Electromagnetismo y Óptica – 1er. cuatrimestre de 2019
Primer Parcial – 15/05

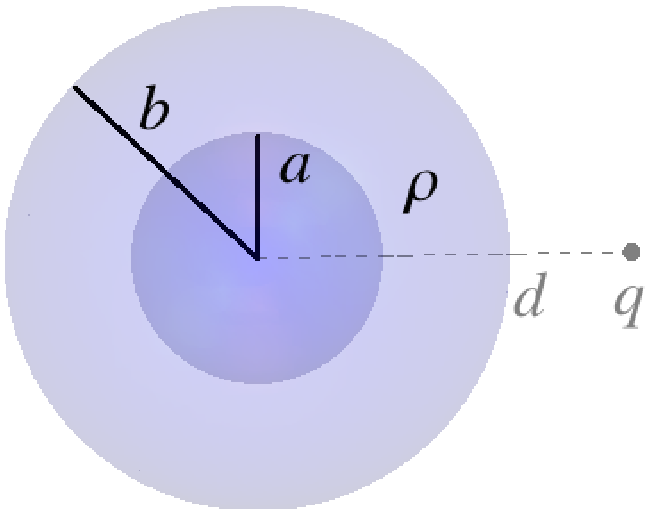
1. ($3,\widehat{3}$ *puntos*). La esfera de la figura tiene una **cavidad vacía** en la región $r < a$, y está cargada con una densidad volumétrica de carga eléctrica uniforme ρ en la región entre su radio interno a y su radio externo b.

   Ayuda: Calcule el volumen de la región con densidad ρ y su carga total.

   (a) Calcule el campo eléctrico generado por ρ en *todo el espacio*.

   (b) Obtenga el potencial electrostático y la fuerza sobre la posición de la partícula de prueba con carga q que se encuentra a una distancia $d > b$ del centro, como en la figura.

   (c) Si se ubica una carga puntual Q en el centro de la cavidad, ¿cuánto debe valer Q para que se anule la fuerza total sobre la partícula de prueba con carga q ubicada a distancia $d > b$? y, ¿cuánto vale el campo eléctrico y potencial para radios mayores a b en ese caso? Justifique.

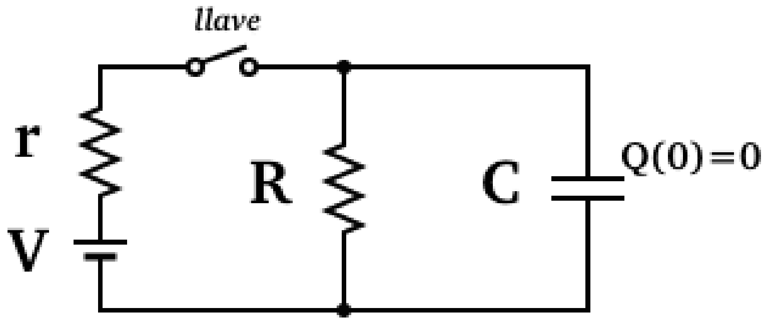


2. ($3,\widehat{3}$ *puntos*). Un capacitor de capacidad C, **inicialmente descargado**, se carga a través del circuito de la figura con una batería de voltaje V constante. La llave del circuito se cierra a tiempo $t = 0$ cuando la carga en el capacitor es cero. Datos: V, C y Resistencias: r y R. $Q(t = 0) = 0$.

   (a) Utilizando las leyes de Kirchhoff obtenga la ecuación diferencial para la carga $Q(t)$. Indique el tiempo característico del sistema.

   (b) Obtenga la solución $Q(t)$ teniendo en cuenta la condición inicial y grafíquela. ¿Para qué tiempos se puede considerar al capacitor *completamente cargado*? Calcule la carga máxima y la energía máxima que puede almacenar el capacitor.

   (c) Con el capacitor completamente cargado se abre la llave del circuito. ¿Qué sucede con la energía almacenada en el capacitor? Describa la situación final indicando para qué tiempos se alcanza. Justifique muy brevemente, sin cuentas en lo posible.

