SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 43-54

El problema de los dados del caballero de Méré: soluciones publicadas en el siglo XVII

El Caballero de Méré fue un filósofo y escritor que vivió durante el reinado de Luis XIV. En primer lugar, propuso lanzar un dado cuatro veces consecutivas y apostar que saldría por lo menos un seis; si el seis no saliese, entonces el oponente ganaría el juego. En el segundo juego, de Méré propone lanzar dos dados 24 veces y apostar que la pareja de seis aparecería por lo menos una vez. Estos dos juegos son llamados problemas de Méré. De Méré acudió a su amigo Blaise Pascal (1623-1662) y le planteó calcular la probabilidad de ganar en estos juegos. En este artículo son examinadas las soluciones propuestas en el siglo XVII.

Chevalier de Méré was a philosopher and a man of letters during the reign of Louis XIV. Firstly, he proposed to throw one die four times in a row and wagered that at least one six would appear; if no six turned up then the opponent won. In his second game, de Méré proposed to throw two dice 24 times and bet that two sixes would turn up at least once. Theses two games are called de Méré's problems. De Méré approached his friend Blaise Pascal (1623-1662) and asked him to calculate the probability of winning in theses games. In the current paper the three solutions given in the seventeenth century are examined.

A veces ha ocurrido en la historia de las matemáticas y, en particular, en la del cálculo de probabilidades. Un determinado problema se convierte en una especie de río donde vierten agua todos sus afluentes. El problema es la excusa para que diferentes autores en distintas épocas (muchos de ellos dedicados a otras ramas del saber) entren en este particular mundo del cálculo en el azar y aporten sus soluciones, sus experiencias en otras investigaciones, y su visión de la probabilidad y del campo donde se quiere aplicar. Se nos vienen a la mente problemas como *el de Los Tres Dados* (juego del Azar), que ya estaba presente en el Libro de Ajedrez de Alfonso X el Sabio, *El Problema de los Puntos*, *El Problema de la Ruina del Jugador*, *La Paradoja de San Petesburgo*, etc.

De Méré conocía que si apostaba por conseguir al menos un seis al lanzar un dado perfecto en 4 tiradas, había una ventaja a su favor de 671 contra 625, lo cual es cierto.

Uno de los problemas que podría formar parte de la categoría antes mencionada es el que podríamos llamar (de hecho así ha sido referenciado alguna vez) *El Problema de los Dados del Caballero de Méré*. Autores célebres de la historia temprana del Cálculo de Probabilidades lo abordaron con mejor o peor acierto. Así, podemos citar a Cardano, Huygens, Caramuel, Montmort, de Moivre, Bernoulli, Struyck o Simpson. En la correspondencia entre Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665) (que se produjo entre el verano y el otoño de 1654) este problema estuvo presente aunque, entre las cartas que se conservan de esta correspondencia, sólo encontramos una referencia al mismo, sin resolución alguna por parte de uno ni de otro, dándose a entender que ambos conocían perfectamente la solución y que no merecía la pena *perder el tiempo* con ella. En concreto, el problema lo encontramos en la carta que Pascal envió a Fermat el 29 de julio de 1654, donde se evidencia que había sido propuesto por el Caballero de Mére, amigo del primero.

En la carta, Pascal expone *una dificultad que asombraba mucho al caballero de Méré*. De Méré conocía que si apostaba por conseguir al menos un *seis* al lanzar un dado perfecto en 4 tiradas, había una ventaja a su favor de 671 contra 625, lo cual es cierto como comprobaremos más adelante. En cambio, si se intenta conseguir un *sonnez* con dos dados (o

Jesús Basulto Santos
José Antonio Camúñez Ruiz
Universidad de Sevilla. Sevilla

sea, obtener un seis doble al lanzar dos dados al mismo tiempo), hay desventaja al intentarlo en 24 tiradas. De Méré usaba el argumento de que 4 es a 6 (siendo 6 el número de posibles resultados al lanzar un dado) como 24 es a 36 (con 36 el número de posibles resultados al lanzar dos dados). Si con 4 lanzamientos de un solo dado hay ventajas a mi favor, ¿por qué no con 24 de dos dados? Y añade Pascal:

> Esto provocaba su gran escándalo, que le hacía decir a todo el mundo que las proposiciones no eran constantes y que la Aritmética es contradictoria.

En la carta, Pascal dice que no tiene tiempo de enviarle *la solución al problema que ha confundido al señor de Méré* y escribe *pero usted lo verá fácilmente por los principios que tiene*.

Es posible que De Méré tuviera dos reglas de cálculo que le llevaban a resultados contradictorios, razón por la cual le plantea el problema a Pascal.

La contestación de Fermat a esta carta ha desaparecido, por lo que no sabemos si en la misma abordó este problema. Como ya se ha dicho, en el resto de la correspondencia que se conserva entre ambos, no se vuelve sobre este asunto, con lo que no conocemos cuál fue *la solución* de Pascal, ni tampoco por qué de Méré conocía que, efectivamente, no hay ventajas en 24 tiradas de dos dados. Como veremos más adelante, la probabilidad de obtener al menos un *sonnez* en 24 tiradas es 0,4914. ¿La capacidad y la experiencia del Caballero como jugador llegaban a tal extremo como para intuir empíricamente que esa probabilidad es inferior a 0,5, es decir, que *no hay ventaja*? Lo dudamos. Probablemente de Méré tenía sus propias reglas de cálculo. Nos atrevemos a aventurar que, realmente, tenía dos *reglas de cálculo* que le llevaban a resultados contradictorios, razón por la cual se lo plantea a Pascal.

Una presentación formal del problema en sí puede ser la siguiente:

Conociendo la probabilidad que un jugador tiene de conseguir éxito en una partida, ¿qué número de partidas garantiza al mismo una probabilidad igual de conseguir al menos un éxito que de no conseguirlo (o sea, una probabilidad 0,5 de conseguirlo)?

Se supone que las partidas son independientes entre sí, de forma que el resultado de cada una de ellas no altera los resultados futuros (el jugador no va aprendiendo conforme se va desarrollando el juego), lo cual queda perfectamente representado en un juego de puro azar como el lanzamiento de una moneda equilibrada o de un dado no trucado. Por tanto, el problema plantea la determinación del número de lanzamientos que producen el equilibrio: cuando coinciden las probabilidades de ganar y perder, con lo que, la idea de *juego justo* tan presente en todos los autores de la historia temprana de la probabilidad subyace como razón de ser del mismo.

