Parte bayesiana

a)

La probabilidad de detectar $X = k$ decaimientos en 1 segundo sigue una distribución de Poisson, donde X es la variable aleatoria y μ, el parámetro (adimensional) de la distribución, es la actividad en 1 segundo:

$$P(X = k \mid \mu) = \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu} \tag{1}$$

Dadas n mediciones $\mathbf{k} = \{k_1, ..., k_n\}$, la verosimilitud para dicho experimento es:

$$L(\mathbf{k} \mid \mu) = \prod_{i=1}^{n} P(k_i \mid \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{k_i}}{k_i!}\, e^{-\mu} \tag{2}$$

Según el enunciado, la distribución Gamma es la conjugada para la distribución de Poisson, es decir:

$$Gamma(\mu; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \frac{L(\mathbf{k} \mid \mu)\; Gamma(\mu; \alpha, \beta)}{\int L(\mathbf{k} \mid \mu)\; Gamma(\mu; \alpha, \beta)\; d\mu} \tag{3}$$

Para encontrar la relación de transformación, solo nos interesa ver la forma funcional del término de la derecha de la (3), es decir, todo lo que incluye μ, ya que el resto son constantes que hacen a la normalización de la distribución. Desarrollando dicho término, tenemos:

$$\frac{1}{I(\alpha, \beta)} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\mu^{k_i}}{k_i!}\, e^{-\mu} \right) \left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, \mu^{\alpha - 1} e^{-\beta\mu} \right) = C(\alpha, \beta)\; \mu^{\alpha - 1 + \sum_i k_i}\; e^{-(\beta + n)\mu} \tag{4}$$

donde $I(\alpha, \beta)$ es la integral en el denominador de (3) y $C(\alpha, \beta)$ agrupa todos los términos constantes independientes de la variable de interés (μ). Podemos ver entonces que (4) tiene la forma de la función Gamma con parámetros:

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^{n} k_i = \alpha + n\bar{k} \tag{5}$$

$$\tilde{\beta} = \beta + n \tag{6}$$

donde $\bar{k} = \frac{1}{n} \sum_i k_i$ es el promedio de las mediciones.

b)

Al decir que la $Gamma(\mu; \alpha = 100, \beta = 10)$ es una buena descripción de lo que se sabe de la actividad (en 1 segundo) de la fuente, estamos diciendo que μ es "*una especie de variable aleatoria*" con dicha distribución. Podemos estimar su actividad a partir de su esperanza y dar un intervalo de confianza a partir de su desviación estándar σ.

$$\hat{\mu} = E\big[\mu\big] = \frac{\alpha}{\beta} = 10 \tag{7}$$

$$\sigma_{\hat{\mu}} = \sqrt{Var\big[\mu\big]} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2}} = 1 \tag{8}$$

c)

Se quiere saber cuantas mediciones hace falta realizar para reducir a la mitad la incerteza en la actividad de la fuente, es decir: $\sigma_{futuro} = \sigma_{actual}/2$. Expresado en términos de la varianza, y dado que $\sigma_{actual} = 1$, tenemos:

$$Var\left[\mu\right] = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}^2} = \frac{\alpha + n\bar{k}}{(\beta + n)^2} = \frac{1}{4} \tag{9}$$

donde se usó (5) y (6), la relación de transformación de prior a posterior.

Tenemos que $\alpha = 100$ y $\beta = 10$ de la información que se tiene de la fuente. Por otro lado, el enunciado nos dice que la actividad previamente calculada es un buen estimador para el valor medio $\bar{k}$ de las nuevas mediciones, es decir, usaremos $\bar{k} = 10$. Luego, queda simplemente despejar n de:

$$\frac{1}{4} = \frac{100 + 10n}{(10 + n)^2} \tag{10}$$

de donde surge una cuadrática con dos soluciones, de la cual nos quedamos con la solución positiva $n = 30$.

Comentarios y errores generales

a)

Verosimilitud

Realizando un paso mas sobre (2), se llega a:

$$L(\mathbf{k} \,|\, \mu) = \frac{\mu^{\sum_i k_i}}{\prod_{i=1}^{n} k_i!} \, e^{-n\mu} = \frac{\mu^{k_T}}{\prod_{i=1}^{n} k_i!} \, e^{-n\mu} \tag{11}$$

donde $k_T = \sum_{i=1}^{n}$. Algunos plantearon directamente como verosimilitud:

$$L_2(\mathbf{k} \,|\, \mu) = \frac{\mu^{k_T}}{k_T!} \, e^{-n\mu} \tag{12}$$

lo cual es similar a excepción del término del factorial, y se llega al mismo resultado de transformación del prior Gamma. Sin embargo, este representa otra variable aleatoria, que es la suma de los experimentos, y no los experimentos por separado. Como la suma de los experimentos es un estimador suficiente para el parámetro de la Poisson, se llega a lo mismo.

Otros plantearon un único experimento (es decir, $n = 1$), y después les trajo problemas en la parte c).

b)

Varianza

Como ya se mencionó en clase, fue un error bastante común usar la varianza como error o incerteza.

Prior vs posterior

Otro error común fue utilizar el posterior en el punto b). Expresaron la actividad de la fuente como:

$$\hat{\mu} = E\left[\mu\right] = \frac{\alpha + n\bar{k}}{\beta + n} = 10 \tag{13}$$

$$\sigma_{\hat{\mu}} = \sqrt{Var\left[\mu\right]} = \sqrt{\frac{\alpha + n\bar{k}}{(\beta + n)^2}} = 1 \tag{14}$$

dejando $\bar{k}$ y n como incógnitas. Para saber cual es la actividad de la fuente con lo que se conoce hasta el momento, es decir, antes de realizar el experimento, hay que utilizar el prior. Otra forma de verlo, sería poner la cantidad de experimentos $n = 0$.

Sin embargo, esto da pie para aclarar un error conceptual. El prior y el posterior no son cosas distintas, sino que representan la misma cosa: una distribución de probabilidad que expresa nuestra creencia sobre el parámetro que se quiere estimar. Llamamos posterior a un prior que es actualizado por un experimento. Sin embargo, ese posterior será el prior para un futuro experimento.

c)

Estimación de las nuevas mediciones

Como se ve en (9), para calcular cuantas mediciones n hacen falta para reducir la incerteza a la mitad, hace falta también saber como se actualiza α [ver (5)]. El enunciado nos dice que la actividad calculada antes es un buen estimador para el promedio de las nuevas mediciones, es decir, $\bar{k} = 10$. Algunos interpretaron esto como que el promedio del posterior es el mismo (que es cierto) y, por lo tanto, $\tilde{\alpha}/\tilde{\beta} = \alpha/\beta = 10$. Noten que si el enunciado hubiese dicho "el promedio de las nuevas mediciones es 11, eso no implicaría que $\tilde{\alpha}/\tilde{\beta} = 11$, sino que:

$$\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} = \frac{\alpha + 11n}{\beta + n} = \frac{100 + 11n}{10 + n} \tag{15}$$

que es un número entre 10 y 11.