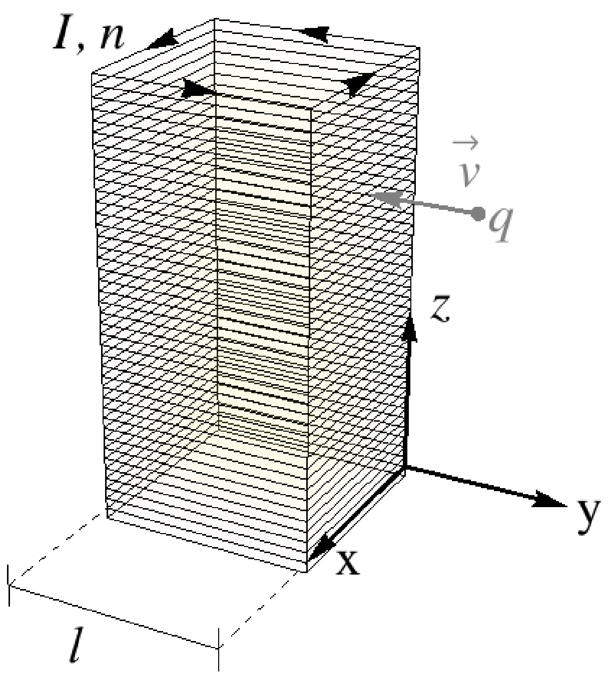


3. $(3,\widehat{3}$ *puntos*). Se tiene un solenoide **infinito** de sección trasversal cuadrada de lado l por donde circula una corriente I y con densidad de vueltas por unidad de longitud n.

   (a) Utilizando razonamientos de simetría determine cuáles componentes del campo magnético $\mathbf{B}$ son nulas, y de qué coordenadas depende.

   (b) Calcule el campo magnético en el interior teniendo en cuenta que en el exterior es nulo.

   (c) Una partícula de carga q ingresa con velocidad $\vec{v} = -v\hat{y}$ por una de las caras del solenoide. Halle qué dirección, sentido y magnitud debe tener un campo eléctrico en la región interior para que la partícula se mueva rectilínea e uniformemente hasta llegar a la cara opuesta del solenoide.



Problemas en hojas separadas. Se aprueba con un mínimo de *6 puntos*

Fórmulas útiles:

- Área de algunas superficies: L^2, πR^2, $2\pi R\, L$, $4\pi R^2$. Volumen de algunos cuerpos: L^3, $\pi R^2 L$, $\frac{4}{3}\pi R^3$.
- $\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\, Q_{enc.}$
- $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{(\vec{r}-\vec{r}_q)}{|\vec{r}-\vec{r}_q|^3}$
- $V(\vec{r}) = -\int_{r_{ref}}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{ref}(r_{ref})$
- $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\, I_{conc.}$
- $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, q\, \vec{v} \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}_q)}{|\vec{r}-\vec{r}_q|^3}$
- $m\, \vec{a} = \sum \vec{F}$
- aceleración centrípeta: $a_{centr.} = -\frac{v^2}{R}$
- $\vec{F}_q^{Lorentz} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
- $|\vec{A} \times \vec{D}| = |\vec{A}||\vec{D}| \sin\theta$
- $\vec{A} \cdot \vec{D} = |\vec{A}||\vec{D}| \cos\theta$
- $C = \left|\frac{Q}{V_C}\right|$, $U = \frac{1}{2}|Q\, V_C|$, $|V_R| = R\,|i_R|$
- $\mathcal{E}^{\hat{n}} = -\frac{d}{dt}\phi^{\hat{n}}$, donde $\phi^{\hat{n}} = \oiint_{\mathcal{S}^{\hat{n}}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$
- $\mathcal{E}^{(\hat{n})} = -L\frac{d}{dt} i^{(\hat{n})}$, donde L es la autoinductancia.
- Dados α y c números Reales, si $f(t)$ satisface la ecuación inhomogénea

$$\frac{d}{dt} f(t) + \alpha f(t) = c$$

  $\Rightarrow$ la solución general es $f(t) = f_h(t) + f_p$, donde $f_h(t)$ es solución de la ec. homogénea, y f_p es una constante solución de la ec. inhomogénea.
- Recordar que: $\frac{d}{dt}\left(A\, e^{-\alpha t}\right) = -\alpha\, A\, e^{-\alpha t}$, con $A \in \mathbb{R}$