Una resolución actual del problema sería la siguiente:

Si p y q son las probabilidades de éxito y fracaso, respectivamente, que tiene el jugador en cada partida con, lógicamente, $p + q = 1$, y si n es el número buscado de partidas, la solución se encuentra despejando n en la igualdad:

P[éxito en la 1ª partida] + P[fracaso en la 1ª y éxito en la 2ª] + P[fracaso en la 1ª y 2ª y éxito en la 3ª] + ... + P[fracaso en las n-1 primeras partidas y éxito en la n-ésima] = ½

O sea, $p + qp + q^2p + ... + q^{n-1}p = ½$, lo que es lo mismo que $(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1})p = ½$, donde la suma del primer miembro es la de una progresión geométrica limitada de razón q, y teniendo en cuenta que $p = 1 – q$, la igualdad anterior se reduce a $1 – q^n = ½$, o bien, $q^n = ½$. El valor de n que satisface esa igualdad es la solución buscada. Bajo forma logarítmica tendríamos

$$n = -\frac{\ln 2}{\ln q}$$

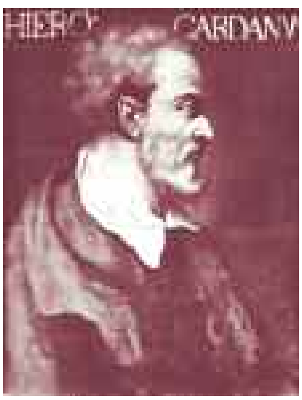
¿Es didáctico mostrar lo que intentaron nuestros clásicos a la hora de resolver problemas tan conocidos en la historia de esta disciplina?

Realmente, estamos usando la modelización probabilística conocida como Modelo Geométrico de parámetro p, que mide el número de experimentos independientes de Bernoulli hasta conseguir el primer éxito. El primer miembro de la igualdad anterior es la Función de Distribución de este modelo, que viene dada por $F(x) = 1 – q^{[x]}$, lo que nos lleva de nuevo a $1 – q^n = ½$.

Este problema se fue generalizando con el discurrir de la historia y, así, leemos como enunciado más universal encontrar el número de partidas que debe disponer un jugador para intentar conseguir al menos c éxitos con una probabilidad igual de conseguirlo que de no conseguirlo. Como veremos, Huygens hará esta generalización para el caso de $c = 2$.

Cuando un estudiante está iniciándose en el cálculo de probabilidades, disponiendo de un bagaje matemático básico como el que ya tiene en el bachillerato, creemos interesante que él mismo aborde la resolución de problemas como éste. Se puede aprovechar, entonces, para describirle el contexto en el que se plantea por primera vez en la historia conocida de este cálculo (probablemente, el problema es más antiguo de lo que conocemos) y, usando la táctica de aprendizaje a partir del error o a partir de los intentos de resolución de los primeros autores, podemos conseguir, creemos, una motivación añadida en el alumno. ¿Es didáctico mostrar lo que intentaron nuestros clásicos a la hora de resolver problemas tan conocidos en la historia de esta disciplina? Creemos que sí, y esta razón justifica el análisis de lo que algunos de ellos hicieron en este contexto. Así pues, el objetivo de este trabajo es describir las primeras resoluciones publicadas de este problema, las cuales aparecieron en el siglo XVII. En este siglo es cuando comienzan a publicarse los primeros libros sobre el cálculo bajo el dominio del azar, y tres autores incluyeron en sus publicaciones la resolución de este problema: el italiano Girolamo Cardano (cuyo texto aunque escrito sobre 1540 no fue publicado hasta mucho después de su muerte, en 1663), el holandés Christiaan Huygens (cuyo pequeño tratado fue publicado en latín en 1657, y en holandés en 1660) y el español Juan Caramuel (cuya obra enciclopédica sobre matemáticas fue publicada en 1670 y en ella se incluía un fragmento dedicado al cálculo que estaba naciendo). En ese orden serán analizadas sus soluciones en los siguientes epígrafes. Para los dos últimos ya existía el precedente de la resolución del Problema de los Puntos o Regla de los Repartos para Juegos Inacabados, conocida a partir de la correspondencia entre Pascal y Fermat, cuyos principios y métodos fueron guía y fuente de inspiración para los autores posteriores, como se comprueba en la forma de resolver el problema que nos ocupa por parte de Huygens y Caramuel.

Cardano



Girolamo Cardano (1501 – 1576), médico, matemático, filósofo, escritor, astrólogo, jugador,… dejó como manuscrito sin publicar el *Liber de Ludo Aleae* (Libro de Juegos de Azar) que fue impreso por primera vez, después de su muerte, en el año 1663, en el primer volumen de las obras completas de este autor.

En este texto encontramos 8 capítulos dedicados a introducir reglas de cálculo en juegos de azar. En el capítulo 6, el autor establece un principio básico:

> En todo juego el principio más fundamental es simplemente la igualdad de condiciones, esto es, de los contrincantes, de los mirones, del dinero, de la situación, del cubilete y del mismo dado. En la medida en que usted se aparte de la igualdad, si es a favor de su contrincante, usted es tonto, y si es al suyo propio, usted es injusto.

Como ya se ha comentado, y como se puede observar cuando se estudian a los primeros autores del cálculo de probabilidades, la idea de juego justo, de la equidad, está siempre presente como principio y guía para el cálculo. Así, Bellhouse (2005) mantiene que la idea aristotélica de justicia está presente en el trabajo de Cardano.

> *Al final del* Liber de Ludo Aleae *encontramos muchas secciones enteramente lúcidas, mostrándonos un Cardano que conoce perfectamente el juego y que acaba entrando en los dominios del cálculo en el azar.*

Hay autores que, al hablar sobre la parte probabilística del *Liber de Ludo Aleae*, se quejan de lo difícil de su lectura. Todhunter (1865) resume sus impresiones en una nota de desesperación: *El tratado está tan mal escrito que apenas resulta inteligible*. Se puede asentir que ciertas secciones del libro no son comprensibles al estudiarlas por primera vez; algunos de los pensamientos de Cardano sólo surgen después de mucho análisis y usando información sobre reglas de juegos de su época, muchas de ellas desconocidas hoy. Pero el esfuerzo que se dedique al estudio del libro es recompensado; al final encontramos muchas secciones enteramente lúcidas, mostrándonos un Cardano que conoce perfectamente el juego y que acaba entrando en los dominios del cálculo en el azar.

Una razón por la que resulta confuso el tratado, en cuanto a sus argumentos probabilísticos, está en el hecho de que, para algunos casos, el autor hace uso de dos métodos de cálculo distintos. El primero es nuestro método estándar para hallar una probabilidad, recuento directo de los resultados favorables frente al total de posibles. Siempre que usa este procedimiento sus cálculos son correctos. El segundo método parece representar lo que fue su primera aproximación a estos problemas. Es el que Ore (1953) llama *razonamiento sobre la ganancia media*. La lectura del texto nos hace pensar que recurre a este método en los problemas que le resultan más difíciles. El mismo, en general, es fácil de aplicar, pero sus aproximaciones a la solución correcta resultan poco afinadas. El mismo Cardano era consciente de que los resultados obtenidos de esta forma no coincidían con los resultados correctos, pero no era capaz de dar explicaciones satisfactorias a las discrepancias; algunas de sus oscuras elucidaciones en este contexto podrían estar influidas por el problema de intentar conseguir armonizar los dos puntos de vista.

