Estadística en Física Experimental (1er cuatrimestre de 2015)

Primer Parcial 15 de Mayo 2015

Resuelva cada ejercicio en hojas separadas
Escriba Nombre, Apellido y LU en cada hoja
Justifique los pasos y aproximaciones hechas (i.e., evitar los galerazos)

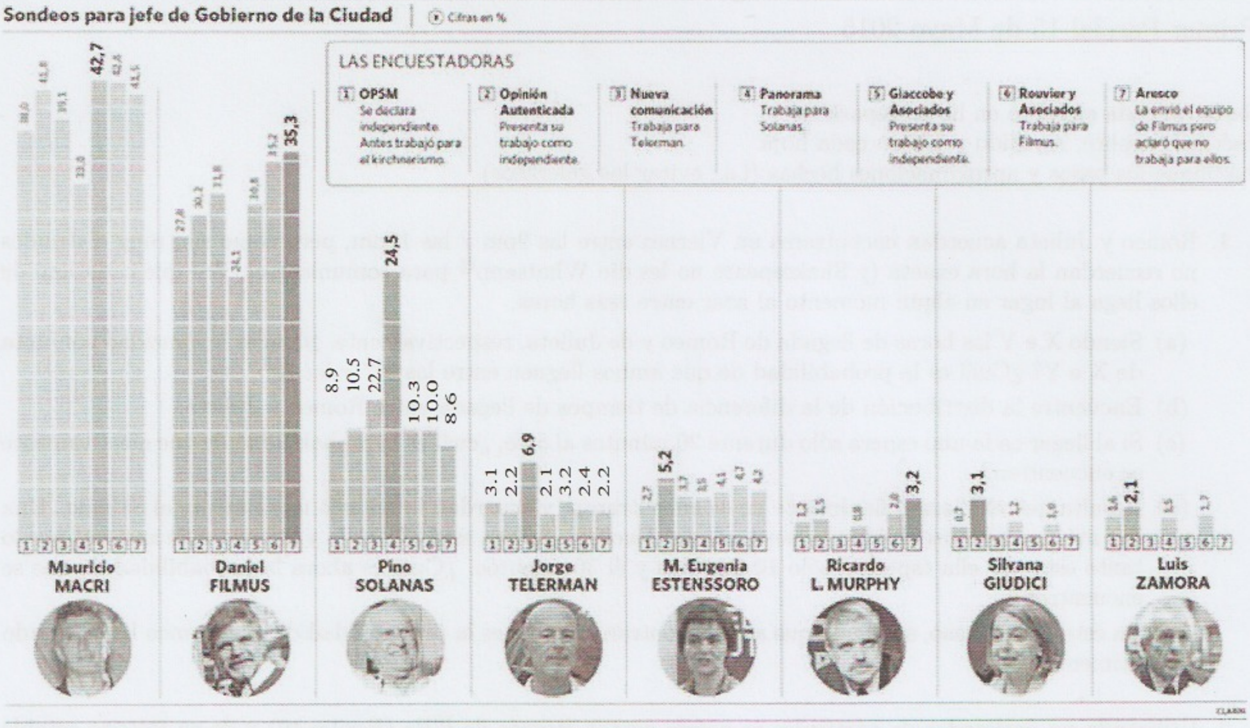
1. Romeo y Julieta acuerdan encontrarse un Viernes entre las 9pm y las 10pm, pero como son muy distraidos no recuerdan la hora exacta (y Shakespeare no les dio Whatsapp® para comunicarse). Así que cada uno de ellos llega al lugar en algún momento al azar entre esas horas.
   (a) Siendo X e Y las horas de llegada de Romeo y de Julieta, respectivamente, ¿cuál es la densidad conjunta de X e Y? ¿Cuál es la probabilidad de que ambos lleguen entre las 9^{15} y las 9^{45}?
   (b) Encuentre la distribución de la diferencia de tiempos de llegada entre Romeo y Julieta.
   (c) Si al llegar cada uno espera sólo durante 20 minutos al otro, ¿cuál es la probabilidad de que efectivamente se encuentren?
   (d) Resulta que el Viernes finalmente no se encontraron, y acuerdan intentarlo nuevamente el Sábado. Una vez más los tórtolos olvidan la hora exacta. Encima, Julieta está ofuscada y Romeo más ansioso, por lo tanto esta vez ella esperará sólo 10 minutos y él 30 minutos. ¿Cuál es ahora la probabilidad de que se encuentren?
   (e) En éste último caso, sabiendo que sí se encontraron, ¿cuál es la probabilidad de que Romeo haya llegado primero?