① a) Simetría esférica $\Rightarrow \bar{E} = E(r)\,\hat{r}$

Divido en 3 regiones $\begin{cases} r < a \\ a < r < b \\ r > b \end{cases}$

Gauss $\Rightarrow \int \bar{E}\, d\bar{S} = \dfrac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$

Para $r < a \rightarrow Q_{enc} = 0 \Rightarrow \bar{E} = 0$

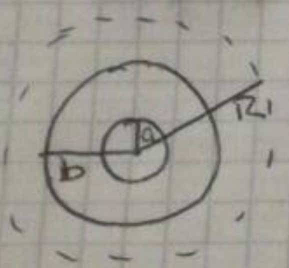
Para $a < r < b$

$$\Rightarrow \int \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi\,(R^3 - a^3)\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\bar{E} = \frac{R^3 - a^3}{3R^2}\,\frac{\rho}{\epsilon_0}\,\hat{r}$$

Para $r > b$ $\quad Q_{enc} = Q_{TOT}$.



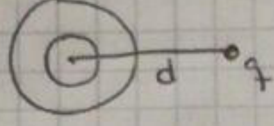
$$\int \bar{E}\, d\bar{S} = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0}$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi\,(b^3 - a^3)\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\bar{E} = \frac{b^3 - a^3}{3R^2}\,\frac{\rho}{\epsilon_0}\,\hat{r}$$

$$\Rightarrow \bar{E}(r) = \begin{cases} 0\,\hat{r} & r < a \\ \dfrac{r^3 - a^3}{3r^2}\dfrac{\rho}{\epsilon_0}\,\hat{r} & a < r < b \\ \dfrac{b^3 - a^3}{3r^2}\dfrac{\rho}{\epsilon_0}\,\hat{r} & r > b \end{cases}$$

b) Potencial electrostático y fuerza sobre partícula en $d > b$.



$$V(r) - (V(ref)) = - \int \underbrace{\bar{E}} \, dr$$

$V(ref) \equiv V(\infty) = 0$

uso el $\bar{E}$ para $r > b$ porque la partícula está en $d > b$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{b^3 - a^3}{3R^2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \, dR$$

$$V(r) = \frac{b^3 - a^3}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0} \left. \frac{1}{R} \right|_{\infty}^{r}$$

$$V(r) = \frac{b^3 - a^3}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

evalúo en $r = d \Rightarrow \left[V(d) = \frac{b^3 - a^3}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{1}{d} \right]$

Fuerza: $\bar{F} = q \cdot \bar{E}$

$$\bar{F} = q \cdot \frac{b^3 - a^3}{3d^2} \frac{\rho}{\epsilon_0} \hat{r}$$

c) quiero que se anule la fuerza total sobre la partícula.

$$F_{TOT} = F_{esfera} + F_Q$$

$$\Rightarrow F_Q = -F_{esf} = -q \frac{b^3 - a^3}{3d^2} \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

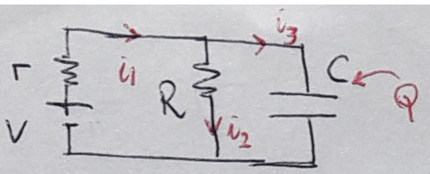
$$F_Q = q \cdot E_Q = q \cdot \frac{KQ}{d^2} \quad \Rightarrow Q = -Q_{TOT\,esf}.$$

$$\left[Q = -\frac{4}{3} \pi (b^3 - a^3) \rho \right]$$

Como $Q = -Q_{TOT\,esf}$ E y F se anulan para todo $r > b$

P3)