Para explicar este *razonamiento sobre la ganancia media* consideramos el lanzamiento de un dado, caso donde el autor lo introduce por primera vez. La probabilidad que tiene una cara cualquiera de aparecer en un único lanzamiento es $\frac{1}{6}$. Entonces, Cardano argumenta que dos lanzamientos producirían $2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ de probabilidad de conseguir el punto deseado, y en tres lanzamientos dicha probabilidad sería $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. El valor correcto de la probabilidad de que un punto concreto (por ejemplo, un as) aparezca una vez, y sólo una, en tres lanzamientos consecutivos de un dado es $\frac{75}{216}$, y la probabilidad de que aparezca al menos una vez es $\frac{91}{216}$, por lo que en ninguno de los casos se da el resultado de Cardano.

Es obvio que el razonamiento de la ganancia media produce, en general, resultados erróneos, como enseguida se comprende. Por ejemplo, para 6 lanzamientos esto implicaría que el seis aparecería con seguridad, e incluso llevaría a probabilidades mayores que uno para más de 6 lanzamientos. Realmente, Cardano está calculando la media o esperanza de una variable aleatoria de tipo binomial, con probabilidad de éxito igual a $\frac{1}{6}$ y con n igual al número de lanzamientos, y él convierte dicha media en probabilidad. Ese es su error.

En el capítulo 11 del Liber aparece el problema que más de un siglo después será planteado por De Méré a Pascal. En el ejemplo que ambos citan, Cardano y De Méré, el jugador lanza dos dados varias veces consecutivas hasta que consigue doble seis.

Cardano no encuentra la solución correcta del problema dado que recurre al razonamiento sobre la media que, según el ejemplo de arriba, da lugar al siguiente argumento: sea p la probabilidad de éxito en una prueba individual. Si se realizan n intentos la probabilidad de conseguir éxito sería np (como ya se ha dicho, esto no es una probabilidad, es una esperanza). Si este número se iguala a $\frac{1}{2}$ se producirá la *igualdad*, esto es, tendría igual chance de tener éxito o de fracasar. Entonces, el correspondiente número de intentos sería $n = 1/2p$.

Cardano aplica ese resultado a algunos ejemplos. Así, si uno lanza dos dados hasta que aparece el doble seis, cuya probabilidad es $\frac{1}{36}$, entonces el número de partidas necesarias, según su criterio es 18. El valor correcto se encuentra entre 24 y 25, por lo que la aproximación de Cardano no es especialmente buena. Y si lanzamos un solo dado hasta que sale el seis, cuya probabilidad es $\frac{1}{6}$, el número buscado según Cardano es 3, resultado que él ya había presentado en su capítulo 9 y que se aproxima más que el anterior al valor correcto, dado que éste se encuentra entre 3 y 4.

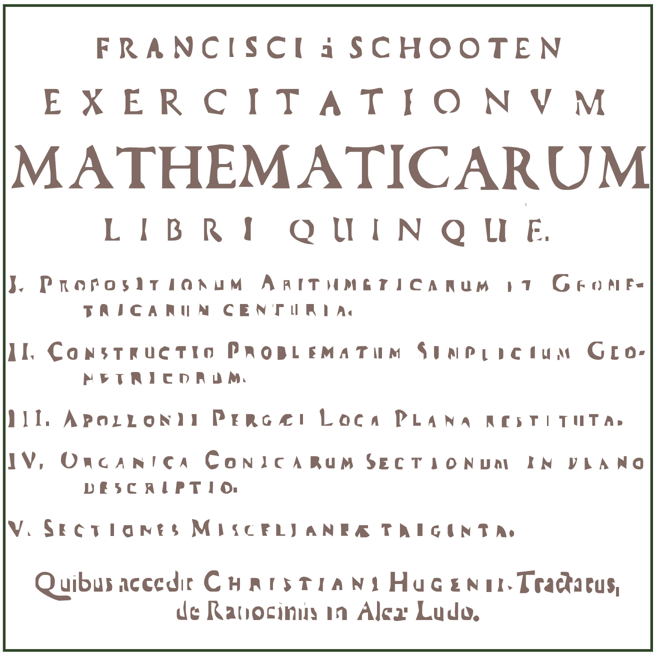
Huygens

Christiaan Huygens (1629 – 1695), científico holandés con aportaciones muy importantes a la física y a la astronomía a lo largo de su rica vida científica. En 1655, cuando sólo tenía 26 años, se traslada a Francia para recibir un doctorado en leyes en la Universidad Protestante de Angers, estableciéndose en París entre julio y noviembre de aquel año. Allí tuvo conocimiento de la correspondencia entre Pascal y Fermat que se había producido un año antes, accediendo a los problemas resueltos por ambos y a los métodos empleados en sus resoluciones, aunque el acceso no fue directo, sino, quizás, a través de comentarios en tertulias científicas.

> De Ratiociniis in Ludo Aleae *estaba destinado para ser incorporado como apéndice de una gran obra que su maestro van Schooten quería publicar.*

A su vuelta a Holanda escribió *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Calculando en juegos de azar), un pequeño tratado donde se resuelven los problemas sobre juegos de azar que flotaban en el ambiente en aquellos momentos. Estaba destinado para ser incorporado como apéndice de una gran obra que su maestro van Schooten quería publicar. Esa obra, y en particular el tratado de Huygens, fue publicada en latín en 1657. En la carta al lector que aparece al principio del tratado, van Schooten presenta este tratado como una oportunidad más de mostrar *las aplicaciones de este arte* (el álgebra), el cual había enseñado hacía algún tiempo a su discípulo: en ese momento estaba en juego la aplicabilidad universal de la recién creada Ars Analítica. La carta de Huygens, que sirve de prefacio, también es empleada para enfatizar *la grandeza del campo sobre el cual se extiende nuestro Arte Algebraico*. Y para reforzar el argumento añade:

> …cuanto más difícil parece determinar por la razón lo que es incierto y sometido al azar, tanto más admirable parecerá la ciencia que consiga este resultado.



FRANCISCI à SCHOOTEN
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM
LIBRI QUINQUE.

I. Propositionum Arithmeticarum et Geometricarum centuria.

II. Constructio Problematum Simplicium Geometricorum.

III. Apollonii Pergæi Loca Plana restituta.

IV. Organica Conicarum Sectionum in plano descriptio.

V. Sectiones Miscellaneæ triginta.

Quibus accedit Christiani Hugenii Tractatus, de Ratiociniis in Aleæ Ludo.

