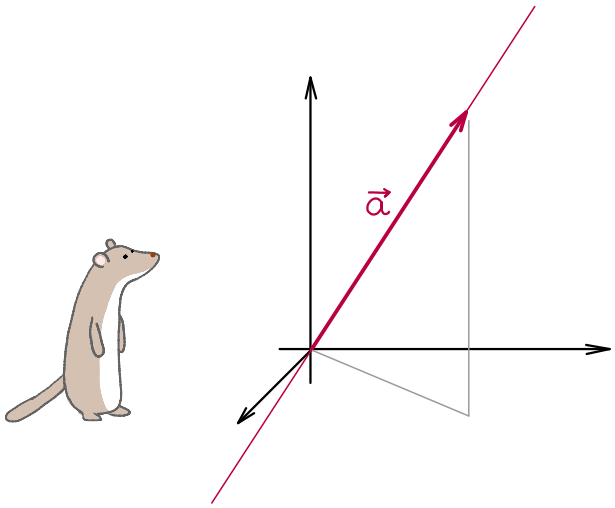
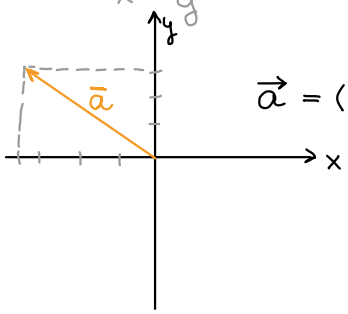
Primera parte: vectores



- Magnitud: $|\mathbf{a}|$ ✓
- Dirección ✓
- Sentido ✓

Ejercicio 1: Determine el módulo y la dirección de los siguientes vectores. Represéntelos gráficamente.

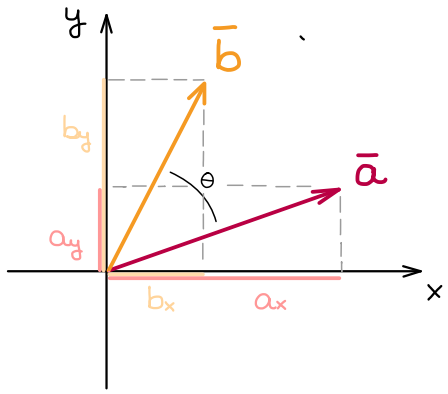
i) $\mathbf{a} = (\underbrace{-4}_{\hat{x}}, \underbrace{3}_{\hat{y}})$ ii) $\mathbf{b} = (2, 0)$ iii) $\mathbf{c} = -2\hat{x} - 3\hat{y}$ iv) $\mathbf{d} = 0\hat{x} - 5\hat{y}$



$\vec{a} = (-4, 3) = -4\hat{x} + 3\hat{y}$

Producto escalar entre vectores

$\cdot : \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$



Definición geométrica

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\theta)$$

$|\vec{a}|$ → norma de $\vec{a}$

θ → θ = angulo comprendido entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$

Definición algebraica

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i$$

$\sum_i a_i b_i$ → $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

$\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$

vector de norma 1

Ejercicio 5: Sean $\hat{x} = (1,0,0)$, $\hat{y} = (0,1,0)$ y $\hat{z} = (0,0,1)$ los versores que definen la terna derecha cartesiana, calcule $\hat{x}\cdot\hat{x}$, $\hat{x}\cdot\hat{y}$, $\hat{x}\cdot\hat{z}$, $\hat{y}\cdot\hat{x}$, $\hat{y}\cdot\hat{y}$, $\hat{y}\cdot\hat{z}$, $\hat{z}\cdot\hat{x}$, $\hat{z}\cdot\hat{y}$, $\hat{z}\cdot\hat{z}$. ¿Qué relación cumplen los resultados de la forma $\hat{a}\cdot\hat{b}$ con aquellos de la forma $\hat{b}\cdot\hat{a}$? (Esta relación vale en general para dos vectores cualesquiera y se denomina la propiedad de **conmutatividad** del producto escalar)

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = (1,0,0)\cdot(1,0,0) = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 1$$

$$\hat{x}\cdot\hat{y} = (1,0,0)\cdot(0,1,0) = 0 \longrightarrow \underbrace{|\hat{x}|}_{=1}\underbrace{|\hat{y}|}_{=1}\cos\theta = 0$$

$$\hat{x}\cdot\hat{z} = (1,0,0)\cdot(0,0,1) = 0$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = 90^\circ$$

$$\hat{y}\cdot\hat{x} = (0,1,0)\cdot(1,0,0)$$

Si $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ y $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares

