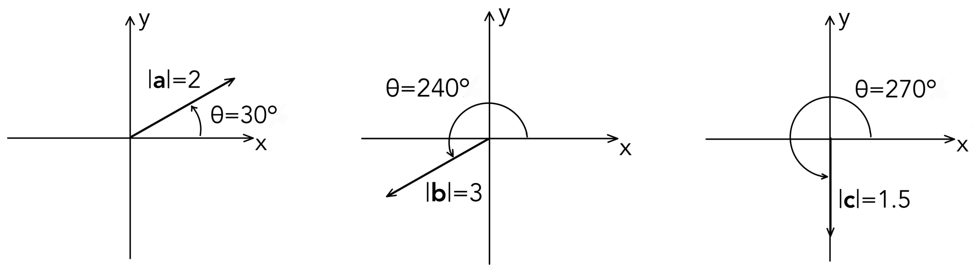
Ejercicio 1: Determine el módulo y la dirección de los siguientes vectores. Represéntelos gráficamente.

$$\text{i) } \mathbf{a} = (-4, 3) \qquad \text{ii) } \mathbf{b} = (2, 0) \qquad \text{iii) } \mathbf{c} = -2\hat{x} - 3\hat{y} \qquad \text{iv) } \mathbf{d} = 0\hat{x} - 5\hat{y}$$

Ejercicio 2: Halle las componentes cartesianas de los siguientes vectores



Ejercicio 3: Suma y resta de vectores Para los siguientes vectores **a** y **b**, halle $\mathbf{v}_+ = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{v}_- = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Exprese los resultados en todas las formas posibles.

i. $\mathbf{a} = (-3, 2)$; $\mathbf{b} = (-2, 5)$
ii. **a**, tal que $|\mathbf{a}| = 2$, $\theta_a = 240$; **b**, tal que $|\mathbf{b}| = 3$, $\theta_b = 135$
iii. $\mathbf{a} = -2\hat{x}$; $\mathbf{b} = 4\hat{y}$

Ejercicio 4: Operaciones en 3 dimensiones Dados $\mathbf{a} = 3\hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z}$, $\mathbf{b} = 4\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z}$ y $\mathbf{c} = -2\hat{y} - 5\hat{z}$, encuentre los vectores $\mathbf{v}_i$ realizando las operaciones correspondientes

$$\text{i) } \mathbf{v}_1 = 5\mathbf{a} - 2\mathbf{c} \qquad \text{ii) } \mathbf{v}_2 = -2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \tfrac{1}{5}\mathbf{c} \qquad \text{iii) } \tfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{|\mathbf{c}|} + \mathbf{c}$$

Producto escalar

El *producto escalar* entre vectores es una operación que, dados dos vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, devuelve un número. Existen dos definiciones equivalentes del producto escalar sobre un espacio $\mathbb{R}^n$. La definición geométrica del producto escalar propone que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\theta),$$

donde θ corresponde al ángulo comprendido entre las dos direcciones $\hat{a}$ y $\hat{b}$. Por otro lado, la definición algebraica se expresa como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$$

Ejercicio 5: Sean $\hat{x} = (1, 0, 0)$, $\hat{y} = (0, 1, 0)$ y $\hat{z} = (0, 0, 1)$ los versores que definen la terna derecha cartesiana, calcule $\hat{x} \cdot \hat{x}$, $\hat{x} \cdot \hat{y}$, $\hat{x} \cdot \hat{z}$, $\hat{y} \cdot \hat{x}$, $\hat{y} \cdot \hat{y}$, $\hat{y} \cdot \hat{z}$, $\hat{z} \cdot \hat{x}$, $\hat{z} \cdot \hat{y}$, $\hat{z} \cdot \hat{z}$. ¿Qué relación cumplen los resultados de la forma $\hat{a} \cdot \hat{b}$ con aquellos de la forma $\hat{b} \cdot \hat{a}$? (Esta relación vale en general para dos vectores cualesquiera y se denomina la propiedad de **conmutatividad** del producto escalar)

Ejercicio 6: Efectúe el producto escalar para los vectores **a** y **b** para los siguientes casos

i. $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$ y $\theta = 60$
ii. $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$ y $\theta = 0$
iii. $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$ y $\theta = 90$
iv. $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$ y $\theta = 120$
v. $\mathbf{a} = 3\hat{x} - 2\hat{y}$, $\mathbf{b} = -\hat{x} + 3\hat{z}$
vi. $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (6, -5, 2)$

Diga en cada caso si los vectores son perpendiculares entre si.

