud del fasor

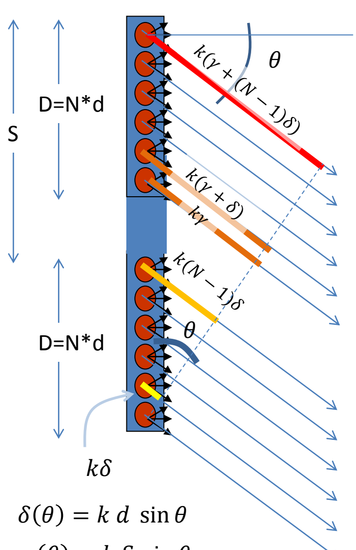
La amplitud buscada resulta

$$R = A_r\ \cos\alpha_r(t)$$

Y la irradiancia para los desfasajes $< R^2 >$

$$I_R(\delta) = I_0\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Los efectos se combinan multiplicativamente



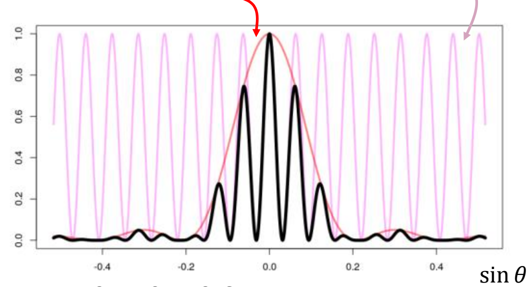
$\delta(\theta) = k\ d\ \sin\theta$

$\gamma(\theta) = k\ S\ \sin\theta$

$$I_R(\delta) = I_0\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

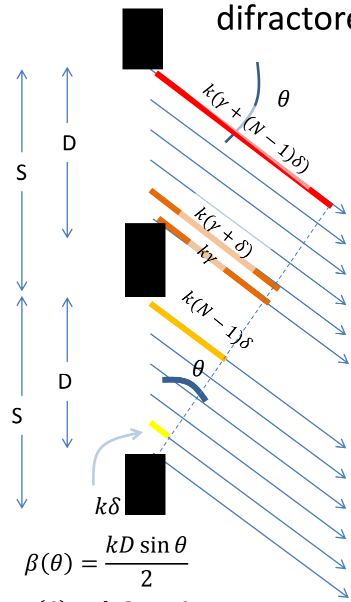
cómo difracta una unidad del arreglo

Interferencia entre las 2 unidades



N=10, M=2, D=3, S=5

Y si tuviera otro arreglo de 2 elementos difractores…por ejemplo rendijas?



$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2(\beta)}{(\beta)^2} \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

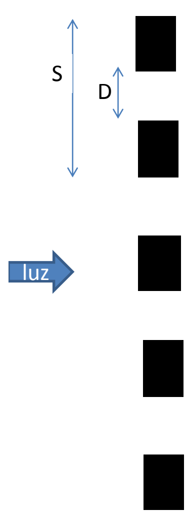
cómo difracta una unidad del arreglo

Interferencia entre las 2 unidades

$$\beta(\theta) = \frac{kD \sin\theta}{2}$$

$$\gamma(\theta) = k\,S\,\sin\theta$$

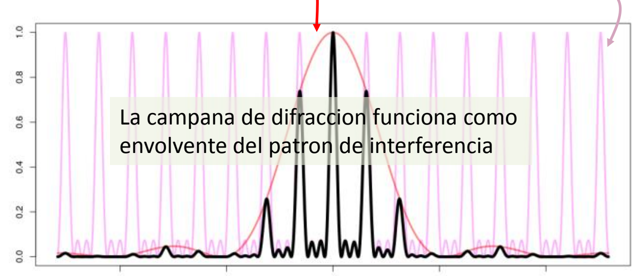
Y si tuviera un arreglo de M rendijas



$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2(\beta)}{(\beta)^2} \frac{\sin^2(M\gamma/2)}{\sin^2(\gamma/2)}$$

cómo difracta una unidad del arreglo

Interferencia entre las M unidades

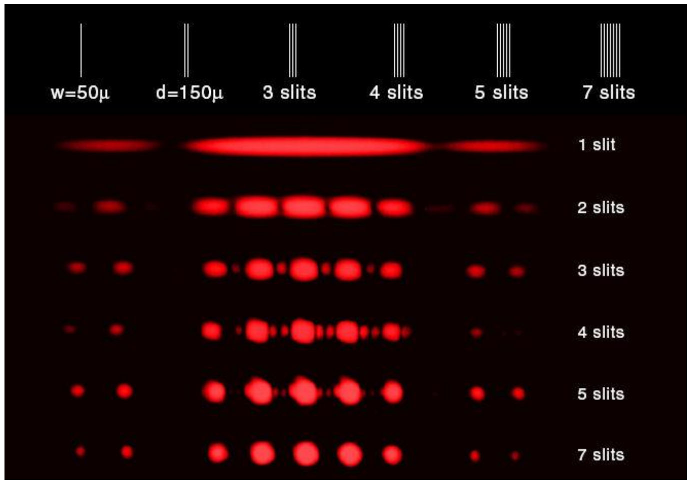


$$\beta(\theta) = \frac{kD \sin\theta}{2}$$ $$\gamma(\theta) = k\,S\,\sin\theta$$