Propiedades del producto escalar

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ — Conmutatividad

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ — Distributividad respecto de la suma

$(\alpha_1\vec{a})\cdot(\alpha_2\vec{b}) = \alpha_1\alpha_2(\vec{a}\cdot\vec{b})$ — Multiplicación por un escalar

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) \neq (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$ — No-asociatividad

números

$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = ?$

$\vec{a} = (2,1,0)$

$\vec{b} = (3,0,0)$

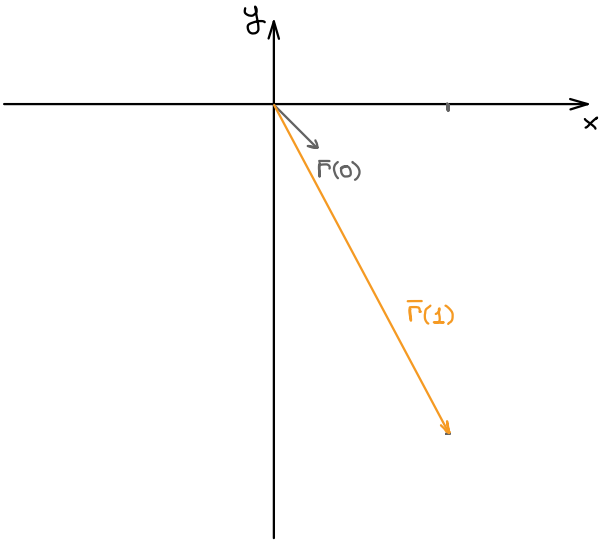
$\vec{c} = (0,4,1)$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) = (2,1,0)\cdot[(3,0,0)\cdot(0,4,1)]$$
$$= (2,1,0)\cdot 0$$
$$= (0,0,0)$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = [(2,1,0)\cdot(3,0,0)](0,4,1)$$
$$= 6(0,4,1)$$
$$= (0,24,6)$$

Ejercicio 7: La posición de una partícula en el espacio se puede describir con el siguiente vector posición $\mathbf{r}(t) = (t^3 + 2t + 1)\hat{x} - e^{2t}\hat{y} + \cos(3t)\hat{z}$ halle :

$$\text{i) } \mathbf{v} = d\mathbf{r}(t)/dt \qquad \text{ii) } |\mathbf{v}| = |d\mathbf{r}(t)/dt| \qquad \text{iii) } \mathbf{a} = d^2\mathbf{r}(t)/dt^2$$



$$\bar{r}(t) = (t^3+2t+1)\hat{x} - e^{2t}\hat{y}$$

$$\bar{r}(0) = 1\hat{x} - 1\hat{y}$$

$$\bar{r}(1) = (1^3+2\cdot 1+1)\hat{x} - e^{2\cdot 1}\hat{y}$$
$$= 4\hat{x} - e^2\hat{y}$$
$$= 4\hat{x} - 7{,}4\hat{y}$$

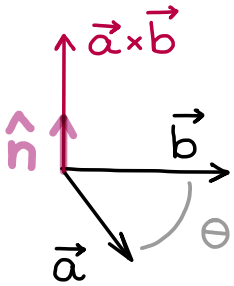
$$\vec{E}(\underbrace{x,y,z}_{\text{describen el punto del espacio}})$$

i) $$\bar{v}(t) = \frac{d}{dt}\bar{r}(t)$$
$$= \frac{d}{dt}\left[(t^3+2t+1)\hat{x} - e^{2t}\hat{y} + \cos(3t)\hat{z}\right]$$
$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\left[(t^3+2t+1)\hat{x}\right]}_{(3t^2+2)\hat{x}} - \frac{d}{dt}\left[e^{2t}\hat{y}\right] + \frac{d}{dt}\left[\cos(3t)\hat{z}\right]$$
$$(3t^2+2)\hat{x} \quad - \quad 2e^{2t}\hat{y} \quad - 3\sin(3t)\hat{z}$$