Ejercicio 7: La posición de una partícula en el espacio se puede describir con el siguiente vector posición $\mathbf{r}(t) = (t^3 + 2t + 1)\hat{x} - e^{2t}\hat{y} + \cos(3t)\hat{z}$ halle :

$$\text{i) } \mathbf{v} = d\mathbf{r}(t)/dt \qquad \text{ii) } |\mathbf{v}| = |d\mathbf{r}(t)/dt| \qquad \text{iii) } \mathbf{a} = d^2\mathbf{r}(t)/dt^2$$

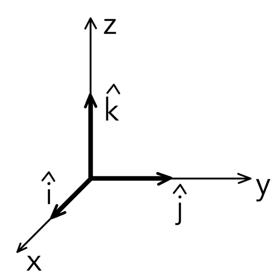
Producto vectorial

El *producto vectorial* entre vectores es una operación que, dados dos vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, devuelve un nuevo vector $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Esta operación se define como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\theta)\hat{n},$$

donde θ corresponde al ángulo comprendido entre las dos direcciones $\hat{a}$ y $\hat{b}$, y la dirección $\hat{n}$ es aquella perpendicular al plano definido por $\hat{a}$ y $\hat{b}$, en la dirección dada por la regla de la mano derecha.

Ejercicio 8: Sean $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ los versores que definen la terna derecha de la figura, calcule $\hat{i}\times\hat{i}$, $\hat{i}\times\hat{j}$, $\hat{i}\times\hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{i}$, $\hat{y}\times\hat{j}$, $\hat{j}\times\hat{k}$, $\hat{k}\times\hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{j}$, $\hat{k}\times\hat{k}$. ¿Qué relación cumplen los resultados de la forma $\hat{a} \times \hat{b}$ con aquellos de la forma $\hat{b} \times \hat{a}$? (Esta relación vale en general para dos vectores cualesquiera y se denomina la propiedad de **anticonmutatividad** del producto vectorial)



Ejercicio 9: El producto vectorial satisface la propiedad **distributiva**

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$$

Usando esta propiedad del producto vectorial respecto de la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si $\mathbf{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ y $\mathbf{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$, entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y\, b_z - a_z\, b_y, -a_x\, b_z + a_z\, b_x, a_x\, b_y - a_y\, b_x)$$

Ejercicio 10: Sean los vectores $\mathbf{a} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, -1)$ y $\mathbf{c} = (0, -2, 4)$ calcule:

$$\text{i) } \mathbf{b} \times \mathbf{c} \qquad \text{ii) -4}(\mathbf{b} \times \mathbf{b}) - \mathbf{a} \qquad \text{iii) } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \qquad \text{iv) } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

Sistemas de coordenadas

Para estos ejercicios, pueden ayudarse con el apunte sobre sistemas de coordenadas que se encuentra cargado en la sección *Prácticas* de la página de la materia

Ejercicio 11:

i. Usando las descomposiciones de los versores cilíndricos $\{\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z}\}$ en versores cartesianos, demuestre que $\hat{r}$ es ortogonal a $\hat{\varphi}$ y a $\hat{z}$. ¿Depende esta demostración del punto P en que se tome cada versor o es completamente independiente?
ii. Usando las descomposiciones de los versores esféricos $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$ en versores cartesianos, , demuestre que $\hat{r}$ es ortogonal a $\hat{\varphi}$ y a $\hat{\theta}$. ¿Depende esta demostración del punto P en que se tome cada versor o es completamente independiente?

Ejercicio 12: Una partícula se mueve siguiendo la trayectoria dada por $\mathbf{r}(t) = a\cos(\omega\, t)\hat{x} + a\sin(\omega\, t)\hat{y} + t\,\hat{z}$ con ω y a números reales y positivos.

i. ¿Qué sistema de coordenadas cree que será más conveniente para describir este movimiento?
ii. Exprese el vector $\mathbf{r}(t)$ en el sistema de coordenadas elegido.
iii. Exprese el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ en el mismo sistema elegido para el vector posición.

Ejercicio 13: El volumen de una determinada región está dado por la triple integral de la función constante $f(\mathbf{r}) = 1$. Según se describa la región en coordenadas cartesianas, cilíndricas, o esféricas, quedará expresado como

$$V = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} dz\,dy\,dx$$
$$V = \int_{r_0}^{r_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{z_0}^{z_1} dz\,d\varphi\,r\,dr$$
$$V = \int_{r_0}^{r_1}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin(\theta)d\theta\,d\varphi\,r^2\,dr$$

Encuentre, recurriendo al sistema de coordenadas que le parezca más conveniente, el volumen de las regiones descritas a continuación.

i. Una arandela de radio interior $r = 2mm$, radio exterior $R = 5mm$ y altura $h = 1mm$
ii. Una media-esfera maciza de radio $r = 2cm$
iii. Un cuarto de cilindro de altura $h = 1m$ y radio $r = 30cm$.