2. Utilizando un acelerador de partículas se quiere contar átomos de ^{10}Be (Berilio-10) y de su isótopo estable ^{9}Be (Berilio-9), para determinar su relación isotópica R. La eficiencia del detector de ^{10}Be es ϵ_{10}=0.36 ± 0.01, mientras que la del detector de ^{9}Be puede considerarse igual a ϵ_9=1 y despreciar su error. Sabiendo que la tasa de conteo esperada de ^{10}Be es de 9 partículas por segundo y la de ^{9}Be es 10^{12} partículas por segundo:
   (a) Calcule el tiempo de medición necesario para que el error estadístico cometido al determinar $R = \dfrac{(\text{Conteo de } ^{10}\text{Be})/\epsilon_{10}}{(\text{Conteo de } ^{9}\text{Be})/\epsilon_9}$, sea menor al 10 % del error sistemático.
   (b) Recalcule el ítem anterior si las eficiencias de detección están correlacionadas según Cov(ϵ_9, ϵ_{10})= 10^{-5}, y $\epsilon_9 = 0.97 \pm 0.01$.

   Se desea implementar un control de estabilidad del haz, y para ello se dispone de una alarma que se activa cuando no se registran eventos de ^{10}Be durante un tiempo τ.
   (c) Establezca el valor de τ para que la probabilidad de que transcurra un tiempo $t \geq \tau$ sin eventos sea menor a 10^{-6}.
   (d) ¿Cuál es la probabilidad de que la alarma se haya activado al menos una vez por fluctuación estadística del conteo durante el tiempo de medición calculado en el ítem 2a? ¿Y si la medición durara 8 horas?

3. Encontrar una fórmula que permita, a partir de un generador de números uniformes entre 0 y 1, producir números al azar con distribución $f_X(x) = c\dfrac{\ln x}{x}$, con $x \in [1, e]$ y c una constante de normalización.

4. Una pregunta válida en época de elecciones (y siempre) es si las encuestadoras son imparciales. Considere los datos que siete encuestadoras informaron sobre los candidatos a jefe de Gobierno en 2011. La infografía muestra los porcentajes de intención de voto para cada candidato.
   (a) Considere los pronósticos para el candidato Pino Solanas y suponga que todas las encuestas fueron realizadas con muestras de 1000 personas.
      i. ¿A *cuántos sigmas* está la intención de voto que presenta "Panorama" respecto del promedio de las otras seis encuestadoras?
      ii. Suponga ahora que las otras 6 encuestadoras son representativas de la población y deje expresada la probabilidad de que Panorama haya obtenido esa predicción u otra con mayor diferencia como una fluctuación del promedio de la población. ¿Puede dar una cota de esta probabilidad?
   (b) ¿Cuántas personas debieran haberse encuestado para que el pronóstico que "Nueva Comunicación" informa para Telerman esté a 3 sigmas del promedio de las otras encuestadoras.
   (c) ¿Qué le agregaría a estos gráficos, para responder las preguntas anteriores en un golpe de vista?



Tomada de: http://www.clarin.com/politica/Sondeos-jefe-Gobierno-Ciudad_CLAIMA20110708_0090_19.jpg

---

Fórmulas que podrían ser útiles

Distribución	Fórmula	Esperanza	Varianza
Binomial	$B(X=k\|n,p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$P(X=k\|\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
Hipergeométrica	$H(X=k\|N,n,K)=\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{nK}{N}$	$n\frac{K(N-K)}{N^2}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
Binomial negativa	$P(X=n\|k,p)=\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$	$\frac{k}{p}$	$\frac{k(1-p)}{p^2}$

La desigualdad de Tchebychev:

$$P(|X-E(X)|\geq\epsilon)<\frac{Var(X)}{\epsilon^2}$$

La aproximación de Stirling para el factorial:

$$\ln(n!)\approx S(n)\equiv n\ln(n)-n+\frac{1}{2}\ln(2\pi n)+\frac{1}{12n}.$$

Fórmula de propagación:

$$Cov(Y_i,Y_j)=\sum_{k,l}\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial y_j}{\partial x_l}Cov(X_k,X_l)$$

Romeo y Julieta

X = hora de llegada de Romeo a la reunión

Y = " " " " Julieta a la reunión

a) X es uniforme en $[9pm; 10pm]$

$$f_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 9 < t < 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

del mismo modo Y es uniforme en $[9pm; 10pm]$

$$f_Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 9 < t < 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

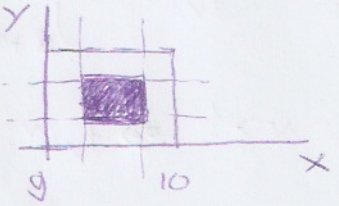
podría hacer cambio de variables $\tilde{X} = X + 9$, $\tilde{Y} = Y + 9$ y trabajar en $[0,1] \times [0,1]$