Índice del libro V de van Schooten donde se incluye en el último apartado el Tratado de Christaan Huygens

¿No será grande una ciencia, si ésta consigue dominar el azar?

El pequeño tratado se convirtió en el primer trabajo impreso sobre cálculo de probabilidades y referencia básica para los autores que en los inicios del siglo XVIII irrumpieron tan arrolladoramente en la consolidación del mismo.

En el tratado, Huygens establece el principio que debe regir lo que él entendía por juego justo. A partir del mismo, demuestra 14 proposiciones, en las que las tres primeras definen las bases del cálculo. Desde la 4ª a la 9ª están dedicadas a aportar diversas formas y soluciones del Problema de los Puntos, y las últimas a problemas de los que nos interesan en este trabajo.

Las proposiciones básicas son introducidas para efectuar valoraciones de juegos o loterías simples a través de la esperanza matemática. De esta forma, cuando después el autor tropieza con loterías compuestas, para llevar a cabo la valoración de las mismas procede a la sustitución de las simples por sus respectivas esperanzas. O sea, sustituye la situación de incertidumbre que supone una lotería por la valoración de la misma. Es lo que hoy día se conoce como *equivalente cierto* (Basulto, Camúñez y Domínguez, 2002). De las tres proposiciones básicas, exponemos aquí el enunciado de la tercera por ser la que el autor usó después para resolver el problema que nos ocupa:

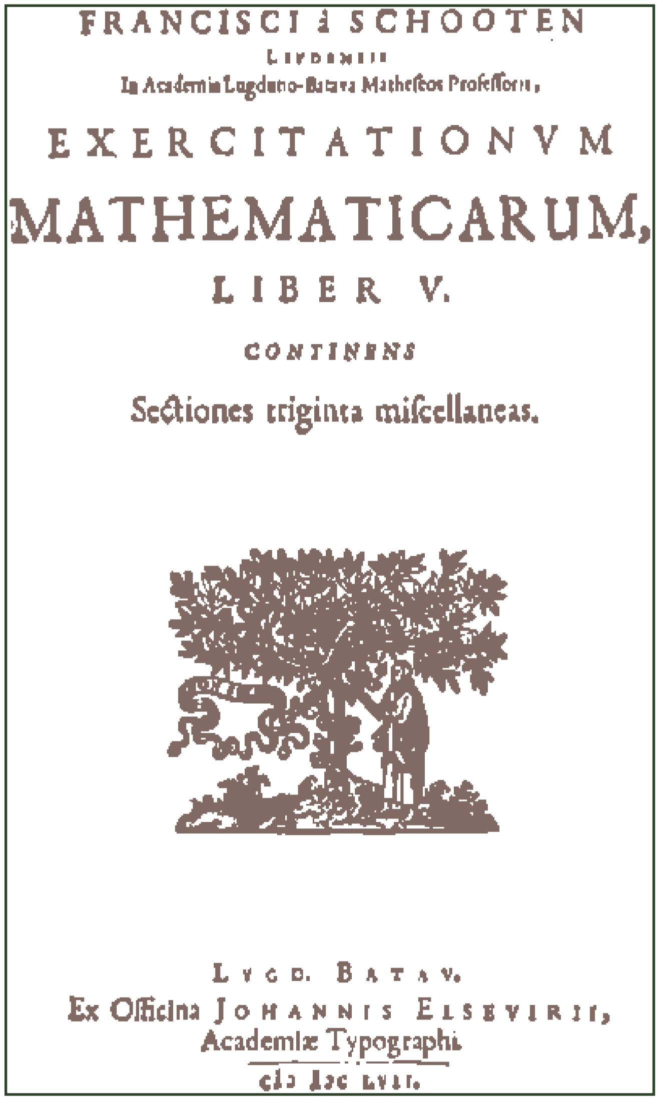
> Siendo p el número de casos en que me puede corresponder a y q el número de casos en que puede hacerlo b, asumiendo que todos los casos son igualmente posibles, mi esperanza será igual a $(pa + qb)/(p+q)$.

Vemos pues que, en esta proposición, se valora una lotería con dos posibles resultados o *premios* y con probabilidades distintas.

En las *proposiciones 10, 11 y 12*, Huygens enuncia y resuelve los problemas que nos ocupan. La *proposición 10* tiene el siguiente enunciado:

Encontrar en cuántas veces se puede aceptar lanzar un seis con un dado.

O sea, analiza en primer lugar el caso que sí conocía el Caballero de Méré. Estudiemos este caso. Nos planteamos ¿qué número mínimo de lanzamientos será necesario para garanti-

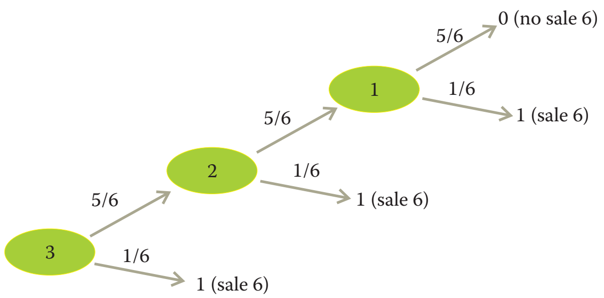


FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM,
LIBER V.
CONTINENS
Sectiones triginta miscellaneas.

LVGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiæ Typographi.
CIↃ IↃC LVII.

zar que exista ventaja para el jugador, que la probabilidad de obtener al menos un seis en esos lanzamientos sea superior a 0,5?

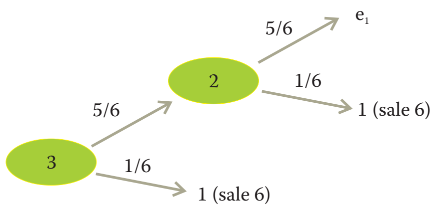
Para resolverlo, el autor construye una ecuación recurrente de valoraciones o esperanzas del jugador que lanza, en los distintos lanzamientos que va a efectuar. Veamos cómo lo hace con un ejemplo. Pensemos en un juego en el que se va a efectuar hasta un máximo de tres lanzamientos de un dado perfecto (hasta un máximo de tres partidas), y en el que un jugador, que ya hemos identificado como *jugador que lanza*, ganará el juego y, por tanto, se detendrán los lanzamientos, si en uno de ellos sale un seis. Si han transcurrido los tres lanzamientos y no ha conseguido el seis, el jugador que lanza pierde el juego. En cada lanzamiento definimos una variable tipo Bernoulli, que toma el valor 1, *éxito* (sale el seis) con probabilidad $1/6$ y 0, *fracaso*, (no sale el seis) con probabilidad $5/6$. Representamos el juego con el siguiente diagrama, en el que se han enumerado las partidas en sentido contrario a la ocurrencia cronológica de las mismas.