a) $\boxed{i_1 = i_2 + i_3}$ nodos



mallas

$$\boxed{V - i_1 r - i_2 R = 0} \Rightarrow V = i_1 r + i_2 R$$

$$\boxed{-\frac{Q}{C} + i_2 R = 0} \Rightarrow i_2 R = Q/C$$

$$V = i_2 (R + r) + i_3 r$$

$$\boxed{i_3 = \dot{Q}}$$

$$\Rightarrow \dot{Q} \cdot r + Q\left(\frac{r+R}{CR}\right) = V$$

tiempo característico

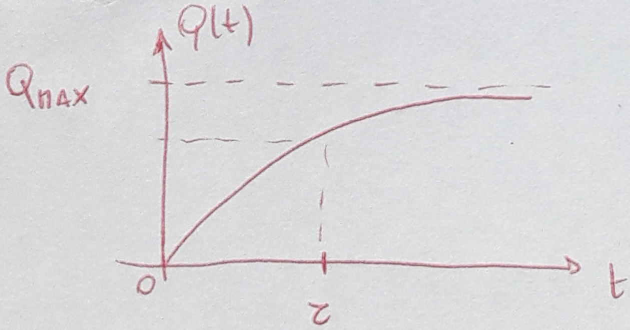
Ec. dif.: $\boxed{\dot{Q} + Q\,\frac{1}{C}\left(\frac{r+R}{Rr}\right) = \frac{V}{r}}$; $\boxed{\tau = C \cdot \frac{Rr}{r+R}}$

b) $Q = Q_h + Q_p$; $Q_h = A \cdot e^{-t/\tau}$, $\boxed{Q_p = \frac{V}{r} \cdot \tau}$

$$\Rightarrow Q(t) = A \cdot e^{-t/\tau} + Q_p$$

cond. ini: $Q(0) = 0 \Rightarrow A \cdot \cancel{e^0} = -Q_p$

$\therefore$ $\boxed{Q(t) = Q_p\,(1 - e^{-t/\tau})}$; $\boxed{t >> \tau : \text{completam. cargado}}$



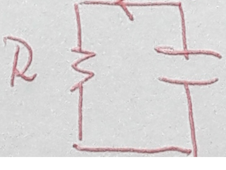
$$\boxed{Q(\infty) = Q_p = \frac{V \cdot C \cdot R}{r + R}}$$

carga máxima $\equiv Q_{MAX}$

energía máxima

$$\boxed{U_{MAX} = \frac{1}{2} Q \cdot V_c \Big|_{MAX}} = \frac{1}{2}\frac{Q_{MAX}^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{V^2 R^2 C}{(r+R)^2}$$

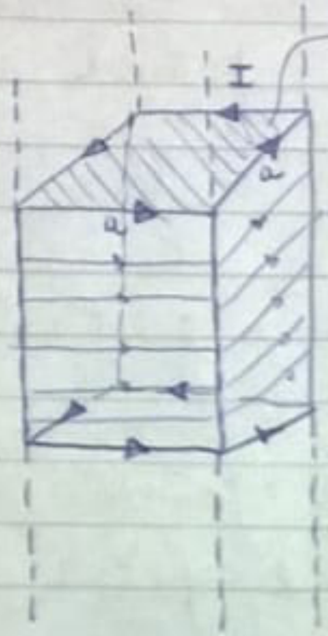
c) U se libera descargándose en la R, donde se disipa completamente. Durante la descarga surge una corriente i_c que para $\boxed{t >> \tau_c}$ se hace nula con el cap. completamente descargado:

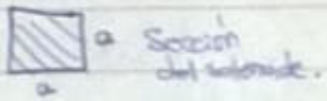


$Q_{ini} = Q_{MAX} \Rightarrow \boxed{Q_{fin} = 0}$

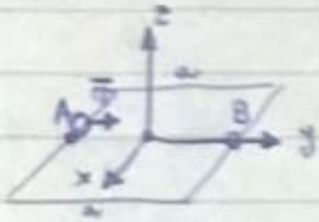
nuevo tiempo característico: $\boxed{\tau_c = RC}$

Ejercicio Parcial: Ley de Ampere y fuerza magnética.





$m = N^o$ vueltas x unidad de longitud.



Parte b)

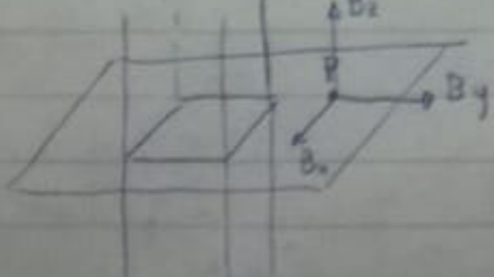
Parte a)

Se tiene un solenoide infinito de sección transversal cuadrada de lado a, el cual está formado por un arrollamiento de densidad m (n^o vueltas/long) y transporta una corriente I.

