

# Estadística en Física Experimental (1<sup>er</sup> cuatrimestre de 2015)

Segundo Parcial 3 de Julio 2015

Resuelva cada ejercicio en hojas separadas

Escriba su Apellido y LU en cada hoja

Justifique los pasos y aproximaciones hechas (i.e., evitar los galerazos)

1. Se miden los momentos de una variable aleatoria  $X$  obteniendo  $E[X^n] = 3^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . A partir de la definición de función característica encuentre la distribución de  $X$ , y compruebe que valen esos momentos.

2. La distribución de Weibull tiene densidad de probabilidad:

$$f_X(x|\lambda, k) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right], \quad x \geq 0, k, \lambda > 0$$

- (a) Escriba las ecuaciones que permiten encontrar los estimadores de máxima verosimilitud para  $k$  y  $\lambda$ . ¿Puede encontrarlos analíticamente? ¿Y si supone  $\lambda = 1$  conocido?

Se propone otro camino usando el método de cuadrados mínimos.

- (b) Busque la función acumulativa:  $F_X(x; k, \lambda)$ . Asegúrese que cumpla los límites correctos.
- (c) A partir de ésta encuentre una función de  $F_X(x; k, \lambda)$  que dependa linealmente de  $k$ , esto es,  $g(F_X(x)) = ak + b$ . Halle los coeficientes  $a$  y  $b$ , para el caso  $\lambda = 1$ .
- (d) Se miden 4 valores de  $\{X_i\}_{i=1, \dots, 4}$ : 0.94, 2.51, 2.38, 0.26, desprecie el error en esta variable.
  - i. Dibuje a mano alzada la distribución acumulativa muestral.
  - ii. A partir del gráfico anterior construya cuatro pares de puntos  $\{x_i, \tilde{F}_X(x_i) \pm \sigma_i\}_{i=1, \dots, 4}$ , con valores de  $\tilde{F}_X(x_i)$  y de errores que crea razonables. Con estos, encuentre el valor del estimador de cuadrados mínimos de  $\hat{k}$  y su varianza.

3. AGATA es un sistema de detectores de fotones  $\gamma$  dispuestos en forma esférica cubriendo prácticamente un ángulo sólido de  $4\pi$  con una eficiencia nominal total del 50 %.

Por un pequeño orificio ingresa un haz de partículas aceleradas que impactan contra un blanco, al hacerlo, se producen núcleos exóticos excitados. Cuando estos núcleos decaen a su estado fundamental emiten entre 8 y 12 fotones  $\gamma$  con igual probabilidad.

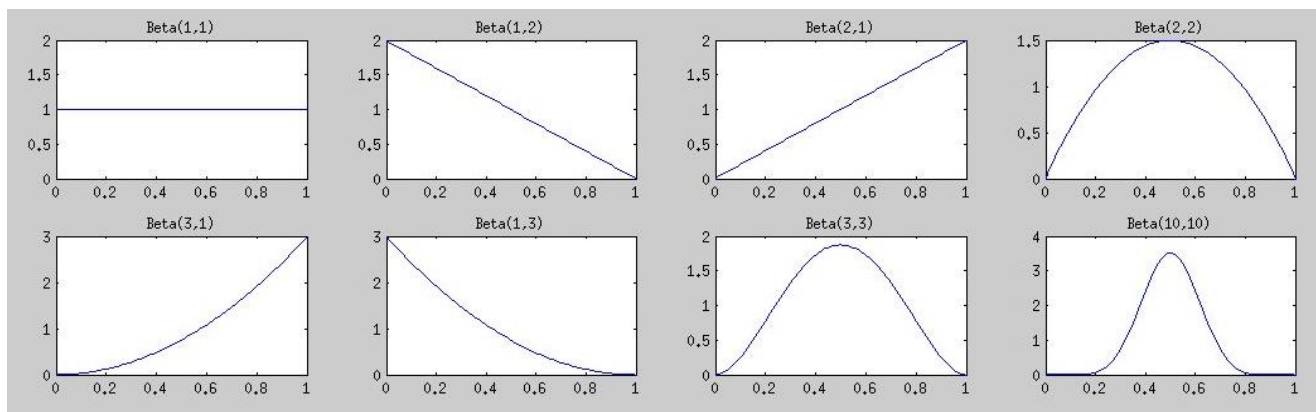
- (a) Use el teorema central del límite para calcular ¿cuál es la probabilidad de que habiéndose desexcitado 26 núcleos se emitan más de 290 fotones  $\gamma$ ? ¿Y menos de 208?

Se quiere establecer un intervalo de confianza del 90 % a dos colas para la eficiencia  $\varepsilon$  de todo el sistema. Sabiendo que de 1000 fotones  $\gamma$  emitidos AGATA detectó 678:

- (b) Indique las expresiones de las que despejaría los extremos para el intervalo frecuentista.
- (c) Indique las expresiones de las que despejaría los extremos para el intervalo bayesiano, incluyendo en el prior, *de alguna forma*, la eficiencia nominal conocida.

4. Una compañía produce tornillos micrométricos usados para microposicionadores de espejos. El paso del tornillo y el paso de la contratuerca tienen distribuciones  $N_X(\mu_x, \sigma_x = 60 \mu m/\text{vuelta})$  y  $N_Y(\mu_y, \sigma_y = 70 \mu m/\text{vuelta})$  respectivamente. Luego de analizar 50 pares, se encuentra que  $\bar{X} = 156 \mu m/\text{vuelta}$ ,  $\bar{Y} = 128 \mu m/\text{vuelta}$ . Se quiere testear la hipótesis  $H_0 : \mu_x = \mu_y$ . Construya un estadístico que ponga a prueba esta hipótesis (sea claro sobre cuál es el estadístico que usará para el test), dibuje la distribución del estadístico e indique la zona de rechazo, y encuentre el p-valor. Diga qué conclusión obtiene en base a las observaciones si la significancia es 5%. ¿De cuántas mediciones debería provenir este resultado para que la  $H_0$  sea rechazada para una significancia  $\alpha = 0.01$ ?

Datos útiles:



$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[it(x-a)] dt = \delta(x-a)$$

$$\frac{d}{dx} a^{g(x)} = a^k \ln a \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\hat{\theta} = [A^T V^{-1} A]^{-1} A^T V^{-1} \underline{y}$$