Dado que X e Y son independientes $f_X(x) f_Y(y) = f_{XY}(x,y)$

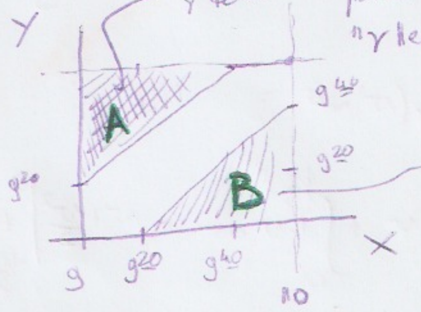
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 9 < x < 10, \; 9 < y < 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$P(9^{15} < X < 9^{45} \cap 9^{15} < Y < 9^{45}) = \int_{9.25}^{9.75} dx \int_{9.25}^{9.75} dy \cdot 1 = 0.5 * 0.5 = 0.25$$

$$9^{15} \equiv 9{:}15 \equiv 9.25$$



b) "X llega antes que Y" y de hecho llega 20 minutos antes por lo menos" o más fácil "Y llega 20' después o más que X"



X llega 20' después o más que Y

$A = \{Y \text{ llega } 20' \text{ más tarde o más que } X\}$

$B = \{X \text{ llega } 20' \text{ más tarde o más que } Y\}$

A y B son excluyentes $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$

$$P(\text{no encontrarse}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \cancel{P(A \cap B)}^{0} =$$

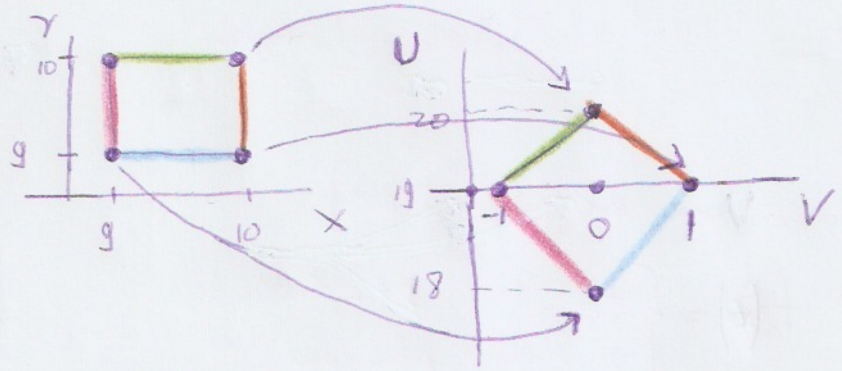
$$= \underbrace{\frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{1}{2}}_{\text{área del triángulo A}} + \underbrace{\frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{1}{2}}_{\text{área del triángulo B}} = \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$P(\text{encontarse}) = 1 - P(\text{no encontarse}) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ ✓

Otro modo

$U = X + Y$

$V = X - Y$



$$J = \left| \frac{\partial(U,V)}{\partial(X,Y)} \right| = \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right| = 2$$

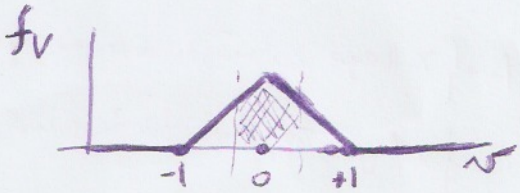
$$f_{UV} = \frac{1}{2} f_{XY}$$

$$f_V(v) = \int f_{UV}(u,v)\,du =$$

si $v \in [-1;0]$ $\quad f_V(v) = \int_{18-v}^{20+v} \frac{1}{2} f_{XY}\,du = \int_{18-v}^{20+v} \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}(20+v-18+v) = 1+v$

si $v \in [0;1]$ $\quad f_V(v) = \int_{18+v}^{20-v} \frac{1}{2} f_{XY}\,du = \int_{18+v}^{20-v} \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}(20-v-18-v) = 1-v$

si $v < -1$ ó $v > 1$ $\quad f_V(v) = 0$



$V = X - Y$ como $|X - Y| < 20 \text{ minutos} = \frac{1}{3}$

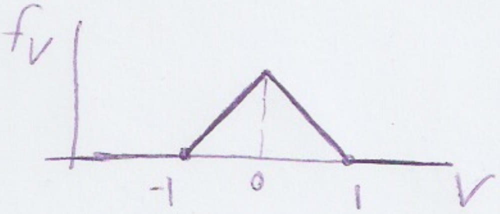
$$P(\text{encontarse}) = \int_{-1/3}^{1/3} f_V(v)\,dv =$$