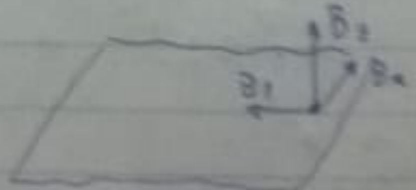
a) Utilizando argumentos de simetría, determine cuáles serán las componentes del campo magnético, y de qué variables dependerá. Suponga que el campo $B_{ext} = 0$ $\binom{x>a}{y>a}$

$$\vec{B} = B_x(x,y,z)\,\check{x} + B_y(x,y,z)\,\check{y} + B_z(x,y,z)\,\check{z}$$

Usando que el problema posee una simetría de reflexión a través de cualquier plano perp al eje del sol:



reflexión del producto



Luego $\boxed{\begin{matrix} B_x = 0 \\ B_y = 0 \end{matrix}}$

$B_z \neq 0$

$$\vec{B} = B_z(x,y,z)\,\check{z}$$

Además hay simetría de traslación en z

$$\vec{B} = B_z(x,y)\,\check{z}$$

Luego aplicamos Ampere a una longitud l del sol.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$\int_{C_1} B(x,y)\check{z}\cdot dz\,\check{z} + \underbrace{\int_{C_2}}_{\substack{=0\\ B_{ext}=0}} + \underbrace{\int_{C_3} + \int_{C_4}}_{0 \quad \vec{B}\perp d\vec{l}} = \mu_0\, I . m . l$$

$$\int_{C_1} B(x,y)\,dz = \mu_0 I m l$$

C_1 tiene x e y dte. solo cambia z. luego $B(x_0,y_0)$

$$B(x_0,y_0)\, l = \mu_0 I m l$$

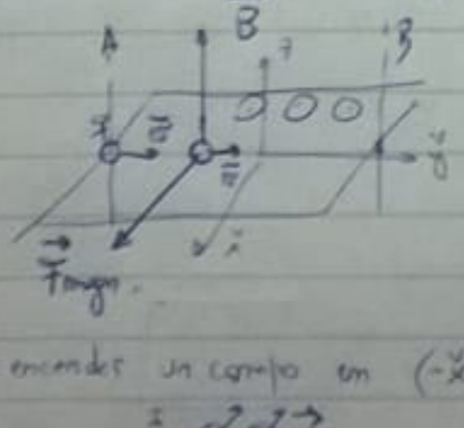
$$B(x_0,y_0)\,\cancel{l} = \mu_0 I m \cancel{l}$$

$$\boxed{B(x_0,y_0) = \mu_0 I m}$$

$$\vec{B}_{sol}(x_0,y) = \begin{cases} \mu_0 I m\ \check{z} & \text{Interior} \\ 0\ \check{z} & \text{Ext.} \end{cases}$$

Como dió constante vemos que en realidad no depende del punto x_0, y_0 por el que pasa el Curva de Ampere

b) Una partícula de carga q ingresa al sol* con velocidad $\vec{v}$ y sufrirá una fuerza debida al campo magnético interno. Calcule en qué dirección y sentido e intensidad debemos encender un campo eléctrico $\vec{E}$ para que la partícula pueda llegar al punto B sin desviarse.



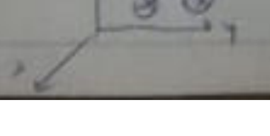
$$\vec{F}_{magn} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$$

$$= q\, v\, \check{y} \times B_{sol}\,\check{z}$$

$$= (q\, v\, B_{sol})\ \check{x}$$

$$\vec{F}_{el} = -\vec{F}_{magn} = -q\,v\,B_{sol}\ \check{x}$$

Hay que encender un campo en $(-\check{x})$, de valor $q|\vec{E}| = |\vec{F}_{elect}|$



$$|\vec{E}| = \frac{q\, v\, B_{sol}}{q} = v\, B_{sol} = v\,\mu_0 I m$$