Usando su *proposición 3*, Huygens valora la partida número 1 de este juego. Si el premio es 0 (si pierde la partida) y 1 (si la gana), el valor esperado de esta partida para el jugador que lanza es

$$e_1 = \frac{5}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6}$$

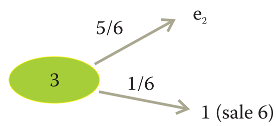
A continuación, Huygens sustituye la partida número 1 por su valoración e_1. El esquema muestra la nueva situación.



Entonces, la valoración de la segunda partida para el jugador que lanza (usando de nuevo la *proposición 3*) es

$$e_2 = \frac{5}{6}\cdot e_1 + \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{5}{6}\cdot e_1 + \frac{1}{6}$$

En el siguiente paso, Huygens sustituye esa segunda partida por su valoración y consigue así el valor esperado de la tercera. El esquema refleja la nueva sustitución.



Obtiene entonces

$$e_3 = \frac{5}{6}\cdot e_2 + \frac{1}{6}$$

Generalizando, el autor obtiene la ecuación recurrente

$$e_{n+1} = \frac{5}{6}\cdot e_n + \frac{1}{6}$$

donde

$$e_1 = \frac{1}{6}.$$

que permite calcular la esperanza o valoración del jugador que lanza, de la partida $(n+1)$-ésima a partir de la n-ésima. O sea, esa ecuación relaciona los valores esperados de dos partidas consecutivas.

La ecuación puede resolverse por sustituciones sucesivas, obteniéndose e_n como la suma de los términos de una progresión geométrica finita de razón $5/6$. La solución que se obtiene es

$$e_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

o bien

$$e_n = \frac{6^n - 5^n}{6^n}$$

Una vez obtenido e_n, Huygens construye tres funciones sobre los enteros positivos asociadas al caso de n partidas o lanzamientos en el juego:

$f(n)$ = número de alternativas favorables al jugador que lanza.
$g(n)$ = número total de alternativas.
$h(n)$ = número de alternativas desfavorables al jugador que lanza.

Y concluye que $f(n) = 6^n - 5^n$, $g(n) = 6^n$ y $h(n) = 5^n$.

Sea ahora n_0 el número mínimo de lanzamientos tal que el número de alternativas favorables al *seis* supere al de las desfavorables. Se ha de verificar $f(n_0) \geq h(n_0)$. Esa desigualdad conduce a $6^{n_0} \geq 2 \cdot 5^{n_0}$. En la tabla siguiente mostramos los valores que toman los dos miembros de esta desigualdad para los sucesivos números de lanzamientos y comprobamos que $n_0=4$, o sea, que para 4 lanzamientos se produce el cambio de sentido en la desigualdad, con lo que, con 4 lanzamientos consecutivos de un dado hay ventajas para el jugador que apuesta a obtener al menos un seis.

N.º de lanzamientos n	$2 \cdot 5^n$	Total de alternativas 6^n	Alternativas favorables $6^n - 5^n$	Alternativas desfavorables 5^n
1	10	6	1	5
2	50	36	11	25
3	250	216	91	125
4	1250	1296	671	625

En el último caso, para 4 lanzamientos, el número de alternativas favorables al jugador es $f(4) = 6^4 - 5^4 =671$, el total de alternativas es $g(4) = 6^4 = 1296$, y el número de alternativas desfavorables es $h(4) = 5^4 =625$, coincidiendo estos resultados con los expresados por el caballero de Méré. La tabla siguiente es la que, realmente, Huygens presentó como solución a este problema.

Número de lanzamientos	Chance del primero al segundo
1	1 a 5
2	11 a 25
3	91 a 125
4	671 a 625 (más de 1 contra 1, añade Huygens)
5	4651 a 3125 (aproximadamente 3 a 2)
6	31031 a 15625 (aproximadamente 2 a 1)

En la proposición 11, Huygens estudia este problema pero cuando se lanzan dos dados a la vez y se quieren conseguir dos *seises* (el caso cuya solución *escandalizaba* al Caballero de Méré). La resolución es idéntica, reemplazando las chances 1 y 5 anteriores con un lanzamiento de un dado, por las chances 1 y 35 por un lanzamiento con dos dados, lo que le da, como valoración del primer lanzamiento para el primer jugador, $\frac{1}{36}$ (entre los 36 posibles lanzamientos de dos dados sólo hay 1 que favorece al jugador que lanza), o bien, $e_1 = \frac{1}{36}$, en términos de esperanza del primer jugador, si el total apostado es 1, siendo esta cantidad para el que gana y 0 para el que pierde. Para dos lanzamientos (de los dos dados a la vez), Huygens encuentra como relación entre las esperanzas del jugador que lanza la ecuación recurrente

$$e_2 = \frac{35}{36} e_1 + \frac{1}{36}$$

donde sustituyendo e_1, tenemos el resultado $e_2 = \frac{71}{1296}$: esperanza del jugador que lanza los dos dados apostando por obtener el doble seis en dos lanzamientos consecutivos y cuando la apuesta total es 1. Podemos interpretar la cantidad anterior en términos de probabilidades de ganar de ambos jugadores, o parafraseando a Huygens, la relación entre las chances de ambos jugadores es como 71 (para el que lanza) a 1225, o sea 1296 – 71, para el otro jugador. Por tanto, la opción de dos lanzamientos sigue siendo muy desfavorable para el jugador que lanza.

Llegado a este punto, Huygens observa que necesita acelerar la recurrencia para no hacer los cálculos excesivamente tediosos.

Entonces, utiliza los números anteriores, 71 y 1225, para saltar de la situación de 2 lanzamientos con los dados a la de 4. Señala que el recorrido desde e_4 hasta e_2 es similar al de e_2 hasta el final. Usando las chances de este último recorrido concluye que el jugador que lanza tiene 1225 posibilidades de llegar a e_2 y 71 de ganar. Obtiene entonces

$$e_4 = \frac{1225}{1296} e_2 + \frac{71}{1296} = \frac{178991}{1679616}$$

por lo que las chances de ambos están en la relación 178991 a 1500625, pues 1500625 = 1679616 – 178991.

Después informa que ha usado este método para encontrar e_8, e_{16} y e_{24}, y que, en el último las chances son ligeramente menores que 1:1 (*tiene aún una ligera desventaja*), mientras que con 25 ya hay ventaja para el primer jugador, pues las chances son superiores a 1:1. Escribimos de nuevo la ecuación recurrente que está planteando:

$$e_{n+1}=\frac{5}{36}e_n+\frac{1}{36},\quad e_1=\frac{1}{36},\quad n=1,2,\ldots$$

Con esta termina lo que Huygens explica sobre este caso. Completamos nosotros la resolución del problema añadiendo las funciones *f*, *g* y *h* que Huygens construyó para el caso anterior: $f(n) = 36^n - 35^n$, $g(n) = 36^n$ y $h(n) = 35^n$.