$$\bar{v}(t) = (3t^2+2)\hat{x} - 2e^{2t}\hat{y} - 3\sin(3t)\hat{z}$$

Producto vectorial

$$\times : \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$$

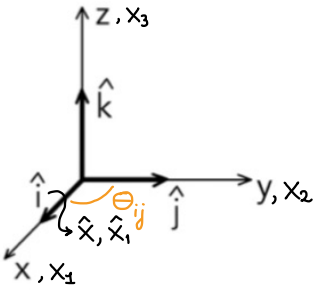


Definición geométrica

$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\theta)\,\hat{n}$$

$\hat{n}$: dirección del vector "resultado"
$\hat{n}$ perpendicular al plano que contiene a $\vec{a}$ y $\vec{b}$
sentido de $\hat{n}$ dado por la regla de la mano derecha

Ejercicio 8: Sean $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ los versores que definen la terna derecha de la figura, calcule $\hat{\imath}\times\hat{\imath}$, $\hat{\imath}\times\hat{\jmath}$, $\hat{\imath}\times\hat{k}$, $\hat{\jmath}\times\hat{\imath}$, $\hat{y}\times\hat{\jmath}$, $\hat{\jmath}\times\hat{k}$, $\hat{k}\times\hat{\imath}$, $\hat{k}\times\hat{\jmath}$, $\hat{k}\times\hat{k}$. ¿Qué relación cumplen los resultados de la forma $\hat{a}\times\hat{b}$ con aquellos de la forma $\hat{b}\times\hat{a}$? (Esta relación vale en general para dos vectores cualesquiera y se denomina la propiedad de **anticonmutatividad** del producto vectorial)

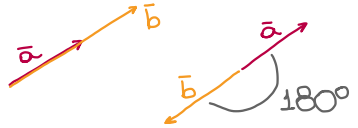


$$\hat{\imath}\times\hat{\imath} = \underbrace{|\hat{\imath}|}_{=1}\underbrace{|\hat{\imath}|}_{=1}\underbrace{\sin(\theta_{ii})}_{=0}\hat{n} = 0$$

$\theta_{ii} = 0$

$(1,0,0)$

$\rightarrow$ Si $|\vec{a}|\neq 0$, $|\vec{b}|\neq 0$ y $\vec{a}\times\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección



$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \underbrace{|\hat{\imath}|}_{=1}\underbrace{|\hat{\jmath}|}_{=1}\underbrace{\sin(\theta_{ij})}_{=1}\hat{n} = \hat{k}$$

$(0,1,0)$

$$\hat{\jmath}\times\hat{\imath} = \underbrace{|\hat{\imath}|}_{=1}\underbrace{|\hat{\jmath}|}_{=1}\underbrace{\sin(\theta_{ij})}_{=1}\hat{n} = -\hat{k}$$

$$\boxed{\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}} \qquad \hat{y}\times\hat{x} = -\hat{z}$$

$$\hat{z}\times\hat{x} = \hat{y} \qquad \hat{x}\times\hat{z} = -\hat{y}$$

$$\hat{y}\times\hat{z} = \hat{x} \qquad \hat{z}\times\hat{y} = -\hat{x}$$

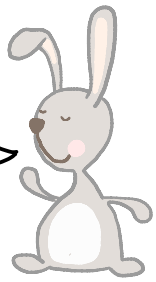
Propiedades del producto vectorial

$\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$	Anticonmutatividad
$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$	Distributividad respecto de la suma
$(\alpha_1\vec{a})\times(\alpha_2\vec{b}) = \alpha_1\alpha_2(\bar{a}\times\bar{b})$	Multiplicación por un escalar
$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$	No-asociatividad

Para vectores de $\mathbb{R}^3$, **a**=(a_x,a_y,a_z) y **b**=(b_x,b_y,b_z)

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_y\,b_z - a_z\,b_y,\ -a_x\,b_z + a_z\,b_x,\ a_x\,b_y - a_y\,b_x)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



$\vec{a} = (1,2,1)$

$\vec{b} = (2,1,1)$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a}\times\bar{b} = (2\cdot 1 - 1\cdot 1\ ,\ 1\cdot 2 - 1\cdot 1\ ,\ 1\cdot 1 - 2\cdot 2\ ) = (1,1,-3)$$

