Guía 2, problema 9

Ítem a ¿Qué fracción de las cajas tendrán más de dos chips defectuosos? Esta fracción vendrá dada por la probabilidad

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(k>2) &= 1-(\mathbb{P}(k=0)+\mathbb{P}(k=1)+\mathbb{P}(k=2))\\ &= 1-\left(\binom{10}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^{0}\left(\frac{4}{5}\right)^{10}+\binom{10}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^{1}\left(\frac{4}{5}\right)^{9}+\binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{8}\right)\\ &= 0{,}322201.\end{aligned}$$

Ítem b ¿En qué fracción de las cajas se deberá probar los 10 integrados? En aquellas que sólo 1 de los 6 tomados al azar sea defectuoso:

$$\binom{6}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^{1}\left(\frac{4}{5}\right)^{5}=0{,}393216.$$

Ítem c Esto será

$$\mathbb{P}(3\text{ malos}|\text{aceptado})=\frac{\mathbb{P}(\text{aceptado}|3\text{ malos})\,\mathbb{P}(3\text{ malos})}{\sum_{n=0}^{10}\mathbb{P}(\text{aceptado}|n\text{ malos})\,\mathbb{P}(n\text{ malos})} \tag{1}$$

donde cada una de las probabilidades es

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0\text{ malos}) &= \binom{10}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^{0}\left(\frac{4}{5}\right)^{10}=0{,}107374\\ \mathbb{P}(1\text{ malo}) &= \binom{10}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^{1}\left(\frac{4}{5}\right)^{9}=0{,}268435\\ \mathbb{P}(2\text{ malos}) &= \cdots = 0{,}30199\\ \mathbb{P}(3\text{ malos}) &= 0{,}201327\\ \mathbb{P}(4\text{ malos}) &= 0{,}08808\end{aligned}$$

No calculo el resto pues de todos modos la probabilidad de que sea aceptada una caja con más de 4 chips defectuosos es nula. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{aceptada}|0\text{ malos}) &= 1\\ \mathbb{P}(\text{aceptada}|1\text{ malo}) &= 1\\ \mathbb{P}(\text{aceptada}|3\text{ malos}) &= \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{6}}{\binom{10}{6}}=0{,}0\hat{3}\\ \mathbb{P}(\text{aceptada}|4\text{ malos}) &= \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{6}}{\binom{10}{6}}=0{,}0047619\\ \mathbb{P}(\text{aceptada}|\text{más de 4 malos}) &= 0\end{aligned}$$

Estas últimas dos son las probabilidades de que ninguno de las defectuosos entren en las 6 iniciales, de otro modo, con 3 o 4 defectuosos en total se rechaza al revisar.

Si hay dos chips malos en la caja tenemos tres casos:

1. Que ninguno aparezca en los primeros 6, entonces se acepta la caja

$$p_1=\frac{\binom{2}{0}\binom{8}{6}}{\binom{10}{6}}=0{,}1\hat{3}.$$

2. Que uno de los dos entre en los primeros seis, entonces revisa el resto, encuentra uno más y acepta la caja

$$p_2=\frac{\binom{2}{1}\binom{8}{5}}{\binom{10}{6}}=0{,}5\hat{3}.$$

3. Que los dos entren en los primeros seis, entonces rechaza

$$p_3 = \frac{\binom{2}{6}\binom{8}{4}}{\binom{10}{6}} = 0.\hat{3}.$$

Notemos que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ y que $p_1 + p_2 = 1 - p_3 = p$ es $\mathbb{P}\left(\text{aceptado}|2 \text{ malos}\right) = 0.\hat{6}$.

Finalmente, usando (1), tenemos que

$$\mathbb{P}\left(3 \text{ malos}|\text{aceptado}\right) = \frac{0{,}0\hat{3} \times 0{,}201327}{0{,}584266} = 0{,}01148604.$$