También deducimos que el número mínimo de lanzamientos, n_0, para que haya más alternativas favorables al seis doble que en contra, debe verificar la desigualdad $36^{n_0} \geq 2\cdot 35^{n_0}$.

En la tabla siguiente comprobamos que dicho número mínimo ha de ser 25, y no 24 como argumentaba el caballero de Mére. No presentamos las potencias exactas, sino aproximaciones en las que aparecen las primeras cifras, puesto que son suficientes para efectuar las comparaciones.

N.º de lanzamientos del gran dado	36^n	$2 \cdot 35^n$
24	$2{,}24 \cdot 10^{37}$	$2{,}28 \cdot 10^{37}$
25	$8{,}08 \cdot 10^{39}$	$7{,}99 \cdot 10^{39}$

Así, la probabilidad de obtener al menos un *seis doble* en 24 tiradas es

$$\frac{36^{24}-35^{24}}{36^{24}}=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0'49140388\ldots$$

Mientras que la de obtenerlo en 25 tiradas es

$$\frac{36^{25}-35^{25}}{36^{25}}=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{25}=0'50553154\ldots$$

En la *proposición 12*, Huygens presenta el siguiente problema:

> Encontrar el número de dados con el que se puede aceptar lanzar 2 seises en la primera tirada.

O sea, con cuántos dados apostaría un jugador con ventaja, a conseguir dos *seis* en un solo lanzamiento de todos ellos. Esto es, obviamente, una generalización de las *proposiciones 10 y 11*. Huygens reformula el problema como sigue:

> Encontrar cuántas tiradas de un dado son necesarias para tener al menos una chance igual de conseguir dos seises.

En términos de esperanza, sea e_n la del *jugador que lanza* cuando apuesta que conseguirá al menos 2 seises en *n* lanzamientos. Hablando en términos de probabilidad, Huygens plantea la siguiente ecuación recurrente para resolver este problema: *La probabilidad de obtener al menos 2 seises en n+1 lanzamientos es igual al producto de la probabilidad de obtener al menos 1 seis en primer lanzamiento por la probabilidad de obtener al menos 1 seis en los n lanzamientos últimos más la probabilidad de no obtener seises en el primer lanzamiento por la probabilidad de obtener al menos 2 seises en los n lanzamientos últimos.*

Observamos que la última probabilidad del segundo miembro es la misma que la del primer miembro pero con *n* lanzamientos en lugar de *n* + 1. Ahí está la clave de la ecuación recurrente que Huygens obtiene para este problema. Además, la probabilidad de obtener al menos un seis en n lanzamientos es la complementaria de la de no obtener ninguno en esos lanzamientos, o sea:

$$P\begin{bmatrix}\text{obtener al menos 1 seis en los}\\ n\text{ lanzamientos últimos}\end{bmatrix}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Si la apuesta es 1, la probabilidad se convierte en esperanza del jugador que lanza y la ecuación recurrente de Huygens toma la forma

$$e_{n+1}=\frac{1}{6}\cdot\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)+\frac{5}{6}e_n$$

lo que, partiendo de $e_2 = 1/36$, encuentra $e_3 = 16/216$, y así hasta e_{10}, que es ligeramente superior a 0,5. Escribe:

> …tomando así cada vez un lanzamiento más, se encuentra que se puede aceptar con ventaja cuando el número de lanzamientos es 10. O sea, con *n* = 10 dará una ventaja ligeramente superior a 1:1.

Con esto termina lo que Huygens aporta a la resolución del problema que nos ocupa en su tratado. Hemos de notar que, como se ha visto, Huygens no utiliza logaritmos para facilitar el cálculo. Korteweg (1920) señala que ese hecho ha impedido a Huygens la generalización del problema. Se pregunta

> *¿Por qué Huygens se limitó en su tratado de 1657 al caso de uno y dos dados y no ha sabido resolver el problema en este último caso nada más que por unos cálculos que debían ser bastante penosos?*

Y añade

> Es cierto que el cálculo de los logaritmos no parece haber formado parte de los cursos enseñados por van Schooten y que se encuentra en los manuscritos de Huygens, alguno escrito antes de 1661… Sin embargo, parece inadmisible que Huygens no haya tenido conocimiento antes de 1657 de una rama tan importante de la matemática, sin duda bien conocida en Holanda por los trabajos de Vlack[1].

Caramuel

Juan Caramuel y Lobkowitz (1606 – 1682), nacido en Madrid, estudia humanidades y filosofía en la Universidad de Alcalá y a los 17 años inicia la carrera eclesiástica ingresando en la orden del Cister. Pasa varios años en los Países Bajos donde recibe una elevada formación matemática. Publica tratados sobre matemáticas y arquitectura y fallece siendo obispo de Vigevano, a unos 50 kilómetros de Milán.

Caramuel se nos muestra como un hombre enciclopédico, que aborda todas las disciplinas del saber con pasión y con dignidad, aunque sin someterse a ninguna escuela o argumento de autoridad. A veces, se nos presenta como un rebelde para la ciencia. Para uno de sus enemigos

> tenía Caramuel ingenio como ocho, elocuencia como cinco y juicio como dos.

IOANNIS CARAMVELIS
MATHESIS
BICEPS.
VETVS, ET NOVA.

IN OMNIBVS, ET SINGVLIS

ACCEDENT ALII TOMI, VIDELICET:

CAMPANIAE.

Caramuel se propuso escribir un curso completo de todas las matemáticas de su tiempo en 1667 y, durante tres años, dedica un arduo esfuerzo a este asunto, que se vio culminado con la publicación en 1670 de Mathesis biceps. Vetus et nova.

Un hombre así no podía dejar pasar la oportunidad de ofrecer su particular visión sobre el cálculo naciente en juegos de azar.