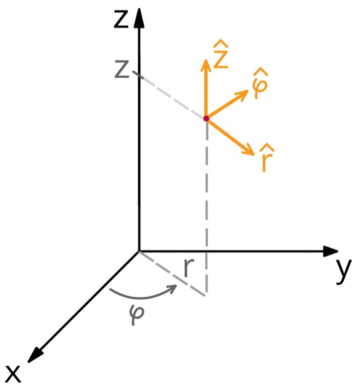
Segunda parte: sistemas de coordenadas

Ejercicio 12: Una partícula se mueve siguiendo la trayectoria dada por $\mathbf{r}(t) = a\cos(\omega\, t)\hat{x} + a\sin(\omega\, t)\hat{y} + t\,\hat{z}$ con ω y a números reales y positivos.

i. ¿Qué sistema de coordenadas cree que será más conveniente para describir este movimiento?
ii. Exprese el vector $\mathbf{r}(t)$ en el sistema de coordenadas elegido.
iii. Exprese el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ en el mismo sistema elegido para el vector posición.

1 Coordenadas cilíndricas

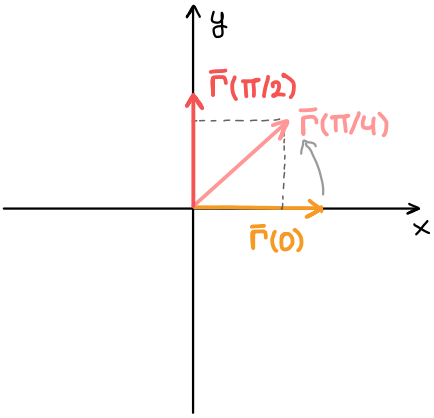
Relación entre versores



$$\hat{r} = \cos(\varphi)\,\hat{x} + \sin(\varphi)\,\hat{y}$$
$$\hat{\varphi} = -\sin(\varphi)\,\hat{x} + \cos(\varphi)\,\hat{y}$$
$$\hat{z} = \hat{z}$$

$$\hat{x} = \cos(\varphi)\,\hat{r} - \sin(\varphi)\,\hat{\varphi}$$
$$\hat{y} = \sin(\varphi)\,\hat{r} + \cos(\varphi)\,\hat{\varphi}$$
$$\hat{z} = \hat{z}$$

$$\bar{r}(t) = a\cos(\omega t)\,\hat{x} + a\sin(\omega t)\,\hat{y} + t\hat{z}$$

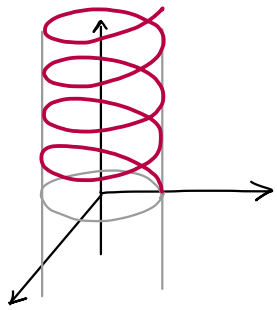


$a=1,\ \omega=1$

$$\bar{r}_{aux}(t) = \cos(t)\,\hat{x} + \sin(t)\,\hat{y}$$
$$\bar{r}_{aux}(0) = 1\,\hat{x} + 0$$
$$\bar{r}_{aux}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y}$$
$$\bar{r}_{aux}(\pi/2) = 0\,\hat{x} + 1\,\hat{y}$$

$$\bar{r}(t) = a\cos(\omega t)\,\hat{x} + a\sin(\omega t)\,\hat{y} + t\hat{z}$$
$$= a\cos(\omega t)\left[\cos(\omega t)\,\hat{r} - \sin(\omega t)\,\hat{\varphi}\right] + a\sin(\omega t)\left[\sin(\omega t)\,\hat{r} + \cos(\omega t)\,\hat{\varphi}\right] + t\,\hat{z} \quad (\varphi = \omega t)$$
$$= a\cos^2(\omega t)\,\hat{r} - \cancel{a\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,\hat{\varphi}} + a\sin^2(\omega t)\,\hat{r} + \cancel{a\sin(\omega t)\cos(\omega t)\,\hat{\varphi}} + t\,\hat{z}$$
$$= a\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right)\hat{r} + t\hat{z}$$

$$\bar{r}(t) = a\,\hat{r}(t) + t\,\hat{z}$$



Ejercicio 13: El volumen de una determinada región está dado por la triple integral de la función constante $f(\mathbf{r}) = 1$. Según se describa la región en coordenadas cartesianas, cilíndricas, o esféricas, quedará expresado como

