Resolución de 1er parcial de Estadística en Física Experimental 2017

Problema 1: Sobre una mesa hay tres mazos de cartas españolas normales y uno *especial*. El mazo *especial* tiene tres anchos de espadas. Todos los mazos tienen 40 cartas. Se toma un mazo al azar del cual luego se retiran tres cartas, también al azar.

a) Si de las tres cartas una resulta ser un ancho de espadas, ¿cuál es la probabilidad de que se haya elegido el mazo *especial*?

b) Si se vuelve a jugar otra mano con el mismo mazo (tomando tres cartas entre las 40), ¿cuál es la probabilidad de volver a sacar un solo ancho de espada?

Resolución: a)
$A = \{$Una de las tres cartas es un ancho de espadas$\}$
$B = \{$Se eligió el mazo *especial*$\}$
$\bar{B} = \{$No se eligió un mazo *especial*$\}$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A|B)\cdot P(B) + P(A|\bar{B})\cdot P(\bar{B})} \quad \text{donde} \quad P(B) = 1/4 \quad \text{y} \quad P(\bar{B}) = 3/4$$

$$P(A|B) = \frac{\binom{3}{1}\binom{37}{2}}{\binom{40}{3}} = 0.2022 \quad \text{y} \quad P(A|\bar{B}) = \frac{\binom{1}{1}\binom{39}{2}}{\binom{40}{3}} = 0.0750 \Rightarrow P(B|A) = 0.4733$$

b) $P(A) = P(A|B)\cdot P(B) + P(A|\bar{B})\cdot P(\bar{B})$
Por tratarse del mismo mazo elegido donde sucedió A, resulta que: $P(B) = 0.4733$ y $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.5267$ mientras que $P(A|B)$ y $P(A|\bar{B})$ no cambian, por lo tanto $P(A) = 0.1346$.
$P(B) = 0.4733$ y $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.5267$
mientras que $P(A|B)$ y $P(A|\bar{B})$ no cambian, por lo tanto $P(A) = 0.1346$.

Problema 2: Justo cuando un artista plástico callejero terminaba su obra, que había realizado con tizas de colores sobre una vereda de pequeñas baldosas cuadradas, comenzó a garuar. Por suerte, tan solo un minuto después la lluvia se detuvo. El artista notó que exactamente la mitad de las baldosas intervenidas por su obra habían recibido al menos una gota de lluvia y entonces se hizo algunas preguntas que seguramente podrás ayudarle a responder.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una dada baldosa tenga más de una gota? ¿Y más de n?

b) ¿Cuál es la probabilidad de elegir 10 baldosas al azar y que más de 8 tengan al menos una gota?

c) ¿Cuántas baldosas se deberán revisar en promedio hasta encontrar tres que hayan recibido más de dos gotas?

Resolución: Sea la variable aleatoria X: "cantidad de gotas en una dada baldosa".
Caen muchas gotas (n $\to \infty$) y la probabilidad de que una caiga justo en una dada baldosa es muy chica (p $\to 0$), por lo tanto X $\sim$ Poisson(k, μ). Siendo k el número de gotas en una dada baldosa y μ el número de gotas esperadas por baldosa.

Sabemos que la mitad tiene al menos una gota, por lo tanto la otra mitad tiene cero gotas (k=0), luego: P(k=0, μ)=1/2 $\Rightarrow \exp(-\mu) = 1/2 \Rightarrow \mu = \log(2)$.
a) $P(k > 1|\mu)$=1-$P(0|\mu)$-$P(1|\mu)$
$P(k > 1|\mu)$=1-$\exp(-\log(2)) - \log(2)\exp(-\log(2)) = \frac{1-\ln(2)}{2}$.
$P(k > n|\mu)$=$1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu^k \exp(-\mu)}{k!}$

b) B(n=10, p=1/2, k≥9)= $\binom{10}{9}(1/2)^9(1/2)^1$ +$\binom{10}{10}(1/2)^{10}(1/2)^0$= 0.0107

c) En este 'experimento' el número de baldosas que hay que revisar es una variable aleatoria con distribución binomial negativa ya que la búsqueda termina cuando se consigue un determinado número de éxitos (k=3). La esperanza es por lo tanto:

$$\mathrm{E(k)}=\frac{k}{p} = \frac{3}{P(k\geq 3)} = \frac{3}{1-P(k\leq 2)} = \frac{3}{1-1/2(1-\log(2)-\frac{\log^2(2)}{2})} = 90.$$

Problema 3: Un haz de neutrones térmicos se hace incidir sobre una placa borada. Como resultado, la intensidad del haz se reduce, ya que algunos neutrones pasan de largo y otros son capturados por el ^{10}B de la placa. Sabiendo que una placa borada de 4 mm de espesor redujo el flujo neutrónico **en un** 33 % y utilizando argumentos estadísticos calcule:

a) ¿Qué espesor debe tener la placa para blindar el flujo neutrónico dejando pasar menos del 1 %?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un neutrón sea capturado en la segunda mitad de la placa de 4 mm?

c) Si se lanzan 391 neutrones contra una placa de 10 mm de espesor. ¿Cuantos espera que pasen la placa por segundo y con qué dispersión?

d) Ahora se coloca un detector con eficiencia del 25 % detrás de la placa del ítem anterior. ¿Cuantos espera contar por segundo y con qué dispersión?

Resolución: Sea la variable aleatoria X: 'distancia que recorre el haz de neutrones dentro de la placa hasta que ocurre la primera captura'. Por los mismos argumentos que se usaron en el problema 3 de la guía 3, donde la variable aleatoria era 'tiempo hasta que ocurre el primer decaimiento', la distribución de X es exponencial.