Este autor se propuso escribir un curso completo de todas las matemáticas de su tiempo en 1667 y, durante tres años, dedica un arduo esfuerzo a este asunto, que se vio culminado con la publicación en 1670, en la imprenta de su obispado, en Campania, de una monumental obra, en dos volúmenes, titulada *Mathesis biceps. Vetus et nova*. La misma está dividida en 10 sintagmas, 4 en el primer volumen y 6 en el segundo. Sus 1800 páginas constituyen una auténtica enciclopedia de las matemáticas, recogiéndose en ella todos los conocimientos matemáticos de los antiguos, las aportaciones de los modernos y sus propias contribuciones a esta ciencia. Para Franklin (2001) esta obra constituye el *compendio más completo de la ciencia matemática publicada hasta aquel momento.*

En el *Sintagma VI*, nuestro autor estudia la Combinatoria, tema al que ya había dedicado algún esfuerzo en su anterior obra, *Mathesis audax*. Caramuel sigue el estudio anterior de Sebastián Izquierdo[2], a quien cita muchas veces. Pero la combinatoria es para Caramuel algo más, es la ramificación del *ars lulliana* que más validez conserva. Considera la combinatoria como un instrumento indispensable para estudiar cualquier disciplina, como lo muestra el apartado incluido en este sintagma, el *Kybeia*[3], fragmento que nos interesa, pues es el que dedica a estudiar los juegos, dando una visión bastante interesante sobre el origen de los mismos, e introduciendo sus principios que servirán de base para llevar a cabo los cálculos necesarios en la resolución de problemas.

Kybeia ocupa las páginas 972-995 del segundo volumen de *Mathesis biceps*, o sea, apenas 24 páginas, de las que las ocho últimas están dedicadas a reproducir el tratado de Huygens que Caramuel, erróneamente, atribuye al astrónomo danés, Christiaan Severin Longomontanus.

Igual que sus antecesores, lo primero que se plantea Caramuel es definir la situación de equidad en el juego y, por tanto, establecer lo que para él era un *juego justo*. Introduce el término *peligro*, tan español, como sinónimo del más actual *riesgo*. Y también, el término *esperanza* como lo contrario de peligro. Como primer principio establece que *en una partida no sólo debe saberse de antemano si existe peligro, sino también cuánto. Pues la cantidad de dinero a arriesgar depende de la cantidad de peligro*. O sea, a mayor peligro menos dinero a apostar.

El artículo III de Kybeia *está dedicado a la resolución de problemas del tipo de los del Caballero de Méré. Ahora bien, sólo trata los casos en los que se lanza un único dado, que son los recogidos por Huygens en su proposición 10.*

Se propone, por tanto, medir la cantidad de esperanza y peligro que tiene cada jugador y definir su apuesta en función de ello. Como uno de sus ejemplos ilustrativos, introduce el caso de un jugador que lanza dos dados al mismo tiempo y se propone conseguir un determinado resultado. Para este caso presenta una tabla con las *esperanzas* y *peligros* de dicho jugador, equivalentes a lo que hoy llamamos *casos favorables* y *casos desfavorables* y, entonces, añade una tabla de apuestas en situaciones de desigual probabilidad. Así, de manera implícita está construyendo una tabla con las probabilidades de obtener los diferentes resultados al lanzar dos dados. Nos dice que si, por ejemplo, un jugador apuesta a que la suma de las puntuaciones de los dos dados al ser lanzados será 7, entonces, este jugador tiene 6 esperanzas (6 resultados favorables) y 30 peligros (30 posibles lanzamientos de dos dados que no suman 7) por lo que, si el jugador apuesta una moneda, el que apuesta en su contra ha de poner cinco (en la proporción de 6 a 30).

El *artículo III* de *Kybeia* está dedicado a la resolución de problemas del tipo de los del Caballero de Méré. Ahora bien, sólo trata los casos en los que se lanza un único dado, que son los recogidos por Huygens en su *proposición 10*. Como veremos, aunque los resultados que da Caramuel son correctos, su forma de resolución es algo distinta a la de Huygens.

En el primer número del *artículo III* encontramos el caso más sencillo: el jugador quiere lanzar un cinco tirando el dado una sola vez. Para el jugador que lanza, la proporción entre esperanza y peligro es de 1 a 5 (su probabilidad de ganar el juego es $\frac{1}{6}$). Se pregunta nuestro autor, si el jugador ganase 12 doblones por conseguir ese éxito, ¿cuánto ha de pagar por participar en ese juego? Una sexta parte, o sea, 2 doblones.

Después resuelve el caso en el que el jugador intenta conseguir un éxito en dos pruebas. Sabemos que dicha probabilidad es

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{36}$$

Caramuel obtiene este mismo resultado razonando sobre lo que deben apostar tanto el que lanza como quien le reta *para que se observe una equidad y, de este modo, la diferencia en la apuesta se fije conforme a la desigualdad establecida en el peligro*.

Supongamos que el total apostado es de 36 monedas. Si en el primer lanzamiento el jugador que lanza obtuviese éxito, se llevaría las 36 monedas, si no, le queda aún un lanzamiento más cuya probabilidad es $\frac{1}{6}$. Nos dice el autor que este jugador sólo se juega ganancia en el primer lanzamiento: o bien lo gana todo (y no se efectúa el segundo lanzamiento), o bien, gana su derecho a una segunda tirada cuyo valor es 6, o sea, $\frac{1}{6}$ de 36 (introduce también, como Huygens, la valoración de una partida que no se ha jugado, o sea, la valoración de una situación de incertidumbre). Entonces, si la segunda tirada vale 6 y, en total, puede ganar 36, los 30 de diferencia (el *resto* lo llama Caramuel) son los que se utilizan para saber lo que se acumula a esos 6 a la hora de valorar la primera tirada: la sexta parte de esos 30, que es 5, sumados a los 6 de la segunda tirada nos dan 11, siendo ésta la valoración inicial del juego para el jugador que lanza. La diferencia hasta 36, o sea 25, es la valoración para el otro jugador.

Con un razonamiento recurrente resuelve el caso en el que se intenta conseguir un éxito en tres pruebas. Según lo anterior, el valor del segundo lanzamiento es $\frac{11}{36}$. O sea, si se apuestan 36 monedas, el segundo lanzamiento (la posibilidad de lanzar una segunda y una tercera vez, para ser más correcto) vale 11 monedas. La diferencia con 36 es 25. Pues bien, $\frac{1}{6}$ de 25 es lo que hay que sumar a esos 11 para valorar la primera tirada, o la posibilidad de intentarlo en tres pruebas, resultando $15{\cdot}\frac{1}{6}$ de las 36. O sea, la probabilidad de conseguir éxito en tres lanzamientos es $(15{\cdot}\frac{1}{6})/36$ pero

> *como me parece que no te gustan las fracciones de fracciones, dividamos estos números por seis: así, $(15{\cdot}\frac{1}{6})/36$ se convierte en $\frac{15}{216}$.*

N.º de intentos	Apuesta del jugador	Apuesta del contrario
1	$\frac{1}{6}A$	$\left(1-\frac{1}{6}\right)A=\frac{5}{6}A$
2	$\frac{1}{6}A+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)A=$ $=\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{36}\right)A=\frac{11}{36}A$	$\left[1-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{36}\right)\right]A=\frac{25}{36}A$ o bien, $\frac{5}{6}A-\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}A=\frac{25}{36}A$
3	$\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{36}\right)A+\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{36}\right)\right]A=$ $=\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}\right)A=\frac{91}{216}A$	$\left[1-\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}\right)\right]A=\frac{125}{216}A$ o bien, $\frac{25}{36}A-\frac{1}{6}\cdot\frac{25}{36}A$

Tabla 1

Escribe Caramuel, siendo éste el resultado correcto. Y añade:

> Podrás desarrollar esta operación hasta el infinito, dando para ello la siguiente regla general: Súmale al resultado inmediatamente anterior, para el que expone, quien tira el dado, la sexta parte del resto.