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} dz\, dy\, dx$$

$$V = \int_{r_0}^{r_1} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{z_0}^{z_1} dz\, d\varphi\, r\, dr$$

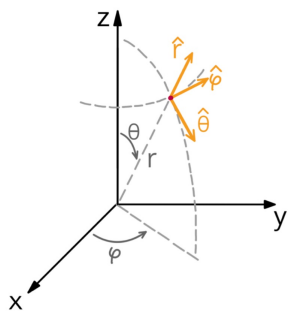
$$V = \int_{r_0}^{r_1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin(\theta) d\theta\, d\varphi\, r^2\, dr$$

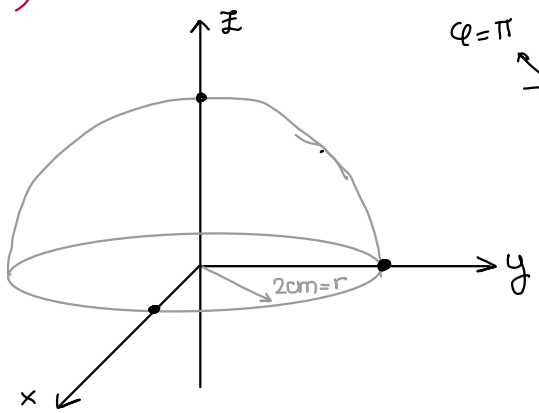
Encuentre, recurriendo al sistema de coordenadas que le parezca más conveniente, el volumen de las regiones descritas a continuación.

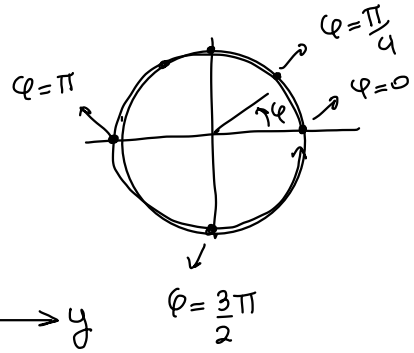
i. Una arandela de radio interior $r = 2mm$, radio exterior $R = 5mm$ y altura $h = 1mm$
ii. Una media-esfera maciza de radio $r = 2cm$
iii. Un cuarto de cilindro de altura $h = 1m$ y radio $r = 30cm$.

ii)

2 Coordenadas esféricas







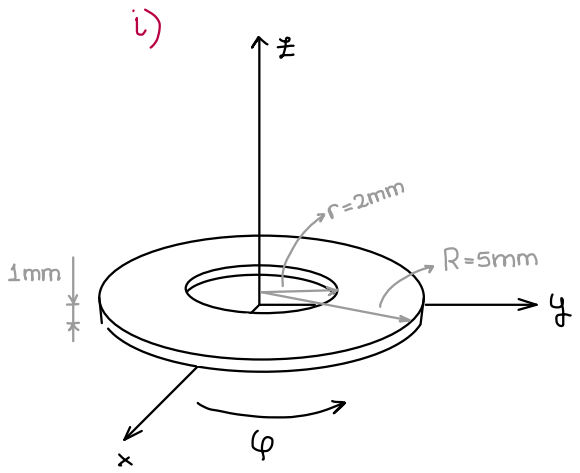
$$V = \int_{r=0}^{r=2} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r^2 \sin\theta \; dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \left(\int_0^{2cm} r^2 dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)$$

$$= \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2cm}\right)\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}\right)\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{(2cm)^3}{3}\left(\underbrace{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\cos(0)}_{=1}\right)(2\pi - 0) = \frac{8}{3}cm^3 \cdot 2\pi \simeq 16{,}75cm^3$$

i)



$$V = \int_{r=2mm}^{r=5mm} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{z=0mm}^{z=1m} r \, dr \, d\varphi \, dz$$

$$= \left(\int_{2mm}^{5mm} r \, dr \right) \left(\int_{0}^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_{0mm}^{1mm} dz \right)$$

$$= \left(\frac{r^2}{2} \Big|_{2mm}^{5mm} \right) \left(\varphi \Big|_{0}^{2\pi} \right) \left(z \Big|_{0}^{1mm} \right)$$

$$= \frac{25mm^2 - 4mm^2}{2} \cdot 2\pi \cdot 1mm \sim 66 mm^3$$