Sabemos que la probabilidad de que X tome valores menores o iguales que t, esto es, que los neutrones sean capturados antes de recorrer una distancia t dentro de la placa puede calcularse como:
$P(X \leq t) = \int_0^t f(t')dt' = 1 - \exp(-\lambda t)$, evaluando en los datos del enunciado resulta que
0.33=$1 - \exp(-\lambda \cdot 4mm) \Rightarrow \lambda = \frac{-\log(0.67)}{4mm} = 0.1/mm.$
a) Lo que se pregunta es equivalente a: ¿hasta donde tengo que integrar para que la probabilidad de ser capturado sea 0.99?, entonces:
$\int_0^t f(t')dt' = 0.99 \Rightarrow 1 - \exp(-\lambda t) = 0.99 \Rightarrow t \geq 46 \quad mm.$
b) $\int_{2mm}^{4mm} f(t')dt' = -\exp(-\lambda \cdot 4mm) + \exp(-\lambda \cdot 2mm) = 0.1484.$
c) p=$\int_{0mm}^{10mm} f(t')dt' = 1 - \exp(-\lambda \cdot 10mm) = 0.632$. Esta es la probabilidad de que no pase la placa, entonces p=1-0.6321=0.3679 es la probabilidad de que sí pasen.
B(391, p) $\Rightarrow E(k) = n \cdot p = 391 * 0.3679 = 143.84$ y $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 9.535$
d) Se considerará correcta la resolución de aquellos que:
i) hayan asumido que $\mu = 144$ neutrones era la esperanza de una variable aleatoria con distribución de Poisson y que la composición con una distribución Binomial(n, ε) (asociada a la variable aleatoria: 'número de veces que el detector contó un neutrón'), resulta en una variable aleatoria con distribución de Poisson con $\mu' = \varepsilon \cdot \mu$ (ejercicio 19b de la guía 2). Y por lo tanto, se esperan contar $E(k') = 0.25 \cdot 144 = 36$ y $\sigma^2 = \mu' \Rightarrow \sigma = 6$;
ii) por tratarse inicialmente de exactamente 391 neutrones, dijeron que es un experimento de Bernoulli y por lo tanto la variable aleatoria tiene distribución Binomial (esto último es en rigor lo correcto).
Nota: Había al menos otras dos formas correctas de resolver el ejercicio: usando una variable aleatoria con ditribución Poissoniana o bien, pensando a la placa como superposición de plaquitas.

Problema 4: En un viaje por la Autopista Panamericana, Leila y Ayelén juegan a encontrar el par de patentes nuevas más cercanas entre sí. Para ello cada una busca una patente nueva y le asigna un número entre 0 y 1, siendo la AA000AA la número cero y la AB300ZZ la número 1 (la patente más nueva el día del juego). Luego, calculan la diferencia entre los números asignados a las dos patentes observadas y lo guardan. Hacen esto con n pares de patentes durante el viaje en busca del par al que le corresponda la menor diferencia.

a) Encuentre la distribución de las diferencias y calcule su varianza.

b) Sabiendo que las patentes nuevas existen hace 13 meses y asumiendo (en una aproximación grosera) que la venta de autos fue aproximadamente constante en ese tiempo, calcule la probabilidad de que dado un par de autos con patentes nuevas se hayan vendido con un mes diferencia o menos.

c) Sabiendo que la densidad de probabilidad del mínimo es $f_{V_{min}}(v) = nf_V(v)[1 - F_V(v)]^{n-1}$, deje expresada la probabilidad de que Leila y Ayelén encuentren dos autos vendidos con un mes de diferencia o menos si en todo el viaje contaron 100 pares de autos en total.

Resolución: El ítem a) es el problema 2 de la Guía 4 y fue resuelto en la teórica con detalle. A continuación un resumen de los pasos a seguir (una posible forma, no la única):

Se definen U=X-Y y V=X+Y, se calcula la función distribución conjunta $g_{U,V}(u, v)$ y luego marginalizando sobre v se obtiene $g(u)$, que resulta de la forma:

$$\begin{cases} 1+u, & \text{si } u \,\epsilon\, [-1,0]\,, \\ 1-u, & \text{si } u \,\epsilon\, (0,1]\,, \end{cases}$$

que tiene esperanza nula (notar que es simétrica alrededor de cero) y varianza igual a 1/6.

Item b), luego de asumir que la venta de autos es aproximadamente constante y considerar también con distribución uniforme a la variable aleatoria 'número de día en que el auto fue vendido', la pregunta se responde con: $\int_{-1/13}^{1/13} g(u)du$, donde 1/13 representa la fracción de tiempo correspondiente a un mes en 13 meses.

Item c) Acá era necesario advertir que el mínimo de u es -1 y corresponde a la máxima diferencia de tiempo entre la venta de dos autos, cuando, $x = 0$ (el primero) e $y = 1$ (el último). Por lo tanto, era necesario encontrar en primer lugar la distribución del módulo de la diferencia, y luego escribir la distribución del mínimo del módulo usando la ayuda.

Resultaba que $g_{|U|}(u) = 2u - u^2$ para $u \,\epsilon\, [0, 1]$. Finalmente se calcula la $G(u)$ y se reemplazan ambas dos en la ayuda del enunciado con n= 100.

Otra forma de responder a esta pregunta es usando la probabilidad del ítem b) y calculando luego la probabilidad de tener al menos un éxito (1 - P(0)) de una binomial con $n = 100$.