Si *A* es la apuesta total, la tabla 1 , construida según esta regla, muestra lo que ha de apostar el jugador que lanza y quien le reta, según el número de intentos que tiene para conseguirlo.

Por tanto, para saber lo que ha de apostar el contrario, al aumentar un intento, se resta una sexta parte de lo que apostó en el número de intentos anterior. Una tabla similar, pero con más simplificación en el desarrollo algebraico, es la que ofrece Caramuel llegando hasta seis intentos.

A continuación aborda la resolución de este tipo de problemas usando logaritmos (es la primera vez en la historia de la probabilidad que se usa esta herramienta para resolver el problema del Caballero de Méré). Ahora bien, el uso de los mismos es sólo para apoyar los cálculos ya realizados. Por ejemplo, si el jugador pretende sacar un cinco en tres lanzamientos, y el total apostado es 36, entonces lo que él ha de poner es $36 \cdot \frac{91}{216}$, y el contrario $36 \cdot \frac{125}{216}$. Pues bien, el cálculo de esa cantidad lo lleva a cabo tomando primero el logaritmo de la misma y, luego, el antilogaritmo, siendo éste para el jugador contrario 20,834, por lo que el que lanza debe apostar 15,166. De esta forma presenta una tabla donde, en la primera columna está el número de intentos, en la segunda, el logaritmo de la cantidad que debe apostar el contrario, en la tercera el antilogaritmo, o sea, la cantidad que debe apostar el contrario en forma decimal (no fraccionaria), en la cuarta, lo que debe apostar el que lanza (también en forma decimal), y en la última, la opinión más generalizada entre los jugadores respecto a cómo se debía apostar y que difiere sensiblemente de sus propios cálculos. Esta columna demuestra, además, que Caramuel conocía bastante bien estos ambientes de juego.

NOTAS

1 A1 Trigonometría Artificialis, sive Magnus Canon Triangulorum Logarithmus, del año 1663.

2 Pharus Scientarum, 1659, Disp. XXIX, De Combinatione.

3 En griego Kybeia significa juego de dados.

Tabla de Caramuel

Si tengo que sacar el punto	Logaritmos 07918	Mi rival pondrá	Luego apostaré	Opinión general
De una vez	1,47712	30=000	contra 6=000	6 contra 30. Total 36
En dos	1,39794	25=000	contra 11=000	12 contra 24. Total 36
En tres	1,31876	20=834	contra 15=166	18 contra 18. Total 36
En cuatro	1,23958	17=362	contra 19=638	24 contra 12. Total 36
En cinco	1,16040	14=468	contra 22=532	30 contra 6. Total 36
En seis	1,08122	12=056	contra 23=944	36 contra 6. Total 36
En siete	1,00204	10=047	contra 25=953	
En ocho	0.92286	8=373	contra 27=627	
En nueve	0.84368	6=977	contra 29=023	
En diez	0.76450	5=814	contra 30=186	
En once	0,68532 C			
	0,79180 D			
	1,47712 E	Suma de ambos 36,000 F		

El signo = entre las cifras de la segunda y tercera columnas representa la coma decimal.

En la tabla se muestra, aunque Caramuel no hace referencia a ello, el cambio en las apuestas de los dos jugadores al pasar de 3 a 4 lanzamientos, siendo a partir de 4 el juego favorable al jugador que lanza. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASULTO SANTOS, J.; CAMÚÑEZ RUIZ, J. A. y DOMÍNGUEZ QUINTERO, A. M. (2002): "El Método Universal de Pascal como un Equivalente Cierto: el Problema de los Puntos", *Historia de la Probabilidad y de la estadística*, Editorial AC, Madrid, 19-34.

BELLHOUSE, D. (2005): "Decoding Cardano's Liber de Ludo Aleae", *Historia Matemática*, Vol. 32, Is. 2, mayo 2005, 180-202.

BERNSTEIN, P.L. (1996): *Against the Gods. The Remarkable Story of Risk*, John Wiley & Sons, New York.

CARAMUEL, J. (1670): *Kybeia, quae Combinatoriae Genus est, de Alea et Ludis Fortunae serio Disputans en Methesis bíceps (vetus et nova)*, Campania.

CARDANO, G. (1663): L*iber de Ludo Aleae, impreso por primera vez en Opera Omnia*, Vol. 1, traducido al inglés por S. H. Gould en Ore (1953).

DAVID, F. N. (1962): *Games, Gods and Gambling*, Charles Griffin & Co. Ltd., London.

FRANKLIN, J. (2001): *The Science of Conjeture. Evidence and Probability before Pascal*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

HACKING, I (1975): *The emergence of probability*, Cambridge University Press.

HALD, A. (1990): *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, John Wiley & Sons. New York.

HUYGENS, C. : (1888-1950): *Oeuvres Complètes*, 22 volúmenes, Société Hollandaise des Sciences. Nijhoff, La Haye. Los volúmenes usados aquí son: Vol. I, II, IV, V, VI, XVI y XXII.

IZQUIERDO, S. (1659): *La Combinatoria de Sebastián Izquierdo. Pharus Scientarum, Disp XXIX, De Combinatione*, texto latino y traducción española, publicado por Instituto de España. Madrid, 1974.

KORTEWEG, D. J. (1920): *Apercy de la Genèse de l'Ouvrage De Ratiociniis in Ludo Aleae et des Recherches subséquentes de Huygens sur les Questions de Probabilité*, Oeuvres de Huygens, Vol. 14, 3-48.

ORE, O. (1953): *Cardano, The Gambling Scholar*, Princenton University Press. Pricenton, New Jersey. Reimpreso por Dover, New York en 1965.

PASCAL, B. (1963): *Oeuvres Complètes*, Edición de Lafuma, París.

SCHNEIDER, I. (1980): "Christiaan Huygens's Contribution to the Development of a Calculus of Probabilities", *Janus LXVII*, 269-279.

TODHUNTER, I. (1865): *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*, Macmillan, London. Reprinted by Chelsea, New York, 1949.

VELARDE LOMBRAÑA, J. (1989): *Juan Caramuel. Vida y Obr*a, Pentalfa Ediciones, Oviedo.