$$= \int_{-1/3}^{0} 1+v\,dv + \int_{0}^{1/3} 1-v\,dv = v + \frac{v^2}{2}\Big|_{-1/3}^{0} + v - \frac{v^2}{2}\Big|_{0}^{1/3}$$

$$= 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{1}{3} - \frac{1}{18} - 0 = \frac{2}{3} - \frac{2}{18} =$$

$$= \frac{12-2}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \checkmark = 0{,}555$$

d) ahora no se encontraron y Julieta lo espera 10 minutos y el 30 minutos

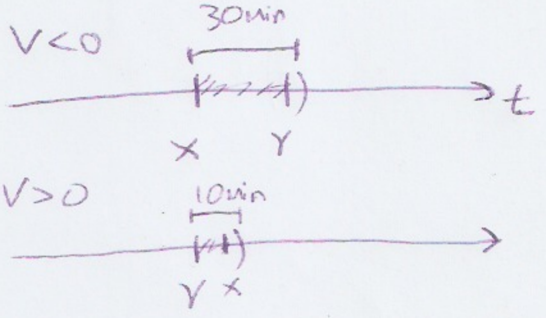


$$V = X - Y$$

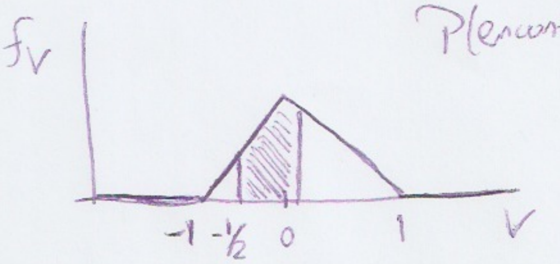
$$\Rightarrow P(\text{encontrarse}) = P(-30\text{min} < X - Y < 10\text{minutos})$$

$$= P\left(-\frac{1}{2} < V < \frac{1}{6}\right)$$

$$= \int_{-1/2}^{1/6} f_V(v)\,dv$$



$$P(\text{encontrarse}) = \underbrace{\int_{-1/2}^{0} 1+v\,dv}_{P(\text{encontarse} \mid \text{Romeo llegó primero})P(\text{Romeo llegó primero})} + \underbrace{\int_{0}^{1/6} 1-v\,dv}_{P(\text{encontarse} \mid \text{Julieta llegó primero})P(\text{Julieta llegó primero})} = v + \frac{v^2}{2}\Big|_{-1/2}^{0} + v - \frac{v^2}{2}\Big|_{0}^{1/6}$$



$$= 0 - \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right] + \frac{1}{6} - \frac{1}{72} - 0 =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}_{3/8} + \underbrace{\frac{1}{6} - \frac{1}{72}}_{11/72} = \frac{19}{36} \approx 0{,}5278$$ es menos probable

no qe es lo mismo qe antes !

e) $P(\text{encontarse y Romeo llegó primero}) = \int_{-1/2}^{0} f_V(v)\,dv = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$$P(\text{Romeo llegó primero} \mid \text{se encontraron}) = \frac{3/8}{19/36} = \frac{27}{38} = 0.7105$$

Problema 2

$$R = \frac{C_{10} \cdot \varepsilon_g}{C_g \cdot \varepsilon_{10}} \qquad C_{10} = \lambda_{10} \cdot t \; ; \; C_g = \lambda_g \cdot t$$

a)

- $$\sigma_{est}^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial C_{10}}\right)^2 \sigma_{C_{10}}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial C_g}\right)^2 \sigma_{C_g}^2 \Rightarrow \sigma_{est}^2 = \left(\frac{R}{C_{10}}\right)^2 C_{10} + \left(\frac{R}{C_g}\right)^2 C_g$$

$$\left(\frac{\sigma_{est}}{R}\right)^2 = \frac{1}{C_{10}} + \frac{1}{C_g} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{\lambda_{10}} + \frac{1}{\lambda_g}\right) \simeq \frac{1}{t\,\lambda_{10}}$$

- $$\sigma_{sis}^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{10}}\right)^2 \sigma_{\varepsilon_{10}}^2 \Rightarrow \sigma_{sis}^2 = \left(\frac{R}{\varepsilon_{10}}\right)^2 (\Delta\varepsilon_{10})^2 \Rightarrow \left(\frac{\sigma_{sis}}{R}\right)^2 = \left(\frac{\Delta\varepsilon_{10}}{\varepsilon_{10}}\right)^2$$

$$\frac{\sigma_{sis}}{\sigma_{est}} > 10 \Rightarrow \frac{\Delta\varepsilon_{10}}{\varepsilon_{10}} \times \sqrt{t\,\lambda_{10}} > 10 \Rightarrow t > \left(\frac{10 \times 0.36}{0.01}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\,s\right)$$

$$\boxed{t > 14.400\,s} \Rightarrow t > 4hs$$

b)