$\sin\theta$

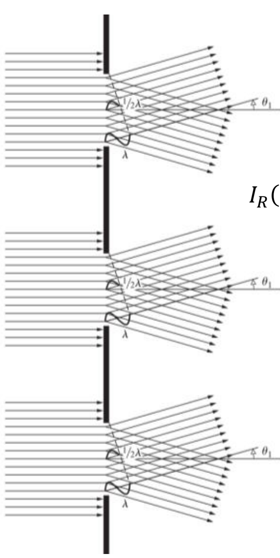
M=4, D=3, S=5

$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2(\beta)}{(\beta)^2} \frac{\sin^2(M\gamma/2)}{\sin^2(\gamma/2)}$$



La campana de difraccion funciona como envolvente del patron de interferencia

O sea



Cuando tengo un arreglo periodico de M elementos difractores (rendijas, podrian ser lentes , espejos, etc) el patron de irradiancia total resulta:

$I_R(\delta) \sim$ Difraccion_de_un_elemento * Intereferencia_de_M_periodos

Una **red de difraccion** es exactamente eso, un arreglo pariodico de elementos difractores

CONCEPTO IMPORTANTE: La difraccion de cada uno es de la misma naturaleza (todos son iguales) y se traduce en unico patron de difraccion. Sumado a eso, todos interfieren

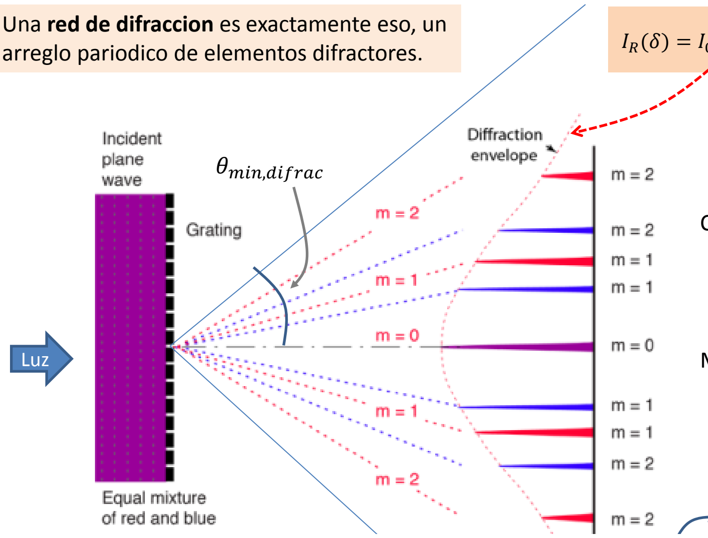
Redes de difraccion

Una **red de difraccion** es exactamente eso, un arreglo pariodico de elementos difractores.

$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2(\beta)}{(\beta)^2} \frac{\sin^2(M\gamma/2)}{\sin^2(\gamma/2)}$$

$$\beta(\theta) = \frac{kD \sin\theta}{2}$$

$$\gamma(\theta) = k\, S\, \sin\theta$$



Campana de difraccion

minimos $\beta = \pm\pi$

$$\sin\theta_{min,difrac} = \pm\frac{\lambda}{D}$$

Max de interferencia:

$$\frac{\gamma}{2} = m\pi$$

$$k\, S\, \sin\theta_m = 2m\pi$$

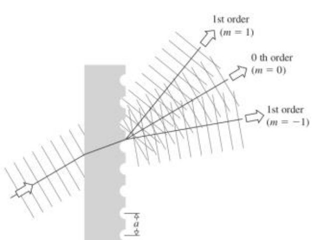
$$\sin\theta_m = \frac{m\lambda}{S}$$

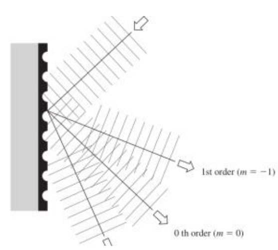
Ecuacion de la red para incidencia normal

Mismo concepto, diferentes tipos de redes

Una **red de difraccion** es un arreglo periodico de elementos difractores

La campana de difraccion siempre esta centrada en donde se espera la imagen geometrica



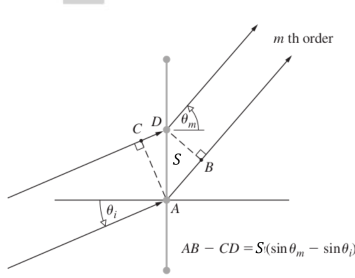


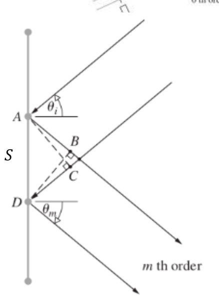
(a)

Max de interferencia

$$\sin\theta_i - \sin\theta_m = \frac{m\lambda}{S}$$

Ec. de la red





Una ultima cosa…Prestar atencion a la convencion de signos de los angulos θ_i y θ_m (si se elijen tomando un mismo sentido de giro esta todo bien)

Listo!