- $$\sigma_{sis}^2 = \left(\frac{R}{\varepsilon_{10}}\right)^2 (\Delta\varepsilon_{10})^2 + \left(\frac{R}{\varepsilon_g}\right)^2 \cdot (\Delta\varepsilon_g)^2 + 2\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_{10}}\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_g}\,Cov\,(\varepsilon_g \times \varepsilon_{10})$$

$$\left(\frac{\sigma_{sis}}{R}\right)^2 = \left(\frac{\Delta\varepsilon_{10}}{\varepsilon_{10}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\varepsilon_g}{\varepsilon_g}\right)^2 - \frac{2 \times 10^{-5}}{\varepsilon_g \times \varepsilon_{10}}$$

$$\left(\frac{\sigma_{sis}}{R}\right)^2 = 7,716 \times 10^{-4} + 1,063 \times 10^{-4} - 5,73 \times 10^{-5} = 8,206 \times 10^{-4}$$

$$\left(\frac{\sigma_{sis}}{\sigma_{est}}\right)^2 > 10^2 \Rightarrow 8,206 \times 10^{-4} \times t \times 9\,\frac{1}{s} > 100 \Rightarrow \boxed{t > 13540\,s}$$

c)

$$P(k=0, \mu=\lambda t) = \frac{e^{-\lambda t} \times \lambda t^0}{0!} = e^{-\lambda t} \Rightarrow e^{-\lambda \tau} < 10^{-6}$$

$$+\lambda\tau > +6\,\ln(10) \Rightarrow \tau > \frac{6\,\ln(10)}{9} = 1,535\,s$$

d)

Intentos $n = \lambda . t = 9 . \frac{1}{s} \times 14400\,s = 129600$ en 4hs

$$p = 10^{-6} \Rightarrow \mu = n\,p = 0,1296$$

$$P(\text{al menos 1 vez}) = 1 - P(\text{nunca}) = 1 - e^{-\mu} \simeq 0,1216 \quad \text{en 4hs}$$

$$1 - e^{-2\mu} \simeq 0,2283 \quad \text{en 4hs}$$

Si se lo piensa binomial:

$$B(k > 0) = 1 - B(k=0) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = 1 - (1-10^{-6})^n$$

3) Formula de Monte Carlo

Queremos generar números con distribución $f_X(x) = c\frac{\ln x}{x}$ donde $x \in [1, e]$

a partir de un generador de números aleatorios con distribución uniforme $U \sim U[0,1]$.

La constante 'c' es tal que $\int_1^e f_X(x)dx = 1$

$$\int_1^e f_X(x)dx = \int_1^e c\frac{\ln x}{x} = c\frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_1^e = \frac{c}{2}\Big[\underbrace{(\ln e)^2}_{1} - \underbrace{(\ln 1)^2}_{0}\Big] = \frac{c}{2} = 1$$

$$f_X(x) = 2\frac{\ln x}{x}$$

tomemos $U \sim U[0,1]$ y busquemos una transformación $X = g(U)$ de modo que la distribución de X sea $f_X(x)$

$$P(X<x) = P(g(U)<x) = P(U<g^{-1}(x))$$

Acá suponemos que g es inversible y debemos comprobarlo

$$F_X(x) = F_U(g^{-1}(x)) = F_U(g^{-1}(g(u))) = F_U(u)$$

con $F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ u & \text{si } 0 < u \leq 1 \\ 1 & \text{si } u > 1 \end{cases}$ por ser U uniforme

Por lo tanto, con

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ (\ln x)^2 & \text{si } 1 \leq x \leq e \\ 1 & \text{si } x > e \end{cases}$ vale la igualdad con $F_U(u)$ sii

$\ln(x)^2 = u$

$\ln(g(u))^2 = u$ Nos quedamos con la raiz positiva pues $1<x<e$

$\boxed{x = g(u) = e^{\sqrt{u}}}$ $\Rightarrow$ $x = g(u) = e^{\sqrt{u}}$ permite generar numeros con la distribución buscada

$g(u)$ es monótona en $u \in [0,1]$ $\Rightarrow$ es inversible

$g(u=0) = 1$
$g(u=1) = e$ $\Rightarrow$ $g(u) : [0,1] \to [1,e]$ que es el dominio de X